5.5 Equações de Hamilton

16/5/23

No formalismo Lagrangiano, L depende de q_k e $\dot{q}_k$ $(k=1...n)$.
A equação de Euler-Lagrange fornece n EDO's de 2ª ordem nas variáveis $q_1(t) ... q_n(t)$. O movimento é representado no espaço de configuração.

Idéia: passamos a ter que resolver um sistema de $2n$ variáveis de EDO's de primeira ordem.

Sabemos que $L(q_k, \dot{q}_k) \Rightarrow$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Utilizando os p_k escrevemos e as eq.'s de movimento:

$$dL = \dot{p}_k \, dq_k + p_k \, d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Mas,

$$d(p_k \dot{q}_k) = \dot{q}_k \, dp_k + p_k \, d\dot{q}_k \quad \text{, então}$$

$$dL = \dot{p}_k \, dq_k + d(p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_k \, dp_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow d\left(p_k \dot{q}_k - L \right) = \dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Lembre-se que a energia do sistema é dada por

$$p_k \dot{q}_k - L \quad !$$

Definimos a Hamiltoniana do sistema como

$$H = p_k \dot{q}_k - L$$

Note que $dH = \dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt$ ✓

Logo, sabemos que

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Note que para eliminar $\dot{q}_k$ em favor de p_k em H precisamos que o Hessiano

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j}$$

deve ser não singular, isto é, $\det(W_{ij}) \neq 0$.

Chamamos o par (q_k, p_k) de variáveis canônicas, sendo o espaço cartesiano $2n$ dimensional definido por $(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$ é denominado <u>espaço de fase</u>

<u>Exemplos</u>:

1) <u>Partícula livre</u>: $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 \Rightarrow \vec{p} = m\dot{\vec{x}} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{m}$

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L = \vec{p}\cdot\frac{\vec{p}}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{p}}{m}\right)^2 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

Obter as eq's de Hamilton.

2) <u>Partícula num campo eletromagnético</u> $L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi$

$$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \vec{p}\cdot\frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) - \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{q}{c}\frac{\vec{A}}{m}\cdot\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) + q\phi$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\Phi$$

$\boxed{\text{Obter as eq's de Hamilton usando } \nabla\cdot[\vec{G}\cdot\vec{G}] = 2(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{G} + 2\vec{G}\wedge(\nabla\wedge\vec{G})}$

Note: partindo da energia da partícula num campo elétrico

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + q\phi$$ para introduzir um campo magnético

basta fazer $\vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ (que é chamado substituição mínima)

3) Para uma partícula num campo central:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

$$\Rightarrow \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi} \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

Logo, $H = \dot{q}_k p_k - L$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) + V(\theta)$$

Obter as eq's de Hamilton.

Note que: Se $L = T - V(q_k)$ onde T é uma função quadrática de $\dot{q}_k$, então

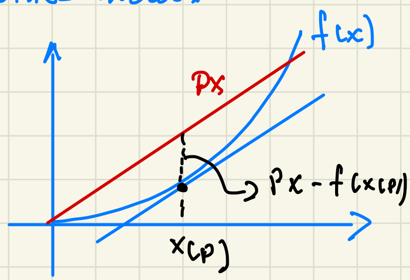
$$\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \qquad \text{(prove isso no caso geral!)}$$

então, $\quad H = \dot{q}_k \cdot p_k - L = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - (T-V) = T+V !!!$

5.6 Transformada de Legendre (Arnold 14)

Seja $f(x) = y$ uma função convexa $(f''(x) > 0)$

A transformada de Legendre de f é uma função g da variável p construída do seguinte modo:



i) Dado p considere a reta px

ii) Encontre o ponto $x(p)$ que é o ponto de f mais distante desta reta, i.e

$$F(p,x) = px - f(x) \text{ é máximo} \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x(p)} = 0 \Rightarrow f'(x) = p$$

iii) $g(p) = F(p, x(p))$

Como $f(x)$ é convexa o ponto $x(p)$ é único!

Exemplos: $f(x) = x^2 \Rightarrow x(p) = \frac{p}{2} \Rightarrow g(p) = p \cdot \frac{p}{2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$

$$f(x) = \frac{mx^2}{2} \Rightarrow m\,x(p) = p \Rightarrow x(p) = \frac{p}{m} \Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2m}$$

Teorema: a transformada de Legendre é involutiva, isto é, seu quadrado é igual a uma transformação idêntica!

Exercício: prove este teorema!

No caso da Mecânica temos que

$$H(q_k, p_k) = p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)$$

Onde $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ exatamente como na transformada de Legendre!

5.7 Coordenadas cíclicas

Anteriormente, vimos que uma coordenada cíclica, i.e., $\dfrac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, leva a uma lei de conservação. Isso é evidente no formalismo Hamiltoniano pois

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{\text{cíclica}} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k} \Longrightarrow \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{\text{eq's de Hamilton}} = 0 \Longrightarrow p_k \text{ é conservado!}$$