2.3.3 Problema de Kepler

28/03/23

Consideremos o potencial $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$

Vimos que

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr \; L}{r^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}} + \text{constante}$$

Agora $y = \dfrac{1}{r} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{r^2} dr$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dy}{\sqrt{E + \alpha y - \frac{L^2 y^2}{2\mu}}} + c^{te}$$

Simplificando

$$E + \alpha y - \frac{L^2 y^2}{2\mu} = E - \frac{L^2}{2\mu}\left(y^2 - \frac{2\mu}{L^2}\alpha y + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} - \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} \right)$$

$$= E + \frac{\mu\alpha^2}{2L^2} - \frac{L^2}{2\mu}\left(y - \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 = E + \frac{\mu\alpha^2}{2L^2}\left(1 - \frac{L^2}{2\mu\left(E + \mu\alpha^2/2L^2\right)} \left(y - \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 \right)$$

Agora troco novamente as variáveis

$$z = \sqrt{\frac{L^2}{2\mu\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}\right)}}\left(y - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right)$$

$$dz = \sqrt{\phantom{\frac{L^2}{2\mu}}}\; dy$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{L}{\cancel{\sqrt{2\mu}}}\,\frac{1}{\sqrt{\cancel{E+\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{E+\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}}}}{\sqrt{\frac{L^2}{\cancel{2\mu}}}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \text{constante}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} z + \text{constante} = \cos^{-1}\frac{L\left[r - \frac{\mu\alpha}{L}\right]}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^2}}} + C^{te} \quad ✓$$

Podemos escolher a origem de θ para que a constante seja nula. Então, definimos

$$p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta$$

Note que $U_{eff}\big|_{min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} \Rightarrow E > U_{min} \Rightarrow e$ <u>real</u>!

Para $E<0$ $\quad e<1 \Rightarrow$ elipse (r=0 é foco!)

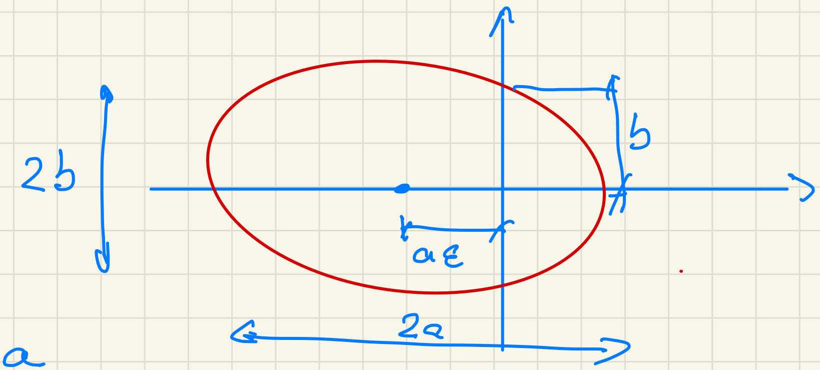
$E=0 \quad e=1 \Rightarrow$ parábola

$E>0 \quad e>1 \Rightarrow$ hiperbole

$e=0 \Rightarrow$ círculo

Concentremos em $e<1$

$$x = \frac{P\cos\theta}{1+e\cos\theta} \qquad y = \frac{P\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+e\cos\theta}$$



$a \equiv$ semi eixo maior: $\frac{1}{2}\left[x(\theta=0) - x(\theta=\pi)\right] = \left(\frac{P}{1+e} + \frac{P}{1-e}\right)\frac{1}{2}$

$$a = \frac{P}{1-e^2}$$

$a(1-e) = r_{min}$ $\qquad r_{max} = a(1+e)$

Máximo em y: $\frac{dy}{d\theta} = 0 \qquad \frac{-P\cos\theta(1+e\cos\theta) - eP\,\mathrm{sen}^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 0$

$\cos\theta = -e$

$$y_{max} = \frac{P\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} \Rightarrow y_{max} = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} = b \text{ semi eixo menor}$$

Elipse em coordenadas polares: (material extra)

$$x = \frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta} \qquad y = \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$x^2+y^2 = \frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2} = (p-ex)^2$$

Completando o quadrado:

$$(1-e^2)x^2 + 2pex + \frac{p^2e^2}{(1-e^2)} - \frac{p^2e^2}{(1-e^2)} + y^2 = p^2$$

$$\underbrace{(1-e^2)x^2 + 2pex + \frac{p^2e^2}{(1-e^2)}}_{\left((1-e^2)^{1/2}x + \frac{pe}{(1-e^2)^{1/2}}\right)^2} + y^2 = \frac{p^2}{1-e^2} \qquad \times\ \frac{1-e^2}{p^2}$$

$$(1-e^2)\left(x + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{p^2}{(1-e^2)}\right)^2}\left(x + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$

$\frac{pe}{1-e^2} \to ae$

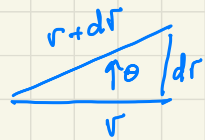
$$\Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\therefore \frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$ centro em $(-ae, 0)$

Para obter o período vejamos a interpretação de L:

$$\frac{L}{\mu} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$



O vetor posição varre a área dA no tempo dt

$$dA = \frac{1}{2}\, r\, r\, d\theta \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} L \ !$$

Como L é constante a área da elipse é varrida no período $T = \dfrac{A}{L/2}$

Mas $A = \pi a b$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{L}\frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{L}\mu\frac{L^4}{\mu^2\alpha^2}\frac{1}{\left(\frac{2L^2|E|}{\mu\alpha^2}\right)^{3/2}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} = 2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$$

Exercício: Analisar $E \geq 0$ (Landau)

Exercício: Analisar $U = -\dfrac{\alpha}{r^2}$ (Landau)

Exercício: Obter eq 3.62 do Goldstein.

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

Seja uma força central $f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$. A eq. de mov. é

$$\dot{\vec{p}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Calculemos

$\vec{L}$ constante

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}\wedge\vec{L}\right) = \dot{\vec{p}}\wedge\vec{L} = \frac{\mu f(r)}{r}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}\right)\right]$$

$$= \mu\frac{f(r)}{r}\left[\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}\right]$$

$$= -\mu f(r) r^2\left[\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\,\dot{r}}{r^2}\right] = -\mu f r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

onde usamos que $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = r\dot{r}$

Isso ainda não tem forma de uma quantidade conservada

Mas para o problema de Kepler $f(r) = -\dfrac{k}{r^2} \Rightarrow$

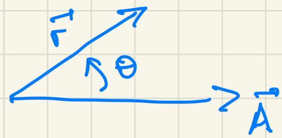
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}\wedge\vec{L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu k\vec{r}}{r}\right)$$

¡ Anteriormente $\underline{\underline{\alpha \equiv k}}$!

Logo o vetor $\vec{A} = \vec{p}\wedge\vec{L} - \dfrac{\mu k\vec{r}}{r}$ é conservado

Propriedades do vetor de Laplace-Runge-Lenz

i) Por construção $\vec{A}\cdot\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{A}$ está no plano de movimento.



ii) $\vec{r}\cdot\vec{A} = r\underbrace{A}_{|\vec{A}|}\cos\theta$

$$= \vec{r}\cdot\left(\vec{p}\wedge\vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$= \vec{r}\cdot(\vec{p}\wedge\vec{L}) - mkr = \vec{L}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{p}) - mkr$$

$$= L^2 - mkr$$

$$\therefore \quad rA\cos\theta = L^2 - mkr$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\theta\right)$$ Eq. da órbita!!

iii) Contagem de constantes.

O sistema tem 7 quantidades conservadas $\vec{L}, \vec{A}, E$ mas somente precisamos especificar 6 condições iniciais $\Rightarrow$ Nem todas as quantidades conservadas são independentes! De fato,

$$\vec{A}\cdot\vec{L} = 0 \quad ; \quad e = \frac{A}{\mu\alpha} = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu k^2}}$$