$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) & (1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) & (2) \end{cases}$$

Solução por inspeção:

$$(1)+(2) \Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) = -k(x_1+x_2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}(x_2-x_1) = -(k+2k')(x_2-x_1)$$

Definindo $q_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $q_2 = \frac{x_2-x_1}{2}$

6/6/23

as eq's desacoplam

$$m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -kq_1$$

$$m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -(k+2k')q_2$$

Definindo $\omega_0^2 = k/m$ e $\omega_1^2 = k'/m$ a solução geral é

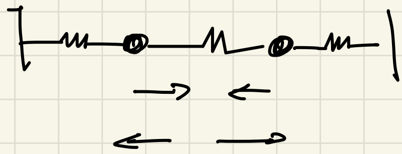
$$q_1(t) = A_1\cos(\omega_0^2 t + \varphi_1)$$

$$q_2(t) = A_2\cos(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\, t + \varphi_2)$$

Como esperado, a solução depende de 4 constantes. Interpretemos essas soluções.

Como $x_1 = q_1 - q_2$ e $x_2 = q_1 + q_2$

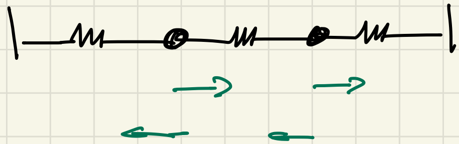
$q_1 = 0$ e $q_2 \neq 0$



$\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}$

frequência

$q_1 \neq 0$ $q_2 = 0$



ω_0

As soluções q_1 e q_2 são chamadas modos normais de vibração

Tratemos agora o caso geral

$$T_{kj}\,\ddot{\eta}_j = -V_{kj}\,\eta_j \qquad (1)$$

Procuremos soluções análogas a $q_{1,2}$ do exemplo anterior:

$$\eta_k = z_k^{(0)}\, e^{i\omega t} \qquad (2) \Longrightarrow$$

$$\left(\omega^2 T_{kj} - V_{kj}\right) z_j^{(0)} = 0$$

Este é um sistema de eq's lineares que podemos pôr na forma matricial definindo $T = [T_{kj}]$ $V = [V_{kj}]$ $z = [z_j^{(0)}]$

matriz $n \times n$

$$(\omega^2 T - V)\, z = 0$$

Para que exista solução não nula ($z \neq 0$) devemos ter

$$\det\left[\omega^2 T - V\right] = 0$$

$\Rightarrow$ polinômio de grau n em $\omega^2 \Rightarrow$ existem n soluções ω_s^2

Neste ponto obtemos os z's associados a cada ω_s^2.

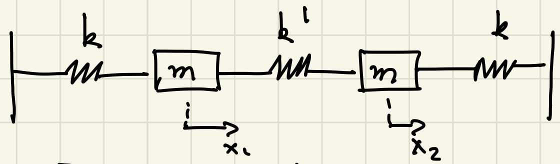
Visto que T e V são matrizes reais podemos tomar os z's reais. Neste caso as soluções associadas a cada $\omega^2_{s,l}$ são [assumindo momentaneamente que $\omega^2_{s,l} < 0$]

$$\eta_{l,j} = \underbrace{A_l \; z^{(0)}_{l,j}}_{\text{sem soma}} \cos(\omega_{s,l}\, t + \varphi_l)$$

e a solução geral do problema é

$$\eta_{Geral,j} = \sum_l A_l \, z^{(0)}_{l,j} \cos(\omega_{s,l} + \varphi_l)$$

<u>Exemplo</u>: apliquemos o método ao sistema já estudado



$$T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} +k+k' & -k' \\ -k' & +k+k' \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} m\omega^2 - k - k' & k' \\ k' & m\omega^2 - k - k' \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m\omega^2 - k - k')^2 - k'^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\omega^2 - k - k' = \pm k'$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m}(k + k' \pm k') = -(\omega_0^2 + \omega_s^2 \pm \omega_s^2)$$

$\Rightarrow$ frequências ω^2 : ω_0^2 ; $(\omega_0^2 + 2\omega_s^2)$ OK ☺

Modos normais: i) $\omega^2 = \omega_0^2$

$$\begin{pmatrix} -\cancel{k} + \cancel{k} - k' & +k' \\ +k' & -\cancel{k} + \cancel{k} - k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

$\hookrightarrow$ escolho

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \equiv \text{Modo } q_1 \text{ anterior}$$

ii) $\omega^2 = (\omega_0^2 + \omega_s^2) = -$ $\begin{pmatrix} -\cancel{k} - 2k' + \cancel{k} + k' & -k' \\ -k' & -k - 2k' + k + k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$$\alpha = -\beta = 1$$

$$\eta_2 = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\; t + \varphi_2\right)$$

A solução geral é

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)}_{C_1 \cos(\omega_0 t) + D_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{A_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\; t + \varphi_2\right)}_{C_2 \cos(\sqrt{\ }\; t) + D_2 \cos(\sqrt{\ }\; t)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exploremos um pouco mais esse exemplo considerando a condição inicial

$$x_1(0) = L \qquad \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

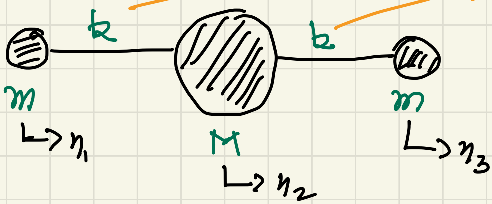
$$C_1 + C_2 = L$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 D_1 + \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\, D_2 &= 0 \\ C_1 - C_2 &= 0 \\ \omega_0 D_1 - \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\, D_2 &= 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow D_1 = D_2 = 0$$

$$C_1 = C_2 = L/2$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\; t\right) \\ \cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\; t\right) \end{bmatrix}$$

Exemplo Molécula triatômica linear (e.g. CO_2)



aproximação em torno do ponto de equilíbrio!

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\eta}_1^2 + \frac{M}{2} \dot{\eta}_2^2 + \frac{m}{2} \dot{\eta}_3^2 - \frac{k}{2} (\eta_1 - \eta_2)^2 - \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_3)^2$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad e \quad V = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m\omega^2 - k & k & 0 \\ k & M\omega^2 - 2k & k \\ 0 & k & m\omega^2 - k \end{bmatrix} = (\omega^2 T - V)$$

Agora

$$\det(\omega^2 T - V) = 0 \Rightarrow (m\omega^2 - k)^2 (M\omega^2 - 2k) - k^2 (m\omega^2 - k) 2 = 0$$

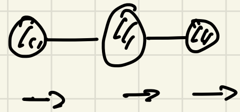
$$\Rightarrow (m\omega^2 - k) \left[(m\omega^2 - k)(M\omega^2 - 2k) - 2k^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = k/m$$

$$e \quad mM\omega^4 - k(2m + M)\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 = k \frac{(2m+M)}{mM} \quad e \quad \omega_3^2 = 0 \; !!$$

$\to \omega_3^2 = 0$ é só a translação da molécula!!

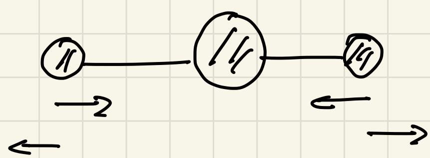


$$\left(\omega_3^2 T - V\right) \xi^0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -2k & k \\ 0 & k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$ por exemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\to \omega_1^2 = k/m \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k\left(\frac{M}{m} - 2\right) & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \beta = 0 \qquad \alpha = -\gamma \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



$$\to \omega_2^2 = k\frac{(2m+M)}{mM} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2m}{M}k & k & 0 \\ k & k\frac{M}{m} & k \\ 0 & k & \frac{2mk}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$\beta = -\frac{2m}{M}\alpha \qquad \beta = -\frac{2m}{M}\gamma \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 

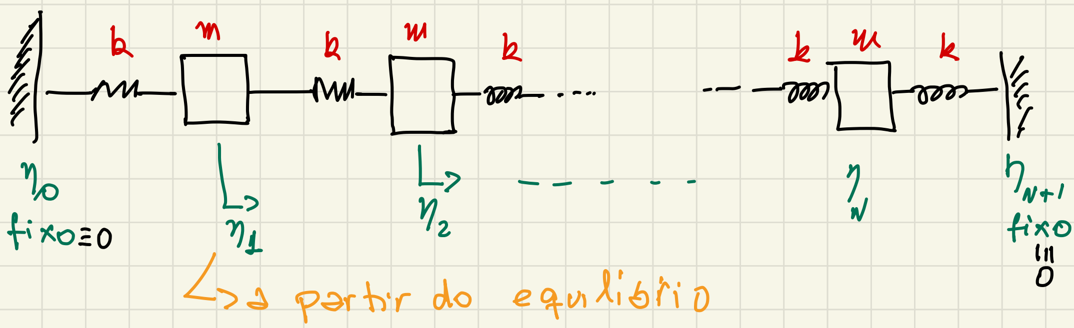
A solução geral é

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = (A+Bt)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\varphi_1\right]$$

$$+ D\begin{pmatrix}1\\-2m\\M\end{pmatrix}\cos\left[\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}\,t+\varphi_2\right]$$

13/6/23

<u>Exemplo</u>: Consideremos o seguinte sistema de N corpos:



$$U(\eta_1 \dots \eta_N) = \sum_{j=0}^{N} \frac{k}{2}(x_{j+1}-x_j)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_j k\,(x_{j+1}-x_j)\left[\delta_{i\,j+1}-\delta_{ij}\right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_l\,\partial x_i} = k\sum_j(\delta_{l\,j+1}-\delta_{jl})(\delta_{i\,j+1}-\delta_{ij}) = k\left[2\delta_{il}-\delta_{l\,i-1}-\delta_{l\,i+1}\right]$$

$$\| \\ V_{li}$$