2.1.2 Força dependente apenas do tempo

23/3/23

Consideremos que F depende apenas do tempo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \Rightarrow m \int_{t_0}^{t} dt' \frac{d^2x}{dt'^2} = \int_{t_0}^{t} F(t')\, dt'$$

$$\Rightarrow \quad m \frac{dx}{dt}(t) - m \frac{dx}{dt}(t_0) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt' \, F(t')}_{\text{impulso!}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} dt' \, F(t')$$

Integrando novamente

$$\int_{t_0}^{t} dt'' \, \frac{dx(t'')}{dt''} = \int_{t_0}^{t} dt'' \, \frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{1}{m} \int_{0}^{t_0} dt'' \int_{0}^{t''} dt' \, F(t')$$

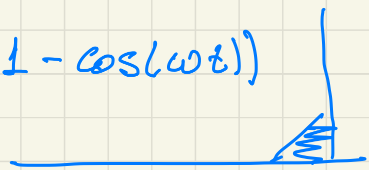
$$\Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + m \frac{dx(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' \, F(t')$$

Exemplo: $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ e partícula parada inicialmente na origem em $t=0$

$$m \frac{dx}{dt} = \int_0^t dt' \, F_0 \cos \omega t' = \frac{F_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad m \, x(t) = \frac{F_0}{\omega} \int_0^t dt' \operatorname{sen}(\omega t') = -\frac{F_0}{\omega^2} \left(\cos(\omega t) - 1\right)$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \left(1 - \cos(\omega t)\right)$$



Exercício: força dependente de v

2.2 Espaços de fase e configuração [conceito novo!]

Considere um sistema descrito pelas coordenadas generalizadas $(q_1 \dots q_N)$. Lembre-se que para sistemas com $\underline{k}$ partículas e sujeito a $\underline{m}$ vínculos $N = 3k - m$ (em três dimensões).

O espaço de configurações é o espaço definido pelas coordenadas generalizadas $(q_1 \dots q_N)$.
Por exemplo, uma partícula em 3D o espaço de configurações é o $\mathbb{R}^3$. Se a partícula estiver presa a uma esfera o espaço é o S^2....

O espaço de fase é aquele definido pelas coordenadas generalizadas e suas derivadas† $(q_1 \dots q_N\ \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N)$.

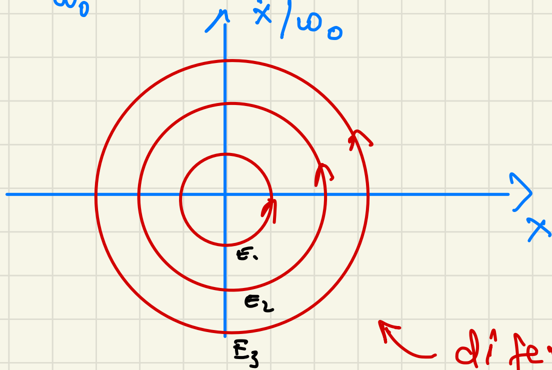
Por exemplo, para um oscilador harmônico.
Uma solução do movimento define uma curva de fase

† Essa definição é um caso particular. No lugar de derivadas deveríamos usar os momentos canonicamente conjugados.

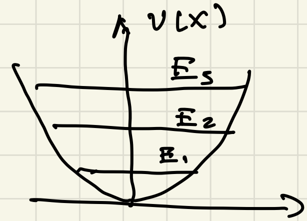
$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$$

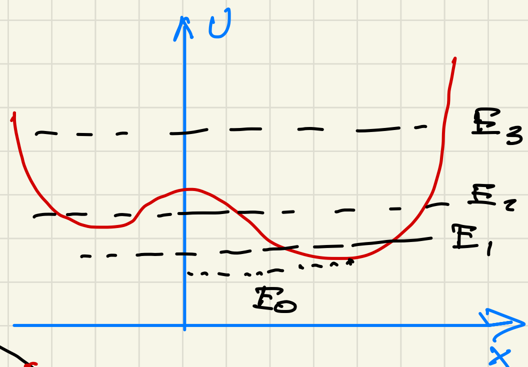
Logo $x^2 + \dfrac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = A^2 \Rightarrow$ define um círculo



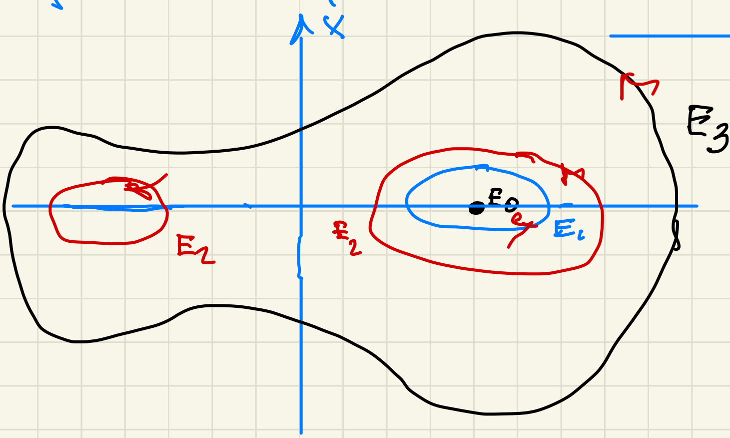
diferentes valores de E



No caso do potencial



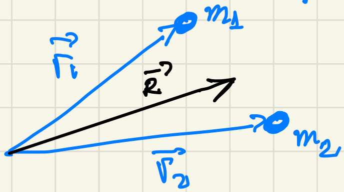
Es que modifica muito o espaço de fase é



$E = U\big|_{mínimo} \Rightarrow$ parado $\Rightarrow$ ponto

2.3 Movimento em 3 dimensões

2.3.1 Duas partículas num campo central



campo central $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

A posição do centro de massa é $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$

É conveniente definir a coordenada relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Vejamos a forma das eq's de movimento em termos de $\vec{r}$ e $\vec{R}$. Sabemos que

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\vec{R}}{dt} = \sum \vec{F}^{externas}$$

Por ora, assumimos que não haja forças externas agindo sobre as partículas.

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\nabla_1 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \qquad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\nabla_2 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \qquad (2)$$

(2) - (1) $\Longrightarrow$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = -\frac{1}{m_2}\nabla_2(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) + \frac{1}{m_1}\nabla_1(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$$

Mas

$$\nabla_2 U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) = \nabla_{\vec{r}_2-\vec{r}_1} U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) = \nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|)$$

$$\|$$

$$-\nabla_{\vec{r}_1-\vec{r}_2} U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) = -\nabla_{\vec{r}_1} U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$$

Logo,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|)$$

Definindo a massa efetiva μ: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|)}$$

Observações: 1) O movimento do centro de massa foi separado do movimento relativo!

2) Sabendo $\vec{R}$ e $\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ $(M = m_1 + m_2)$

$$\left.\begin{aligned} M\vec{R} &= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &M\vec{R} = (m_1+m_2)\vec{r}_1 + m_2\vec{r} \\ &\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \;\text{ e }\; \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1\vec{r}}{M} \end{aligned}$$

2.3.2 Movimento num campo central.

Foquemos no movimento relativo. Uma vez que

$$\nabla_{\vec r}\, U(|\vec r|) = \frac{\partial}{\partial r} U(r)\,\vec e_r + \frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial \theta}}\,\vec e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial \varphi}}\,\vec e_\varphi = \vec e_r \frac{\partial U}{\partial r}$$

coordenadas esféricas

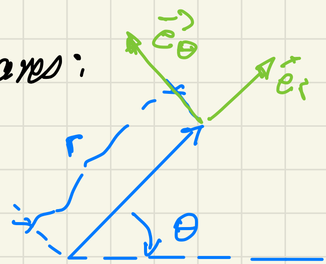
a força entre as partículas é na linha que as une.

Logo, o momento angular é conservado

$$\vec L = \mu\, \vec r \wedge \vec v \Rightarrow \frac{d\vec L}{dt} = \mu\, \dot{\vec r} \wedge \vec v + \mu\, \vec r \wedge \frac{d\vec v}{dt} = -\cancelto{0}{\vec r \wedge \vec e_r}\,\frac{dU}{dr} = 0.$$

Isso implica que $\vec r$ e $\vec v$ estão sempre no mesmo plano.

<u>Exercício</u>: Obtenha as expressões para a velocidade e aceleração em coordenadas polares:



$$\vec r = r\,\vec e_r$$

$$\dot{\vec r} = \frac{dr}{dt}\,\vec e_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\vec e_\theta$$

$$\ddot{\vec r} = \left(\ddot r - \dot\theta^2 r\right)\vec e_r + \left(2\dot r\dot\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec e_\theta$$

Logo temos que: $\vec L = m r\,\vec e_r \wedge \left(\frac{dr}{dt}\,\vec e_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\vec e_\theta\right)$

$(\vec e_r \wedge \vec e_\theta = \vec e_z)$

$$= \mu r^2 \dot\theta\, \vec e_z$$

Como a força é conservativa a energia é conservada

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{\theta}}^2 + U(r) = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$$

coord. polares

Mas $\mu r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{\mu r^2}$ = constante. Logo,

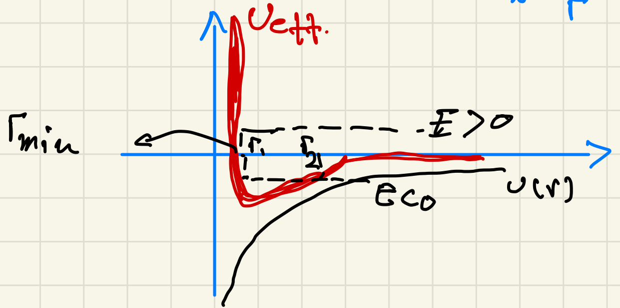
$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \left[U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}\right]$$

Isso é análogo a um problema unidimensional mas com $r \geq 0$ apenas. Definimos o potencial efetivo como

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Podemos analisar os movimentos possíveis da partícula utilizando E como em problemas unidimensionais.

Exemplo: $U(r) = -\frac{G_N mM}{r}$ (potencial gravitacional)



Movimentos possíveis:

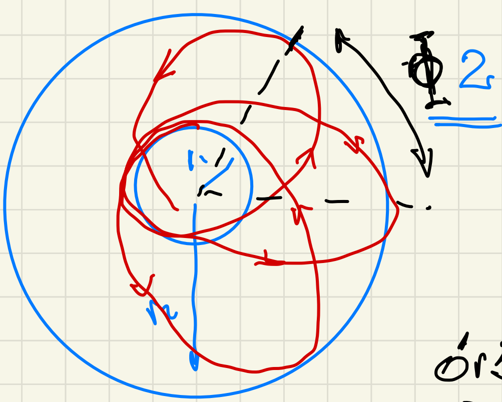
1) Ilimitado para $E>0$. Se a partícula inicialmente tem $\dot{r}<0$ ela se aproxima até r_{min} e volta para o infinito

2) Limitado entre r_1 e r_2 se $E<0$

Mais ainda, é possível calcular o tempo necessário para sair de r_1 e voltar para r_1

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}$$

Note que T é um período somente se a órbita for fechada.



órbita fechada
$\Rightarrow 2\Phi = 0$

Encontremos uma expressão para Φ dado o potencial e (r_1, r_2) $\{\equiv E$ conhecido$\}$. Vimos que

$$dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}}}$$

mas $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow$ $d\theta = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}$

$$\Rightarrow \Phi = \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr \frac{L}{r^2}}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}$$

Órbitas circulares são sempre periódicas qualquer que seja o potencial $U(r)$. Todavia, apenas para $U(r)$ proporcional a $\frac{1}{r}$ e r^2 todas as órbitas limitadas são fechadas. Este é o teorema de Bertrand (1873).