5.3 Sistemas não holonômicos

11/5/23

Em sistemas com vínculos não holonômicos é impossível introduzir coordenadas generalizadas que os elimine! O que fazer? Consideremos a classe de vínculos não holonômicos da forma

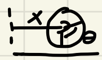
$$\sum_{k=1}^{\overset{\text{número de graus de liberdade}}{n}} a_{lk}\, dq_k + a_{lt}\, dt = 0 \qquad \underbrace{l = 1 \dots p}_{\text{vínculos}}$$

onde a_{lk} dependem apenas de $q_1 \dots q_n\ t$. Note que podemos escrever os vínculos como

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \dot{q}_k + a_{lt} = 0$$

Exemplo cilindro rolando sem escorregar

$$\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$$



Ou seja os vínculos são lineares nas velocidades.

Se tratamos $L = T - U$ como se não existissem vínculos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right] \delta q_k = 0$$

Mas os δq_k não são independentes! Note que na variação de S usamos $q_k(t) + \delta q_k(t) \approx q_k(t)$ logo os p vínculos implicam que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \delta q_k = 0$$

! Logo precisamos trabalhar mais em δS!

Multiplicadores de Lagrange: Da última equação segue que

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\,\delta q_k\right)}_{=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell a_{\ell k}\right)\delta q_k = 0$$

que vale para qualquer escolha de $\lambda_1 \ldots \lambda_p$! Somamos isso a δS!

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell a_{\ell k} \right\} \delta q_k = 0$$

Mas os δq_k ainda não são independentes!

Agora organizamos:

i) $k = 1, \ldots, n-p \Longrightarrow$ δq_k são independentes.

ii) Para o restante dos δq_k escolhemos λ_ℓ

tal que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell a_{\ell k} = 0$$

i.e, os coeficientes destes δq_k são nulos!

Agora, para $k = 1, \ldots n-p$ os δq_k são independentes

logo

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \underbrace{\lambda_\ell a_{\ell k}}_{\text{'soma'}} = 0$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda_\ell a_{\ell k} \quad (*) \quad k = 1 \ldots n$$

Agora temos $n+p$ incógnitas (q_k, λ_ℓ)! As p eq's faltando são os vínculos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} \dot{q}_k + a_{\ell t} = 0 \qquad \ell = 1, \ldots, p$$

Exemplo: Corpo livre no plano xy. O vínculo é

$$\dot{x} - \alpha y = 0 \qquad \alpha = \text{constante}$$

Escolhendo $q_2 = x$ $\quad q_1 = y \Rightarrow a_{12} = 1 \quad a_{11} = 0 \quad a_{1t} = -\alpha y$

No caso $\quad L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 a_{12} = \lambda_1 \\ m\ddot{y} = \lambda_1 a_{11} = 0 \end{cases}$$

e o vínculo $\quad \dot{x} = \alpha y$

$$\Rightarrow y = y_0 + v_0 t \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha y_0 + \alpha v_0 t$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \alpha y_0 t + \frac{\alpha v_0}{2} t^2 \Rightarrow \lambda_1 = m\ddot{x} = \alpha v_0 m$$

Vínculos holonômicos são da forma

$$f_\ell(q,t) = 0 \qquad \ell = 1, \ldots, P$$

Sua derivada total no tempo é

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f_\ell}{\partial t} = 0.$$

Logo, estes vínculos podem ser incorporados ao tratamento acima identificando

$$a_{\ell k} = \frac{\partial f_\ell}{\partial q_k} \qquad a_{\ell t} = \frac{\partial f_\ell}{\partial t}$$

Com isso, podemos usar os multiplicadores de Lagrange!

Note que $\frac{\partial a_{\ell k}}{\partial q_j} = \frac{\partial a_{\ell j}}{\partial q_k} = \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j \partial q_k}$! Faça p/ cilindro rolando $\dot{x} = R\dot{\theta}$ que é trivial!

Forças Associadas aos vínculos: Troquemos os vínculos por forças (Q_k) que garantam o mesmo movimento do sistema, i.e,

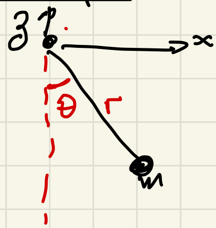
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

Como o movimento é o mesmo nos dois casos

$$Q_k = \sum_\ell \lambda_\ell a_{\ell k}!$$

+ incluir t como a variável $q_{n+1} = t$.

Exemplo: Pêndulo plano de novo!



$$U = mgz = -mg\,r\cos\theta$$

$$T = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right)$$

vínculo $\left.r^2 = L^2\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = 2r \\ a_{12} = 0 \end{array}$

$q_1 = r$ $\qquad$ $q_2 = \theta$

$k=1$ $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = a_{11}\lambda_1 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = 2r\lambda_1$

$k=2$ $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}r + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$

$r^2 = L^2$

Das 2 últimas equações: $\quad mL^2\ddot{\theta} = -mgL\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\qquad$ resolvo

Da primeira equação: $Q_1 = \lambda_1 a_{11} = -mL\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$

5.4 Momento Canonicamente Conjugado

Dada uma coordenada generalizada q_k definimos o momento canonicamente conjugado a ela por

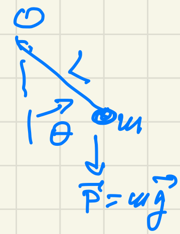
$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Exemplos: 1) Partícula livre $\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{q}_k^2 \Rightarrow p_k = m\dot{q}_k$

coord. cart.

$\Rightarrow$ coincide c/ a definição dada anteriormente para momento linear

2) Pêndulo plano: $L = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta$



$p_\theta = mL^2\dot{\theta} \Rightarrow$ momento angular em torno do ponto O

3) Partícula num campo magnético: $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$

$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} \boxed{+ \frac{q}{c}\vec{A}}$ Note o termo extra!