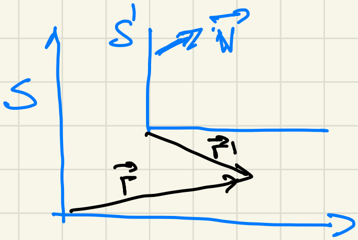
3.7 Janela para o futuro: Lagrangiana a partir de simetria

25/4/23

Na física atual simetrias são usadas para restringir as possíveis formas que a Lagrangiana de um sistema pode ter. Vejamos um exemplo. Na Mecânica sabemos que a física deve ser a mesma em referenciais inerciais com uma velocidade relativa $\vec{V}$ entre eles.



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t \quad e \quad t = t'$$

Consideremos uma partícula livre em dois referenciais inerciais S e S' onde sua velocidade relativa é infinitesimal $\vec{V} = \vec{\varepsilon}$.

Da isotropia e homogeneidade do espaço sabemos que L é função apenas de $\vec{v}^2 = v^2$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula com respeito a S. No referencial S' a Lagrangiana L' deve diferir do L apenas por uma derivada total. (Justifique)

$$L' = L(v'^2) = L\left((\vec{v}-\vec{\epsilon})^2\right) = L(\vec{v}^2 - 2\vec{\epsilon}\cdot\vec{v})$$

$\uparrow \vec{\epsilon}$ infinitesimal

Usando Taylor

$$L' = L - \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{\epsilon}\cdot\vec{v}$$

O segundo termo deve ser uma derivada total com respeito ao tempo. Para isso $L(v^2)$ deve ser linear em v^2, i.e, $-\frac{d}{dt}(2\vec{\epsilon}\cdot\vec{r})$. Qualquer outro termo em v^2 traria termos $\dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}$! $\Rightarrow L = \underset{\text{cte}}{a}\, v^2$

Para uma velocidade finita $\vec{V}$ de S' com respeito a S

$$L' = a\, v'^2 = a(\vec{v}+\vec{V})^2 = a\,\vec{v}^2 + a\,2\,\vec{v}\cdot\vec{V} + \vec{V}^2 a$$

$$= L + \frac{d}{dt}\left[2a\,\vec{V}\cdot\vec{r} + a\,\vec{V}^2 t\right] \qquad \checkmark \text{ OK}$$

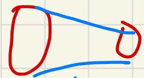
Sabemos que $a = m/2$, obviamente!

4. Cálculo Variacional

Vários problemas motivaram a sua criação:

1) Problema de Dido: qual a maior área de uma superfície cujo perímetro é fixo.

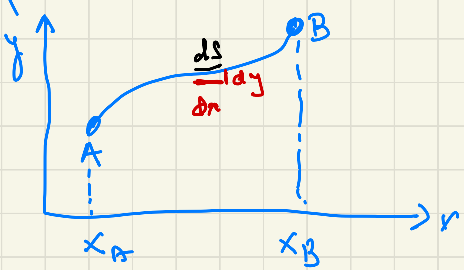
2) Problema de Plateau: qual a superfície de menor área dadas as curvas de sua borda.



3) Catenária: dada uma corrente massiva de tamanho L, qual a sua forma para minimizar a energia potencial?

4) Qual a distância mínima entre 2 pontos?

Expressemos matematicamente 4:



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

O comprimento da curva entre A e B é

$$L[y] = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

O desejado é $y(x)$ para que L seja mínimo!

4.1 Funcionais

Consideremos uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

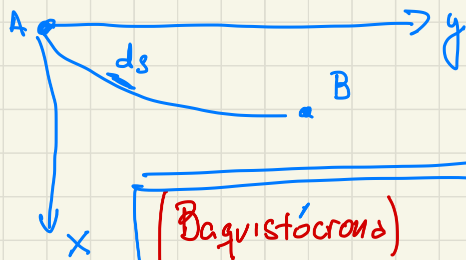
Um funcional $J[f]$ é uma função

$$J: C^{\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow J[f]$$

espaço das funções suaves sobre $\mathbb{R}$

Exemplos: 1) $L[y]$ acima

2) Qual a curva que um escorregador sem atrito com as posições inicial e final fixas para que o tempo de percorrê-la seja mínimo, assumindo conservação de energia.



$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

$$\Rightarrow T[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} dx \, \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{x}}$$

(Braquistócrona)

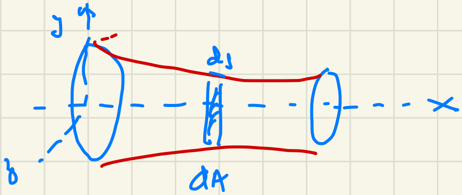
Galileo 1638

Bernoulli (1696)

desafio resolvido por Newton e Leibniz

3) Problema de Plateau: 2 anéis concêntricos.

(bolha de sabão!)



com simetria cilíndrica: $dA = 2\pi y \, ds$

$$= 2\pi \, y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

$$\therefore \; J[y] = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} dx \; y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

4.2 Derivada Funcional

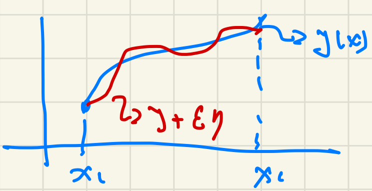
Consideremos funcionais da forma

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \;\; f(x, \underbrace{y, y', \dots y^{(n)}}_{\text{derivadas.}})$$

x_1 x_2 fixos

façamos variações $y(x) \rightarrow y(x) + \underbrace{\varepsilon}_{\text{infinitesimal}} \eta(x)$

Para o caso $n=1$: $y(x_1)$ e $y(x_2)$ fixos $\Rightarrow \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$



$$J[y+\epsilon\eta]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}dx\left\{f(x,y+\epsilon\eta,y'+\epsilon\eta')-f(x,y,y')\right\}$$

Taylor

$$=\int_{x_1}^{x_2}dx\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\epsilon\eta+\frac{\partial f}{\partial y'}\epsilon\frac{d\eta}{dx}\right\}$$

Integração por parte 2º termo

$$=\int_{x_1}^{x_2}dx\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\epsilon\eta-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\epsilon\eta+\epsilon\frac{d}{dx}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}$$

O último termo anula-se: $\int_{x_1}^{x_2}dx\,\epsilon\frac{d}{dx}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\epsilon\,\underset{0}{\eta}\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_2}-\epsilon\,\underset{0}{\eta}\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_1}$

Logo, $J[y+\epsilon\eta]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}dx\,\epsilon\eta\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}$

Definimos a derivada funcional

$$\boxed{\frac{\delta J}{\delta y(x)}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}$$

Exercício: Para o caso de J depender de $y^{(n)}$ faça $y\to y+\epsilon\eta$ c/ $\eta(x_1)=\eta(x_2)=\dots=\eta^{(n-1)}(x_1)=\eta^{(n-1)}(x_2)=0$

$$J[y+\varepsilon\eta] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; \varepsilon\eta \frac{\delta J}{\partial y(x)}$$

onde $$\frac{\delta J}{\delta y(n)} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)$$

1.3 Equação de Euler-Lagrange

Máximos, mínimos ou pontos estacionários de um funcional $J[y]$ satisfazem

$$J[y+\varepsilon\eta] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; \varepsilon\eta \frac{\delta J}{\delta y(x)} = 0$$

qualquer que seja η. Logo,

$\frac{\delta J}{\partial y(x)} = 0$ que para $f(x,y,y')$ se escreve

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

que é a eq. de Euler-Lagrange.

Exemplos. 1) Distância mínima entre 2 pontos no plano

Neste caso $f = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy/dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right)$$

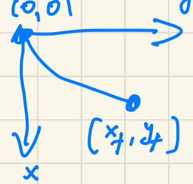
$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = c^{te} = m \quad \text{com} \quad m^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{m^2}{1-m^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \Rightarrow y(x) = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}}_{a = c^{te}} x + \overset{c^{te}}{b}$$

Oh!

2) Braquistócrona $\quad T[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gx}}$



E.L. $\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{2gx}}\right) = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\right)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{2gx(1+y'^2)}}\right) \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = c^{te} \equiv \frac{1}{\sqrt{2a}} \Rightarrow$$

$$2a\,y'^2 = x(1+y'^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

$$\Rightarrow y = \int dx \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \int dx \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

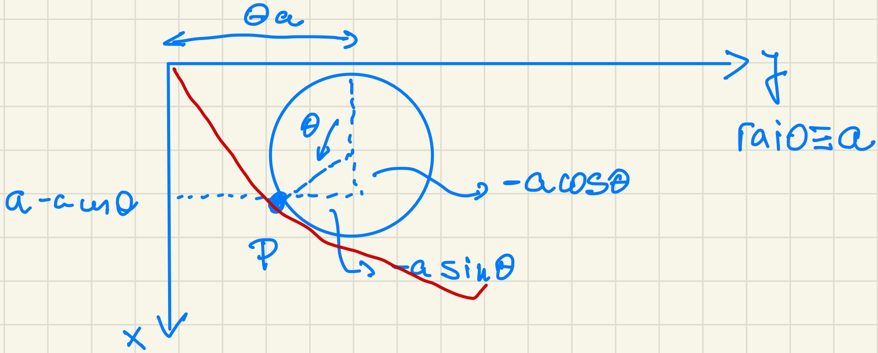
Agora $x = a(1-\cos\theta)^{(1)} \Rightarrow y = \int d\theta\, a(1-\cos\theta) = a(\theta - \sin\theta) + C$

Assumindo que o ponto de partida é $y(0)=0$

$$\Rightarrow y = a(\theta - \sin\theta) \quad (2)$$

a é determinado impondo que $y(x_f) = y_f$

(1) e (2) são as equações paramétricas de uma ciclóide



Para um número maior de funções incógnitas $y_1 \dots y_N$:

$$J[y_k] = \int_{x_A}^{x_B} dx\, f(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, y_N, y_N')$$

com $y_j(x_A)$ e $y_j(x_B)$ fixos $j = 1 \dots N$.

Fazemos variações $y_j \to y_j + \epsilon \eta_j$ com

$$\eta_j(x_A) = \eta_j(x_B) = 0$$

$$J[y_k + \epsilon \eta_k] - J[y_k] = \int_{x_A}^{x_B} dx \left\{ f(x, y_1, \dots y_N') - f(x, y_1 + \epsilon\eta_1, \dots y_N' + \epsilon\eta_N') \right\}$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \int_{x_A}^{x_B} dx \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_k} \epsilon \eta_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_k'} \epsilon \eta_k' \right] + O(\epsilon^2)$$

$$\underset{\text{Parts}}{=} \int_{x_A}^{x_B} dx \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} \right) \right\} \epsilon \eta_k$$

Requerendo que J seja estacionário para qualquer η_k

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} \right)} \qquad k = 1, \dots N$$

4.4 Bônus: Equação da geodésica

<u>Prólogo</u>: considere um sistema de coordenadas (q_1, q_2, q_3) tais que $\vec{x} = \vec{x}(q_1, q_2, q_3)$

E.g., coordenadas esféricas

$$\vec{x} = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)\,r$$

Os vetores na nova base <u>não normalizados</u> da nova base são

$$\vec{e}_k = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_k} \qquad k = 1, 2, 3$$

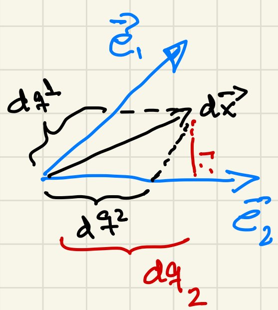
E.g. coordenadas esféricas: (r, θ, φ)

$$\vec{e}_3 = r\operatorname{sen}\theta\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) = r\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\varphi$$

analogamente $\vec{e}_2 = r\,\vec{e}_\theta$

$\vec{e}_1 = \vec{e}_r$

normalizados tradicionais



Um deslocamento infinitesimal é

$$d\vec{x} = \sum_k \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_q}\,dq^k = \vec{e}_k\,dq^k$$

índices repetidos $\equiv \sum_k$

e o elemento de distância é

$$ds^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = \sum_i \vec{e}_i\,dq^i \cdot \sum_j \vec{e}_j\,dq^j = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\,dq^i dq^j$$

Definimos a métrica como a matriz simétrica

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ji}$$

E.g: Coordenadas cartesianas $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Coordenadas esféricas: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$

Definimos $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ tal que

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k .$$

<u>Nota importante:</u> Até aqui trabalhamos num espaço Riemanniano ($\mathbb{R}^3$), ou seja, o produto escalar é tal que

$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$, que significa $g_{ii} > 0$ ← sem soma!

É possível manter o formalismo mas sem o requerimento que $g_{ii} > 0$. Este é o caso de espaço semi-Riemanniano!!

A métrica em relatividade especial é assim por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

Geodésica: Minimizemos ds^2 no lugar de ds:

$$\int ds^2 = \int dt \; g_{ij} \, \dot{x}^i(t) \, \dot{x}^j(t)$$

onde a curva é dada por $x^i(t)$ e permitimos que $g_{ij} = g_{ij}(x)$! Note que para coordenadas esféricas esse é o caso. Logo,

$$f = g_{ij} \, \dot{x}^i(t) \, \dot{x}^j(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \, \dot{x}^i(t) \, \dot{x}^j(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k} = g_{ij} \, \delta^i_k \, \dot{x}^j + g_{ij} \, \dot{x}^i \delta^j_k = g_{kj} \, \dot{x}^j + \underbrace{g_{ik} \, \dot{x}^i}_{\sim}$$

$$= 2 g_{kj} \, \dot{x}^j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k}\right) = 2\left(\frac{d g_{kj}}{dt} \dot{x}^j + g_{kj} \, \ddot{x}^j\right)$$

$$= 2\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^l + g_{kj} \, \ddot{x}^j\right)$$

Logo, a eq. de EL é

$$g_{kj} \, \ddot{x}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Reescrevamos o 2º termo:

$$\dot{x}^j \dot{x}^l \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^l + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^l \right)$$

$l \leftrightarrow j$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^l + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \dot{x}^l \dot{x}^j \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^l \dot{x}^j$$

$l \to i$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$\Rightarrow \quad g_{kj} \ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Agora $\times\, g^{lk}$

$$\boxed{\ddot{x}^l + \frac{1}{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0}$$

Definimos o <u>símbolo de Christofell</u>

$$\Gamma^l_{ij} \equiv \frac{1}{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

e a equação da geodésica é escrita como

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Exemplo: Plano com coordenadas polares

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$$

$$\Rightarrow \quad g_{rr} = 1 \qquad g_{\theta\theta} = r^2 \qquad g_{r\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad g^{rr} = 1 \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \qquad g^{r\theta} = 0$$

Os simbolos de Christoffel envolvem derivadas com respeito a r e θ logo o único termo que sobrevive é

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r$$

Por inspeção os termos não nulos são

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} g^{rl} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^l} \overset{l=r}{=} -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = -r$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta l} \left[\frac{\partial g_{k\theta}}{\partial r} \right] = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

As eq.s da geodésica são

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} = 0$$

5. Princípio de Hamilton

A eq. de Euler-Lagrange no cálculo variacional é a mesma que da Mecânica quando identificamos

$x \to t$; $y_k(x) \to q_k(t)$; $f(x, y_k, y_k') \to L(t, q_k, \dot{q}_k)$

e chamamos $L[y]$ de $S[q]$ a ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(t, q_k, \dot{q}_k)$$

com $q_k(t_1)$ e $q_k(t_2)$ fixos!! Logo requerendo que a ação seja estacionária obtemos as eq's de movimento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

onde usamos que $q_k \to q_k + \epsilon \delta q_k$ e $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$

5.1 Princípio de Hamilton: Dado um sistema mecânico holonômico descrito pela Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, a o movimento do sistema entre os tempos t_1 e t_2 é tal que a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

é mínima (estacionária) para posições iniciais e finais fixas. Também chamado princípio da mínima ação!

Dada a sua importância, repitamos a prova: Seja $\bar{q}$ a solução da eq. do movimento. Então,

$$\delta S = L[\bar{q}_k + \epsilon \delta q_k] - L[\bar{q}] = 0$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left.\frac{\partial L}{\partial q_k}\right|_{\bar{q}_k} \epsilon \delta q_k + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right|_{\bar{q}} \epsilon \frac{d}{dt} \delta q_k \right\}$$

$$\overset{\int \text{por partes 2º termo}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left.\frac{\partial L}{\partial q_k}\right|_{\bar{q}} \epsilon \delta q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\Bigg|_{\bar{q}_k} \epsilon \delta q_k \right\} + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right|_{\bar{q}} \delta q_k\right]$$

o último termo é nulo pois $q_k(t_1)$ e $q_k(t_2)$ estão fixos, i.e., $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt\, \epsilon \delta q_k \left[\left.\frac{\partial L}{\partial q_k}\right|_{\bar{q}_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\Bigg|_{\bar{q}_k} \right] = 0$$

$\Rightarrow \bar{q}_k$ satisfaz $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1 \dots N$

OK!

<u>Definição:</u> duas Lagrangianas são ditas equivalentes se elas diferem por uma derivada total no tempo de uma função $f(q,t)$, i.e.,

$$\bar{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

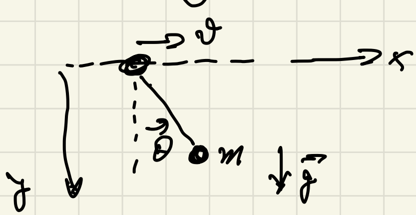
<u>Teorema:</u> Lagrangianas equivalentes levam às mesmas eq's de movimento

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \bar{L}(q,\dot{q},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{df}{dt}$$

$$= S + f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)$$

Como variações estão sujeitas a $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ segue que $\delta S = \delta \bar{S}$!

<u>Exemplo:</u> Considere um pêndulo plano cujo ponto de suspensão move-se horizontalmente c/ velocidade v constante



$\rightarrow \underline{U=0}$

$U = -mgl\cos\theta$

Neste caso

$$T = \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta)^2 \right]$$

e

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta$$

Mas $\dot{x} = v =$ constante oque permite escrever

$$L = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 + mgL\cos\theta + \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2t}{2} + mlv\sin\theta\right)$$

Note que eq. de movimento para θ é a mesma que se o ponto de suspensão estivesse parado! Explique!

Fato interessante: A ação é mínima para alguns casos mas para outros ela é um ponto estacionário (ponto de cela), i.e, $\delta S = 0$ mas não é mínimo nem máximo. Para maiores detalhes veja

C. Grey and E. Taylor, American Journal of Physics 75 (2007) 434