Note que a energia da partícula é E e longe do potencial $E = \frac{1}{2} m v_0^2$. Em geral,

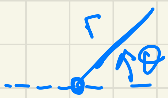
$$s = s(\theta, E)$$

Logo

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin\bar{\theta}}\left|\frac{ds}{d\bar{\theta}}\right|}$$

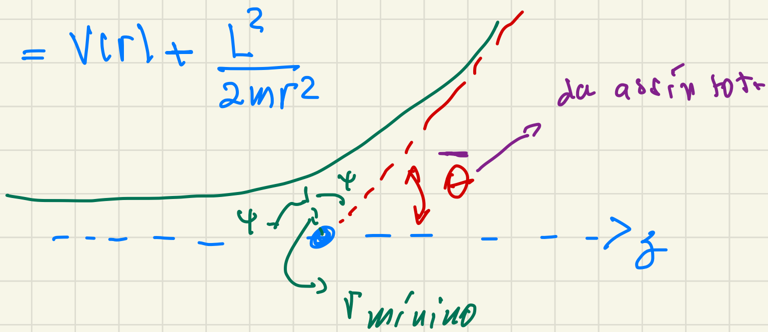
15/6/23

Note que $s(\theta, E)$ pode ser obtido da órbita da partícula. Como já visto



$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2}\frac{1}{\sqrt{E - V_{ef}(r')}} + \theta_0$$

onde $V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$



Tomando o ângulo φ na aproximação mínima do centro do potencial, por simetria

$$\bar{\Theta} = \pi - 2\varphi$$

Tomando $\theta_0 = \pi$ para $r_0 = \infty$ na direção de incidência temos

$$\Psi = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{ef}(r)}}$$

já que para r_{min} $\theta = \pi - \Psi$. Logo,

$$\bar{\Theta} = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2mV}{L^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$L = s\sqrt{2mE}$

$$= \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{s^2} - \frac{V}{Es^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$= \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{s\, dr}{r \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{V}{E}\right) - s^2}}$$

trocando a variável para $y = 1/r$

$$\bar{\Theta}(s) = \pi - 2 \int_{0}^{y_m} \frac{s\, dy}{\sqrt{1 - \frac{V(y)}{E} - s^2 y^2}}$$

VIII.2 Potencial de Coulomb

Neste caso conhecemos a trajetória:

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} z + \text{constante} = \cos^{-1} \frac{L/r - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}} + C^{te}$$

$C^{te} = \theta'$

Então, definimos

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta - \theta')$$

Para $E > 0 \Rightarrow e > 1 \Rightarrow$ hipérbole.

Consideremos o caso do potencial de Coulomb repulsivo

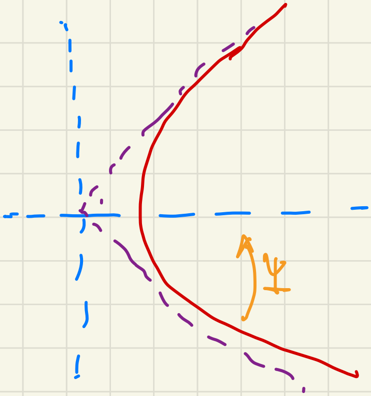
$$U = \frac{zz'e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Longrightarrow \alpha = -\frac{zz'e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$ (partículas de carga ze e $z'e$; e = carga do próton)

Escolhemos $\theta' = \pi \Rightarrow$

$$\frac{p}{r} = 1 - e\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m.zz'e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(e\cos\theta - 1\right)$$

A distância de mínima aproximação $\Rightarrow$ $e\cos\theta - 1|$ máximo

$\Rightarrow \theta = 0!$



Quando $r \to 0 \Rightarrow \theta \to \Psi \Rightarrow \cos\Psi = \frac{1}{e}$

Como $\bar{\theta} = \pi - 2\Psi \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\bar{\theta}}{2}\right) = \frac{1}{e} = \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)$

valor de E da página anterior

$\Rightarrow \cot^2\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right) = \frac{1 - 1/e^2}{1/e^2} = e^2 - 1 = \frac{2EL^2}{m\alpha^2}$

Mas $L = m v_0 s = \sqrt{2mE}\, s \Rightarrow \frac{2EL^2}{m\alpha^2} = \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cot\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right) = \left|\frac{2Es}{\alpha}\right| \Rightarrow s = +\frac{zz'e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2E}\cot\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)$

Mas $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin\bar{\theta}}\left|\frac{ds}{d\bar{\theta}}\right|}$

$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{zz'e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2E}\cot\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\bar{\theta}}\cdot\left|-\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)\frac{zz'e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2E}\right|$

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E\,4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Seção de choque de Rutherford.

Obs: O resultado é o mesmo em Mecânica Quântica!!!

Note que $\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty$!!!!

Isso se deve à força de Coulomb ser de longo alcance!