1.4 Trabalho e forças conservativas.

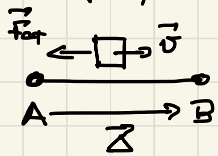
Trabalho de uma força $\vec{F}$ ao longo do deslocamento (curva) Γ é definido por

$$W \equiv \int_\Gamma d\vec{x}\cdot\vec{F}$$

Em geral, W depende de

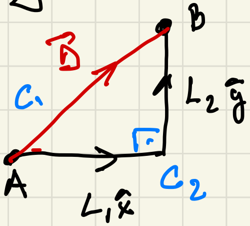
- trajetória descrita Γ
- sentido de Γ

Lembre-se da força de atrito: $\vec{F}_{at}$ depende de Γ!!



$$W_{A\to B} = \vec{F}_{at}\cdot\vec{\Delta}$$
$$= -\mu N|\vec{\Delta}| < 0$$

Agora considero 2 caminhos



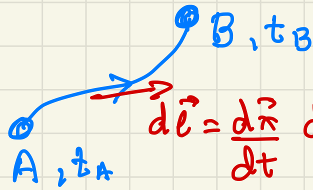
$$\tau_{AB,C_1} = -\mu N\sqrt{L_1^2+L_2^2}$$

$$\tau_{AB,C_2} = -\mu N\left[L_1+L_2\right]$$

Logo $\tau_{AB,C_2} > \tau_{AB,C_1}$

1.4.1 Teorema trabalho energia

A partícula vai de A até B



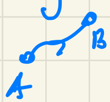
$d\vec{\ell} = \frac{d\vec{x}}{dt}\,dt$

$$N2 \Rightarrow \quad m\frac{d^2\vec{x}}{dt} = \underline{\vec{F}_{total}}$$

$$\times \int_{t_A}^{t_B} dt\,\frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow \quad m\int_{t_A}^{t_B} dt\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{m}{2}\int dt\,\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2_{t_B} - \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2_{t_A} = \int_{t_A}^{t_B} dt\;\vec{F}_{total}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$= \int d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_{total} = W^{total}_{A\to B}$$



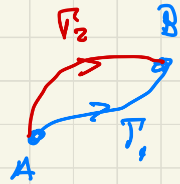
A energia cinética é dada por $T \equiv \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2$

logo $\quad T_B - T_A = W^{total}_{A\to B}$

Exemplo: atrito leva a perda de energia cinética ($W^{total}_{A\to B} < 0$)

1.4.2 Forças conservativas

Há uma classe importante de forças para as quais o trabalho independe do caminho, dependendo apenas dos pontos inicial e final, i.e.,



$$\int_{\Gamma_1} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c = \int_{\Gamma_2} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c$$

A primeira consequência é que o trabalho ao longo de uma curva fechada é zero:

$$\oint_{\Gamma_1-\Gamma_2} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c = \int_{\Gamma_1} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c + \int_{-\Gamma_2} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c = \int_{\Gamma_1} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c - \int_{\Gamma_2} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c = 0$$

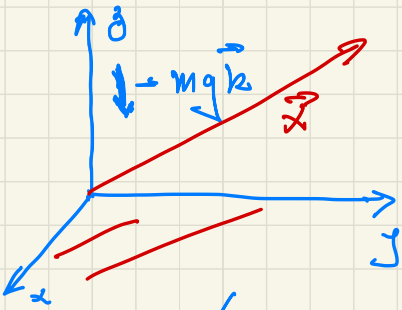
iguais!

Para isso $\vec{F}_c$ deve depender apenas do ponto, o que não ocorre para o atrito!

Dado um ponto de referência $\vec{r}_{ref}$ definimos a <u>função</u> energia potencial

$$U(\vec{x}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{x}} d\vec{\ell}\cdot\vec{F}_c$$

Exemplo: força gravitacional próximo da terra



$$U[\vec{x}] = -\int_{\vec{0}}^{\vec{x}} d\vec{l} \cdot (-mg\vec{k})$$

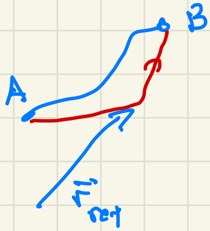
$\vec{r}_{ref} = \vec{0}$

$$= -\int_{\vec{0}}^{\vec{x}} dz\,(-mg) = mgz$$

$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

O trabalho de $\vec{F}_c$ para ir de $A \to B$ é

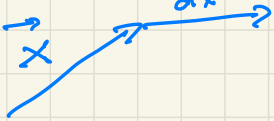
$$\int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{F}_c = \int_A^{\vec{r}_{ref}} d\vec{l} \cdot \vec{F}_c + \int_{\vec{r}_{ref}}^{B} d\vec{l} \cdot \vec{F}_c$$



$$= U[\vec{x}_A] - U(\vec{x}_B)$$

Mais ainda dado $U[\vec{x}]$ podemos obter $\vec{F}_c$:

Num deslocamento infinitesimal



$$W_{\vec{x} \to \vec{x} + d\vec{x}} = \vec{F}_c \cdot d\vec{x} = U[\vec{x}] - U[\vec{x} + d\vec{x}]$$

Expandindo U em Taylor

$$\vec{F}_c \cdot d\vec{x} = U(\vec{x}) - \left[U(\vec{x}) + \nabla U \cdot \vec{dx} \right] = -\nabla U \cdot d\vec{x}$$

Logo $\qquad \vec{F} = -\nabla U$

No caso do campo gravitacional homogêneo:

$$U(\vec{x}) = mgz \Rightarrow \vec{F} = -\nabla[mgz] = -mg\vec{k} \;!!$$

No caso de forças conservativas há a conservação de energia: do teorema trabalho - energia cinética

$$T_B - T_A = W_{A\to B} = U(\vec{x}_A) - U(\vec{x}_B) \Longrightarrow$$

$$\boxed{T_A + U(\vec{x}_A) = T_B + U(\vec{x}_B)}$$

Generalização para N partículas:

A energia cinética total é $\quad T = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{2} \vec{v}_j^{\,2}$

O teorema T-W diz que

Sistema vai da configuração A para B

$$\sum_i T_i^B - T_i^A = \sum_i W^{total}_{A\to B, i}$$

Se as forças externas forem conservativas

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla_i U_i^{(e)}$$ e seu trabalho é

$$\int_A^B \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{x}_i = -\int d\vec{x}_i \cdot \nabla U_i^{(e)} = U_i^{(e)}\Big|_A - U_i^{(e)}\Big|_B$$

Para forças internas conservativas* e dependendo apenas de $\vec{r}_i - \vec{r}_j \equiv \vec{r}_{ij}$

$$\vec{F}_{ji} = -\nabla_i U_{ji}(\vec{r}_{ij}) \quad \text{com} \quad U_{ji} = U_{ij}$$

consequência

Note que $\vec{F}_{ji} = -\nabla_i U_{ji} = +\nabla_j U_{ji} = +\nabla_j U_{ij} = -\vec{F}_{ij}$

Caso "particular":
SE as forças fundamentais dependem de

$s_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. $\Longrightarrow$ esta hipótese que leva a

---

* As forças internas requerem mais atenção!

$$\vec{F}_{j\to i} = -\nabla_i\, U_{ji}(s_{ij}) = -\frac{\vec{r}_{ij}}{s_{ij}}\, U'_{ji}(s_{ij})$$

[i.e., a força atua na linha que une as 2 partículas.]

Voltando ao cálculo do trabalho:

$$\sum_i W^{\text{interno}}_{A\to B\, i} = \sum_i \sum_{j\neq i} \int_{A\to B} d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ji} = \sum_j \sum_{i\neq j} \int_{A\to B} d\vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ij}$$

$i \leftrightarrow j$ (índices mudos)

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,j \\ i\neq j}} \int_{A\to B} \Big[d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ji} + d\vec{r}_j \cdot \underbrace{\vec{F}_{ij}}_{-\vec{F}_{ji}} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,j \\ i\neq j}} \int_{A\to B} \vec{F}_{ij}\; d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,j \\ i\neq j}} \int_{A\to B} -\nabla_i U_{ij} \cdot d\,\vec{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,j \\ i\neq j}} \int_{A\to B} \nabla_{\vec{r}_{ij}} U_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,j \\ i\neq j}} U_{ij} \Big|_A^B$$

[Interpretação: Consideremos todas as partículas muito afastadas e nesta posição tomamos a energia potencial zero. Agora trazemos partícula por partícula

1) 1ª partícula não sofre força ⇒ não há custo energético

2) Para trazer a 2ª partícula há só a 1ª partícula e o gasto energético é U_{12}

3) Para trazer a 3ª partícula há a 1ª e a 2ª. O gasto energético é

$$U_{13} + U_{23}$$

4) Para trazer a N-ésima partícula temos 1, 2, .. N-1 já em suas posições ⇒

$$U_{1N} + \dots + U_{N-1\,N}$$

Somando toda a energia potencial é $\sum_{\substack{i,j \\ j>i}} U_{ij}$

Mas trocando os índices $i \leftrightarrow j$ $\quad \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} U_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} U_{ji}$ $\equiv U_{ij}$

$\Rightarrow$ energia potencial é $\frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{i,j \\ j>i}} U_{ij} + \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} U_{ij}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} U_{ij}$!!

Juntando tudo

$$\sum_i \left(T_i^B - T_i^A\right) = \sum_i \left(U_i^e\Big|_A - U_i^e\Big|_B\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} U_{ij}\Big|_A - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} U_{ij}\Big|_B\right)$$

$$\Rightarrow \sum_i \left[T_i^A + U_i^e\Big|_A + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} U_{ij}\Big|_A\right] = \sum_i \left[T_i^B + U_i^e\Big|_B + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} U_{ij}\Big|_B\right]$$

Definindo: $U = \sum_i U_i^e + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ j\neq i}} U_{ij}$ e

$$T = \sum_i T_i$$

escrevemos $(T+U)_A = (T+U)_B.$

Este é o teorema de conservação de energia