IX Tiragosto: Relatividade (Especial)

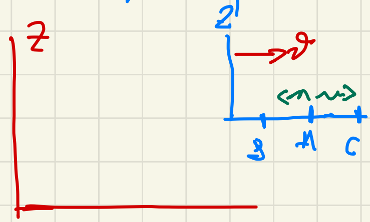
20/6/23

- Referenciais inerciais: vale a lei da inércia
- Referencial inercial com velocidade constante a um ref. inercial também é inercial.
- Princípio da relatividade: Leis da natureza são as mesmas em todos os referenciais inerciais $\Longrightarrow$ equações que governam os fenômenos tem a mesma forma em qualquer referencial
- Velocidade máxima de propagação de interações: é finita (e a mesma em todos os referenciais) e dada pela velocidade da luz no vácuo

$$c = 2{,}998 \times 10^8 \ m/s$$

- Mecânica Newtoniana precisa ser modificada pois não há limite para as velocidades, sendo na verdade o limite para $c \to \infty$.
- Em mecânica relativística o tempo é relativo. Por exemplo (trem de Einstein)

$AB = BC$



Ref. S': • A emite luz simultaneamente para B e C

• Sinais chegam simultaneamente em B e C

Ref S: • A emite a luz c/ velocidade $\underline{c}$ para os dois lados

• B aproxima-se da luz enquanto C afasta-se ⇒

⇒ Sinal chega primeiro a B que o C

Conclusão: tempo não é universal!

I.2 Intervalos:

- Evento: caracterizado por posição e tempo
- Conveniente definir um espaço 4D (ct, x, y, z)
- Considere luz indo do Ponto 1 para o 2

No Ref S: $c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0$

postulado

No Ref S': $c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2=0$

- Intervalo entre 2 eventos:

$$s_{12}^2 \equiv c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

- Para eventos infinitesimalmente próximos

$$ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

- Sabemos que $\underset{\hookrightarrow \text{ref. } S}{ds = 0} \Rightarrow \underset{\hookrightarrow \text{ref. } S'}{ds' = 0}$

- Como ds e ds' são da mesma ordem $\Rightarrow ds^2 = a\, ds'^2$

- a deve depender da velocidade relativa entre S e S'

- Tomemos 3 referenciais: S, S_1, S_2 c/ vel. relativas $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$

- homogêneidade e isotropia do espaço $\Rightarrow a(|\vec{V}_1|)$ $[V_1 = |\vec{V}_1|]$

- Agora $$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2$$
$$ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2$$
$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2$$
$\hookrightarrow$ vel. relativa entre K_1 e K_2

$$\Longrightarrow \frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12})$$

$\hookrightarrow$ depende do ângulo entre $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$

$\hookrightarrow$ independe do ângulo entre $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$

$\Rightarrow a =$ constante $= 1$

Logo $\boxed{ds^2 = ds'^2} \Longrightarrow s = s'$

- Notação: $\Delta t_{12} = t_1 - t_2$ e $\Delta \vec{x}_{12} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

- O intervalo $\Delta S_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12} - (\Delta \vec{x}_{12})^2$ pode ser

  o) Tipo luz: $\Delta S_{12}^2 = 0$

  i) Tipo tempo: $\Delta S_{12}^2 > 0 \Longrightarrow \exists$ referencial onde acontecem no mesmo ponto

iii) tipo espaço: $\Delta S_{12}^2 < 0 \Rightarrow$ existe referencial onde eventos acontecem simultaneamente mas em pontos diferentes.

IX.3 Tempo próprio

Considere um relógio em movimento retilíneo uniforme $\Rightarrow$ existe ref. inercial coincidindo com ele (S'). Para outro ref. inercial S:

$$ds^2 = c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\Rightarrow dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \qquad (\vec{v} = d\vec{x}/dt)$$

tempo próprio

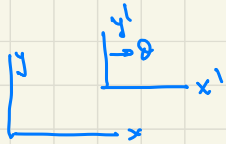
Note que $dt' < dt$ sempre! Essa é a dilatação do tempo!

Exemplo: μ da atmosfera!

IX.4 Transformação de Lorentz

Em Mec. clássica temos as transf. de Galileo

$$x = x' + vt$$
$$t = t'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$



Qual a transf. em relatividade?

i) O espaço é homogêneo $\Rightarrow$ a transf. deve ser linear

ii) fixemos só em t e x. Queremos que

$(ct', x') \longrightarrow (ct, x)$ de tal forma que

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$

Note no caso de rotações $(x,y) \to (x', y')$ e $x^2+y^2 = x'^2+y'^2$

a transformação é $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

<u>Tentamos</u>: $\left.\begin{aligned} x &= x'\cosh\psi + ct'\sinh\psi \\ ct &= x'\sinh\psi + ct'\cosh\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$c^2t^2 - x^2 = x'^2\cosh^2\psi + 2x'c\cancel{t'}\cosh\psi\sinh\psi \overbrace{- (x'^2\sinh^2\psi}^{+c^2t'^2\sinh^2\psi} + 2x'c\cancel{t'}\sinh\psi\cosh\psi + c^2t'^2\cosh^2\psi)$$

$$= \underbrace{(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi)}_{1} (x'^2 - c^2t'^2) \Rightarrow \underline{\underline{OK}}!$$

A origem de S' tem $x'=0$ que no ref. S é: $\left.\begin{aligned} x &= ct'\sinh\psi \text{ e} \\ ct &= ct'\cosh\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{tgh}\psi = \frac{v}{c}!$$

v de $S' = x/t$

$$\Rightarrow \sinh\psi = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Logo, definindo $\beta = v/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + \beta\, ct') \\ ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\}\ \text{transf. de Lorentz}$$

Pode-se mostrar que

- Para $v \ll c \Rightarrow \beta \ll 1$ e $\gamma \simeq 1$

$$x \simeq x' + vt \quad \text{e} \quad ct \simeq ct' + \beta x' \Rightarrow t = t' + \underbrace{\beta \frac{x'}{c}}_{\text{"desprezível"}} \Rightarrow t = t'$$

22/6/23

IX.5 Obtendo a lagrangiana da partícula livre

Mínima ação $\Longrightarrow \delta S = 0$

A ação deve independer do referencial adotado, ie S é invariante de Lorentz. Mas temos apenas ds disponível para uma partícula livre. Então,

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

integral ao longo da "world line da partícula"

por conveniência

ctc

Sabemos $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int ds = c\int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \Rightarrow L = -\alpha \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}\ c$