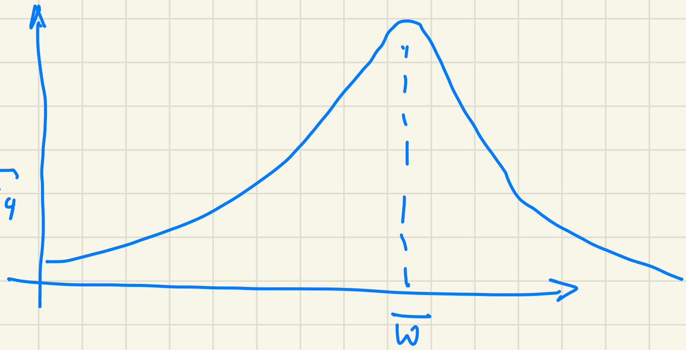
Note que temos uma ressonância para $\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}$

$$x_{max} = \frac{F_0}{m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}$$



Até aqui tudo conhecido de Física 2. E para uma "força geral" $F(t)$? Novamente

1/6/23

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Consideremos a função $G(t-t')$ que satisfaz à eq. diferencial

$$\frac{d^2 G(t,t')}{dt^2} + \gamma \frac{dG(t,t')}{dt} + \omega_0^2 G(t,t') = \delta(t-t') \quad (*)$$

Se soubermos $G(t,t')$ uma solução particular de

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} + \gamma \frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p = \frac{F(t)}{m}$$

é dado por

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, G(t,t') \frac{F(t')}{m}$$

De fato:

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} + \gamma \frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left[\frac{d^2 G}{dt^2}(t,t') + \gamma \frac{dG}{dt}(t,t') + \omega_0^2 G(t,t') \right.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \delta(t-t') \frac{F(t')}{m} = \frac{F(t)}{m} \qquad \text{ok} \checkmark$$

Usemos a transformada de Fourier:

$$G(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{i\omega(t-t')} g(\omega)$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\sqrt{2\pi}}$$

Onde $$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \; e^{-i\omega(t-t')} \; G(t-t')$$

Substituindo as transformadas de Fourier na eq. ⊛ da página anterior leva a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\left(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2\right) g(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] e^{i\omega t} = 0$$

Das propriedades da transformada de Fourier segue que

$$[\;\;] = 0 \Rightarrow \quad g(\omega) = \frac{1/\sqrt{2\pi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \qquad [\text{reconhece?}]$$

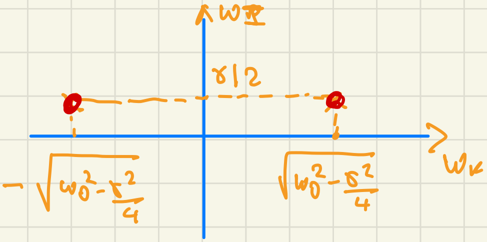
$$\Rightarrow \quad G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

Façamos a integral por resíduos: Os pólos estão em

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \quad \omega_{polo} = \frac{1}{2}\left[i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2} \right]$$

Assumindo amortecimento subcrítico

$$\omega_{polo} = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

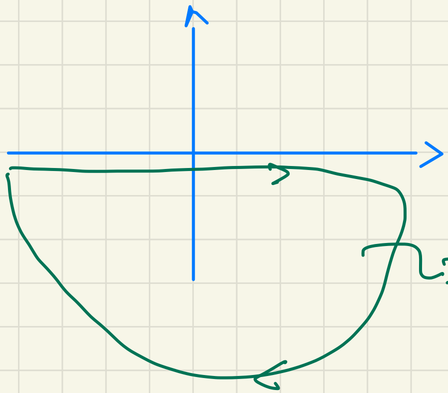


plano ω complexo

o = pólos!

Utilizemos o teorema dos resíduos.

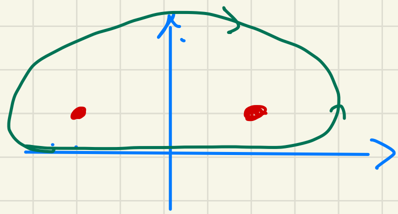
Para $t-t'<0$ devemos fechar por baixo a integral



não há pólos!

$$\Rightarrow \quad G(t-t')=0$$

Para $t-t'>0$ fechamos por cima



$$G(t-t') = 2\pi i \sum_{\text{residuos}} \frac{g(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}}{2\pi}$$

$$= i\left\{ \frac{-1}{2\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}}\, e^{i\left[\frac{i\gamma}{2}+\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}\right](t-t')} + \frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}}\, e^{i\left[\frac{i\gamma}{2}-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\right](t-t')}\right.$$

definindo $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}} \Rightarrow G(t-t') = \frac{1}{\omega}\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, \text{sen}\big(\omega(t-t')\big)$

Resumindo:

$$G(t-t') = \begin{cases} 0 & t<t' \\ \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\gamma(t-t')}{2}} \operatorname{sen}[\omega(t-t')] & t>t' \end{cases}$$

Calculo Alternativo da função de Green

$$\frac{d^2 G(t-t')}{dt^2} + \gamma \frac{dG}{dt}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') = \delta(t-t')$$

Troquemos $t-t'$ por τ, sendo $\frac{d}{dt}G = \frac{dG}{d\tau}$

Causalidade, ie efeito depois da causa implica que $G(\tau) \equiv 0$ para $\tau<0$. (*)

Para $\tau>0$ o δ é nulo e

$$\frac{d^2 G}{d\tau^2} + \gamma \frac{dG}{d\tau} + \omega_0^2 G = 0$$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\Rightarrow G(\tau) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \operatorname{sen}(\omega\tau) + c_2 e^{-\frac{\gamma \cdot \tau}{2}} \cos(\omega\tau)$$

Impondo que G é contínua em $\tau=0 \Rightarrow G(0)=0 \Rightarrow$

$$G(\tau) = c_1 \, e^{-\gamma\tau/2} \, \mathrm{sen}(\omega\tau)$$

Agora

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\tau \left[\frac{d^2G}{d\tau^2} + \gamma \frac{dG}{d\tau} + \omega_0^2 G \right] = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\tau \; \delta(\tau) = 1$$

$$\left.\frac{dG}{d\tau}\right|_{+\varepsilon} - \left.\frac{dG}{d\tau}\right|_{\varepsilon} + \gamma \left\{ G(\varepsilon) - G(-\varepsilon) \right\} + \omega_0^2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\tau \, G(\tau) = 1$$

Para $\varepsilon \to 0$ e como G é contínua em $0 \Longrightarrow$

$$\left.\frac{dG}{d\tau}\right|_{0+} - \left.\frac{dG}{d\tau}\right|_{0-} = 1$$

No caso, $\left.\frac{dG}{d\tau}\right|_{0-} = 0 \Longrightarrow$

$$\left. c_1 \, e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \, \omega \cos(\omega\tau) \right|_0 - \gamma c_1 \left. \overset{0}{\cancel{e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \mathrm{sen}(\omega\tau)}} \right|_0 = 1$$

$$c_1 \omega = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\omega}$$

Logo,

$$G(\tau) = G(t-t') = \begin{cases} 0 & t < t' \\ e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \dfrac{\mathrm{sen}(\omega(t-t'))}{\omega} & t > t' \end{cases}$$

7.4 Caso Geral

Consideremos um sistema com n graus de liberdade $q_1 \dots q_n$ cuja lagrangiana é da forma

$$L = \frac{1}{2} M_{kl}\, \dot{q}_k \dot{q}_l - V(q_1 \dots q_n)$$

índices duplicados $\Rightarrow \sum_{kl}$

Note que $M_{kl} = M_{lk}$, i.e., matriz simétrica e que

$$T = \frac{1}{2} M_{kl}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_l > 0$$

A configuração de equilíbrio satisfaz

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{q_0} = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

Novamente definimos $q_k = q_0 + \eta_k$

e expandimos L preservando até termos quadráticos em η

$$V(q_k) = \underset{\text{0 (não altera nada)}}{V(q_0)} + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_j}\right|_{q_0} \eta_k \eta_j$$

Definimos $V_{kj} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_j}\right|_{q_0}$

Para um ponto de equilíbrio estável $V_{kj}\,\eta_k\,\eta_j > 0 \quad \forall \eta \neq 0$

Logo temos até ordem η^2

$$L = \frac{1}{2} M_{kj}(q_0)\,\dot\eta_k\,\dot\eta_j - V_{kj}\,\eta_k\,\eta_j = \frac{1}{2} T_{kj}\,\dot\eta_k\,\dot\eta_j - \frac{V_{kj}}{2}\,\eta_k\,\eta_j$$

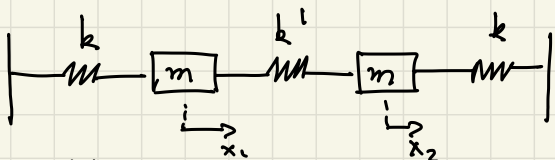
Definimos $M_{kj}(q_0) = T_{kj}$

As eq's de movimento são

$$\boxed{T_{kj}\,\ddot\eta_j = -V_{kj}\,\eta_j} \qquad k = 1, \dots, n$$

Este é um sistema de osciladores acoplados.

Exemplo:



A partir do equilíbrio:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot x_2^2\right) - \left\{ \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k' (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1-x_2) & (1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2-x_1) & (2) \end{cases}$$

Solução por inspeção:

$$(1)+(2) \Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) = -k(x_1+x_2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}(x_2-x_1) = -(k+2k')(x_2-x_1)$$

Definindo $q_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $q_2 = \frac{x_2-x_1}{2}$

6/6/23

as eq's desacoplam

$$m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -kq_1$$

$$m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -(k+2k')q_2$$

Definindo $\omega_0^2 = k/m$ e $\omega_s^2 = k'/m$ a solução geral é

$$q_1(t) = A_1\cos(\omega_0^2 t + \varphi_1)$$

$$q_2(t) = A_2\cos(\sqrt{\omega_0^2+2\omega_s^2}\, t + \varphi_2)$$

Como esperado, a solução depende de 4 constantes. Interpretemos essas soluções.