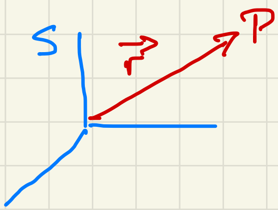
Parte 1: Revisão de Mecânica "Newtoniana"

1.0 A arena:

- Hipótese: o espaço é 3D e euclidiano $\mathbb{R}^3$
  ou pedaços dele [finite-dimensional space with inner product over $\mathbb{R}$]
  o tempo é unidimensional ($\mathbb{R}$)

- No tempo t o corpo (pontual) ocupa o ponto P determinado por um vetor $\vec{r}$ no sistema de referência S

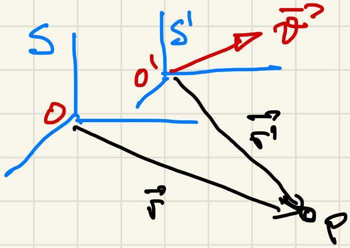


– Até aqui somente vetores sem falar de coordenadas

1.1 Leis de Newton

N1: Existem referenciais inerciais nos quais cada corpo isolado permanece parado ou em movimento retilíneo uniforme.

• Note que se S é inercial qualquer referencial movendo-se com velocidade constante com respeito a S também o é



para facilitar $t=0$ $O \equiv O'$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}\,t$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,' + \vec{v}$$

• Está implícita a idéia de tempo absoluto que é o mesmo em todos os referenciais

N2: Em um dado referencial o movimento de uma partícula obedece

$$m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

• m é a mesma em todos os referenciais

• $\vec{F}$ (a la Feynman) tem propriedades inerentes e não está ligada à 2ª lei! A idéia é determinar as leis das forças (e.g. gravitacional, elétrica, etc)

• É uma EDO de 2ª ordem: preciso $\vec{r}(0)$ e $\dot{\vec{r}}(0)$ p/ obter $\vec{r}(t)$.

• Fato da vida: condições iniciais | contorno são essenciais!!

N3: A cada ação corresponde uma reação igual e oposta, i.e., se o corpo i exerce a força $\vec{F}_{i\to j}$ sobre o corpo j então

$$\vec{F}_{j\to i} = - \vec{F}_{i\to j}$$

• Note que isso é uma propriedade das forças

• N1 + N3 devem ser usadas para obter referencial inercial!!

• N3 não é geral pois há o tempo de propagação das interações! Not a big deal!

From Feynman 9-4: N2 diz que se objeto está acelerado $\Rightarrow$ $\exists$ uma força atuando. Para não ser uma tautologia o certo é ter um programa para catalogar as forças da natureza! Newton fez isso com a força gravitacional!

1.2 Movimento do centro de massa: N partículas

Para a partícula i temos $m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} + \vec{F}_i^{(e)}$

externa

$$\Rightarrow \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}}_{\equiv 0 \text{ (N3)}} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$$

Defino $M = \sum_i m_i$ para escrever $M \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}\right] = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$

O centro de massa é definido como $\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$

$$\Rightarrow M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$$

- Isto explica o porquê tratar um corpo composto como pontual, e.g., terra ao redor do Sol. [teoria efetiva!!]

O momento total do sistema é $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

$$= M \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Logo $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$

Logo se $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ i.e. $\vec{P}$ é conservado!!

1.3 Conservação de Momento Angular: N partículas

O momento angular de 1 partícula é definido como $\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$

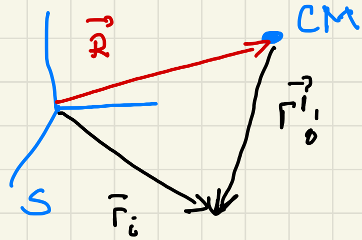
e o momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

É interessante calcular $\vec{L}$ no CM ($\vec{L}_{cm}$):

$\boxed{\text{Ref. do CM pode NÃO ser inercial!!!}}$

$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$



$$\vec{L}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i'$$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \wedge (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm})$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i}_{\vec{L}} - \underbrace{\left(\sum_{m_i} \vec{r}_i - \vec{R}\sum m_i\right)}_{0} \wedge \vec{v}_{cm} - \underbrace{\sum_i m_i \vec{R} \wedge \vec{v}_i}_{\vec{R}\wedge\vec{P}}$$

Logo $\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \underbrace{\vec{R} \wedge \vec{P}}_{\text{momento angular do CM}}$

A evolução temporal obedece

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \wedge \vec{p}_i}_{0} + \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \wedge \left(\sum_j \vec{F}_{j\to i} + \vec{F}_i^{(e)}\right)$$

A quantidade $\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$ é o torque ($\vec{\tau}_i$) da força $\vec{F}_i$

A variação com o tempo do momento angular total é

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i,j} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{j\to i} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(e)}$$

No 1º termo aparecem termos

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{j\to i} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{i\to j} \overset{N3}{=} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{j\to i}$$

Para forças (centrais) nas quais $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ é paralelo a $\vec{F}_{j\to i}$:

o 1º termo anula-se. Com isso

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}^{(e)}_{total}$$

Logo o momento angular total é conservado se $\vec{\tau}^{(e)}_{total} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$