Para $L = m_k \frac{\dot{q}_k^2}{2} - U$

A quantidade conservada é $\frac{m_k \dot{q}_k^2}{2} + U$! A energia!

3) <u>Rotações</u>: Consideremos uma partícula com coordenadas cartesianas x^k $(k=1,2,3)$. Sob uma rotação $x^k \to x'^k$ tal que $x^k x^k = x'^k x'^k$. (1)

Considerando as transformações contínuas, sua forma (*) infinitesimal é $x^k \to x'^k = (\delta^k_j + \Delta\omega^{kj}) x^j$ (2)

onde $\Delta\omega^{kj}$ é infinitesimal. Substituindo (2) em (1)

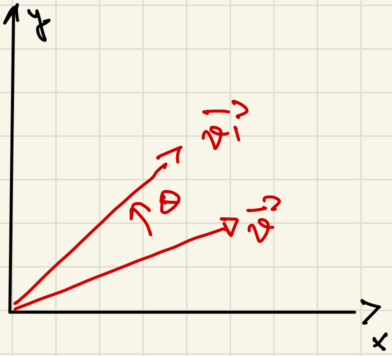
$$x^k x^k = (x^k + \Delta\omega^{kj} x^j)(x^k + \Delta\omega^{kl} x^l)$$
$$= x^k x^k + 2\,\Delta\omega^{kl} x^k x^l + \text{ordem superior } (\Delta\omega)^2$$

$\Rightarrow \Delta\omega^{kl} x^k x^l = 0$ como $x^k x^l$ é simétrico em troca $k \leftrightarrow l \Rightarrow \Delta\omega^{kl}$ é anti-simétrico $\Delta\omega^{kl} = -\Delta\omega^{lk}$

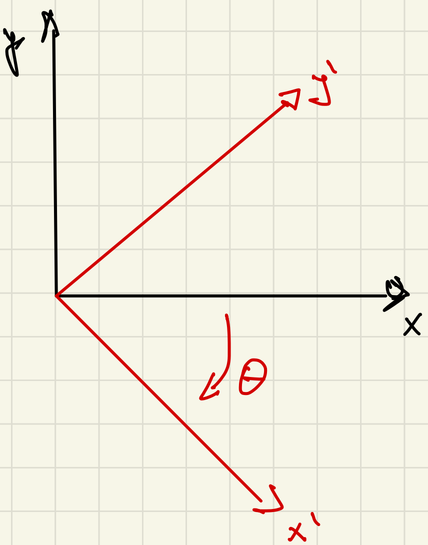
<u>Exemplo</u>: rotação em torno do eixo z

4/5/23

(*) Como o espaço é euclidiano $x^k = x_k$ ... Não vou prestar atenção c/ índices



é equivalente a rodar os eixos de $-\theta$



$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \overset{\theta\ll 1}{\Longrightarrow} \begin{aligned} x' &= x - \theta y \\ y' &= \theta x + y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \Delta\omega^{kl}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como esperado!

Podemos escrever esta transformação como

$$\Delta\omega^{kl} = -\varepsilon^{3kl}\,\theta$$

[Definir ε^{ijk}] ← Levi-Civita.

Mostre que uma rotação infinitesimal em torno do eixo $i = 1, 2, 3$ (x, y, z) possui

$\oplus\ \vec{a}\wedge\vec{b}, \ldots$

$$\Delta\omega^{kl} = -\varepsilon^{ikl}\,\theta_i.$$

, ou seja,

rotação em torno do eixo x: $\Delta\omega^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 0 \end{pmatrix}$

rotação em torno do eixo y: $\Delta\omega^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\theta_y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Note que $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{e}_3\wedge\vec{r}\,\theta$ em uma transformação infinitesimal!

No caso de rotações ao redor do eixo z

$$\delta x^i = x'^i - x^i = -\epsilon^{3il} x^l \theta$$

Para uma partícula movendo-se no campo central $U(r)$ sua Lagrangiana é invariante por rotações pois $\vec{v}^2$ e r o são:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U(r)$$

Mais, por rotação $L = L' \Rightarrow \Lambda = 0$. Logo, a quantidade conservada é

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(-\epsilon^{3il} x^l \theta\right) = -m\,\epsilon^{3il}\,\dot{x}^i x^l \theta$$

$$= \theta\left[m\,\epsilon^{3li}\,x^l \dot{x}^i\right] = \theta\, m\, \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}\Big|_z = \theta L_z\,!!!$$

No caso de uma rotação geral definida por $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ temos que a quantidade conservada é

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(-\epsilon^{jil} x^l \theta_j\right) = m\,\epsilon^{jli} x^l \dot{x}^i \theta^j$$

$$= L_j \theta^j$$

Logo existem 3 quantidades conservadas que são as componentes do momento angular.

Para rotações infinitesimais em torno do eixo z [para simplificar vou fazer no plano => matriz 2×2]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\mathbb{1} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rodando de um ângulo finito $\varphi = N\theta$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\mathbb{1} + \frac{\varphi}{N}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underset{N\to\infty}{=} \exp\left[\varphi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^j}{j!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Separo j pares/ímpares

$$= \left\{\sum_{j\,\text{par}} \frac{\varphi^j}{j!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j + \sum_{j\,\text{ímpar}} \frac{\varphi^j}{j!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\mathbb{1} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \mathbb{1} \; \ldots$$

$$= \left\{\mathbb{1} - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left\{\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}\ldots\right\}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \cos\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \operatorname{sen}\varphi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\, x - \operatorname{sen}\varphi\, y \\ \cos y + \operatorname{sen}\varphi\, x \end{pmatrix}$$

Oh! 😊