21/3/23

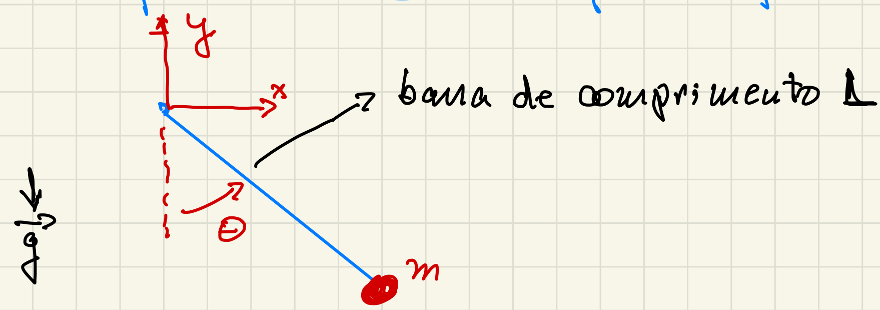
1.5 Vínculos e coordenadas generalizadas

A vida não é sempre resolver apenas

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

pois o sistema pode apresentar vínculos!!

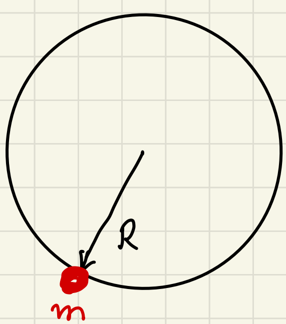
Vínculos são limitações da posição ou velocidade das partículas. Em um pêndulo plano como o da figura



As coordenadas da massa m satisfazem $x^2 + y^2 = L^2$

Este é o vínculo deste sistema.

Outro exemplo é uma partícula sobre uma esfera.



Neste caso o vínculo é

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

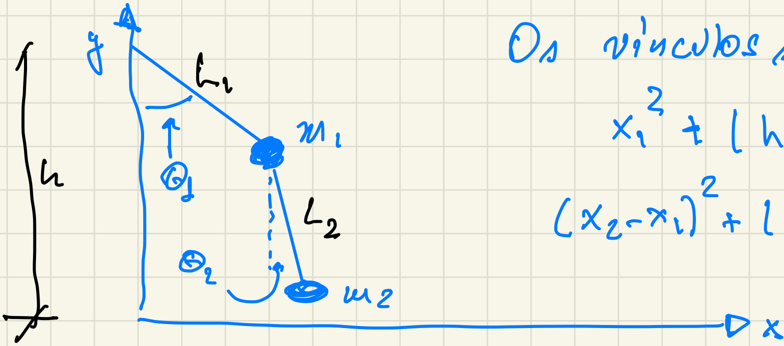
Um corpo rígido é um conjunto de partículas c/ a distância d_{ij} entre elas fixas $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = c_{ij}^2$. (∃ vínculos c/ ângulos)

Vínculos como estes que são apenas função das coordenadas são ditos holonômicos

Note que no caso do pêndulo plano na verdade basta especificar θ p/ determinar a posição do corpo. Então é mais conveniente utilizar θ que (x,y). O ângulo θ é dito ser uma coordenada generalizada. $x = L \operatorname{sen}\theta$ $\quad y = -L\cos\theta$

Consideremos um sistema c/ N partículas e m vínculos holonômicos. Para especificar as posições bastam $3N - m$ coordenadas generalizadas.

Por exemplo para um pêndulo duplo



Os vínculos são

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + (h - y_1)^2 &= L_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= L_2^2 \end{aligned}\right\}$$

vínculos holonômicos

Note que as coordenadas generalizadas θ_1 θ_2 especificam as posições dos 2 corpos

$$x_1 = L_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad y_1 = h - L_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = L_1 \operatorname{sen}\theta_1 + L_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$y_2 = h - L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2$$

O tratamento do problema é mais fácil usando (θ_1, θ_2) em vez de (x_1, y_1, x_2, y_2) + 2 vínculos!

Mais ainda, mesmo na ausência de vínculos pode ser conveniente não usar coordenadas cartesianas. Por exemplo no problema de Kepler devido à simetria é mais conveniente usar coordenadas polares!

Comentário: muitas teorias atuais exibem vínculos, por exemplo, a eletrodinâmica!

2. Integrando as equações de movimento

2.1 Sistemas com um grau de liberdade

2.1.1 Forças conservativas

Para um sistema movendo-se ao longo do eixo x

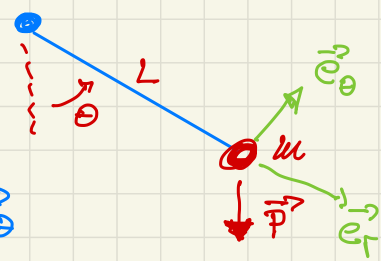
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Na verdade sistemas com um grau de liberdade podem ter equações da forma [não é a forma mais geral ainda]

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = F(q)$$

onde q é a coordenada generalizada.

Para um pêndulo plano



em coordenadas polares

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta$$

provar na lista

$\vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2} = \underbrace{-\frac{mg}{L}\,\text{sen}\,\theta}_{F(q)}$$

$$q \equiv \theta$$

Quando conseguimos "resolver" o vínculo c/ a coordenada generalizada não precisamos lidar c/ a tração da barra!

Partindo novamente de

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad \times \int dt \, \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\int_{t_0}^{t_1} dt \, \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]} = \int_{t_0}^{t_1} dt \, \frac{dx}{dt} F(x) = \int_{x_0}^{x_1} dx \, F(x)$$

Definindo a energia potencial $U(x) = -\int_{x_{ref}}^{x} dx' \, F(x')$ temos

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{t_1} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} = U(x_0) - U(x_1)$$

energia

$$\Rightarrow m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{t_0} + U(x_0) = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x_1) \equiv E$$

[Note $F(x)$ em 1 dimensão é conservativa]

Vemos a conservação de energia

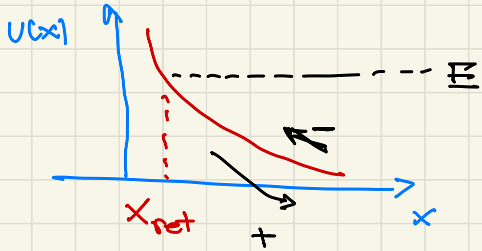
$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \left[\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)\right]^{1/2}$$

se $\frac{dx}{dt} > 0$

cuidado c/ o sinal $\pm$!!

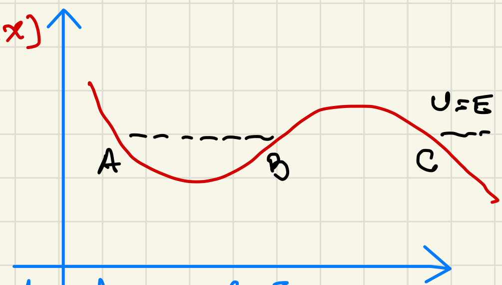
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}} = \int dt \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{constante}$$

Sobre o sinal:



Como T é positiva ou nula, $E \geq 0$. Os pontos de retorno são aqueles para os quais $E = U(x_{ret})$

Para uma partícula num poço de potencial:



Uma partícula pode oscilar entre A e B se $E = U(x_A) = U(x_B)$

Note que podemos obter o período da oscilação

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

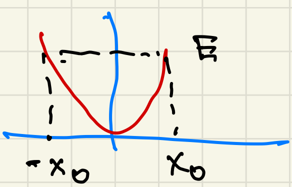
Por que o tempo de $A \to B$ é igual ao de $B \to A$?

Analisar movimentos possíveis

Exemplo: oscilador harmônico $U(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$

e $E = \frac{m\omega_0^2}{2} x_0^2$

(começar pelo canônico)



$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_0}^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2}(x_0^2 - x^2)}} \Rightarrow$$

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0}\int_{-x_0}^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \overset{y = x/x_0}{=} \frac{1}{\omega_0}\int_{-1}^{1} x_0\, dy \frac{1}{\sqrt{x_0^2(1-y^2)}}$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\omega_0}\left[\sin^{-1} y\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$\therefore\ T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ que é o resultado conhecido!

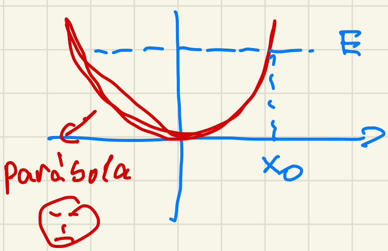
Agora é só praticar fazendo integrais ☺

Observações:

1) Usando que $t = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$ + constante

podemos determinar $x(t)$ sem usar eq's diferenciais.

Por exemplo, se p/ $t=0$ a partícula está parada em $-x_0$ para $U(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$



Na ida de $-x_0 \rightarrow x_0$:

cuidado: variável de integração

$$t = +\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{-x_0}^{x(t)} \frac{dx^*}{\sqrt{\frac{1}{2} m\omega_0^2 (x_0^2 - x^{*2})}}$$

$$t = \frac{1}{\omega_0}\int_{-x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} \overset{y = x'/x_0}{=} \frac{1}{\omega_0}\int_{-1}^{x(t)/x_0} dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) - \underbrace{\sin^{-1}(-1)}_{-\pi/2}\right]$$

$x(t) = x_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -x_0 \cos(\omega_0 t)$ como deveria ser!!

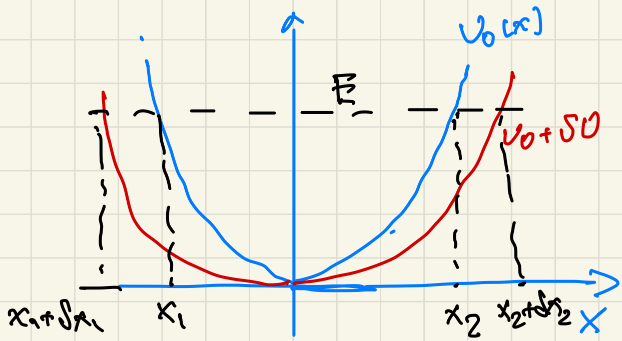
2) Conseguimos soluções analíticas fechadas para poucos potenciais, todavia este método permite obter o período de forma aproximada. Suponha que

$$U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

conheço a expressão analítica do período

$|\delta U(x)| \ll U_0(x)$

é uma pequena perturbação



A variação do período devido a δU é

$$\delta T = \sqrt{2m}\left[\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0(x) - \delta U(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}\right]$$

$$= \sqrt{2m}\; 2\frac{\partial}{\partial E}\left[\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{E - U_0 - \delta U}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U_0(x)}\, dx\right]$$

$$\sqrt{E - U_0 - \delta U} = \sqrt{E - U_0}\,\sqrt{1 - \frac{\delta U}{E - U_0}} \overset{\text{Taylor}}{\simeq} \sqrt{E - U_0}\left(1 - \frac{\delta U}{2(E - U_0)} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \delta T = \sqrt{2m}\, \frac{2\partial}{\partial E}\left[\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} dx\, \sqrt{E - U_0} + \int_{x_1+\delta x_1}^{x_1} dx\, \sqrt{E - U_0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\, \delta U}{2\sqrt{E - U_0(x)}}\right]$$

hipótese $U_0 + \delta U$ simétrico a respeito ao mínimo $\Rightarrow$ 2 primeiros termos cancelam-se

$$\Rightarrow \boxed{\delta T = -\sqrt{2m}\, \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{\delta U(x)}{\sqrt{E - U_0(x)}}}$$

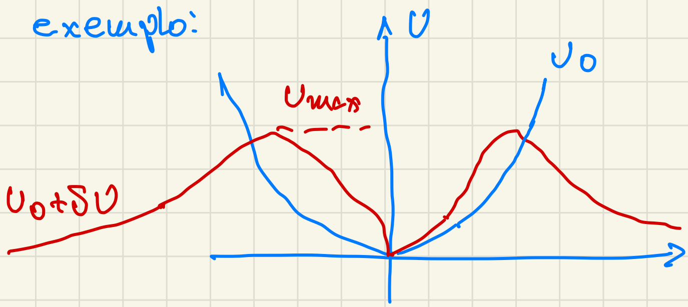
Em geral, temos

$$T = \sqrt{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\ \delta U(x)}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

Cuidado: séries perturbativas em física podem não convergir sendo apenas assintóticas!

Isso depende da física!

Por exemplo:



A série não converge para $E > U_{max}$ com certeza!

É importante questionar o resultado sempre