

Lista V**Tarefa de leitura:**

1. Lemos parágrafos 2.4 a 2.7 bem como 7.1.

Problemas para o dia 6 de junho

1. Um esfera uniforme de massa m e raio r é colocada sobre um cilindro fixo de raio R conforme mostra a figura abaixo. A única força externa é a gravidade. Se a esfera começa a rodar sem escorregar do equilíbrio a partir a uma altura do seu centro de massa $r + R - \epsilon$, onde $\epsilon \ll r$ e R , encontre o ponto onde a esfera se descola do cilindro utilizando o método de multiplicadores de Lagrange.

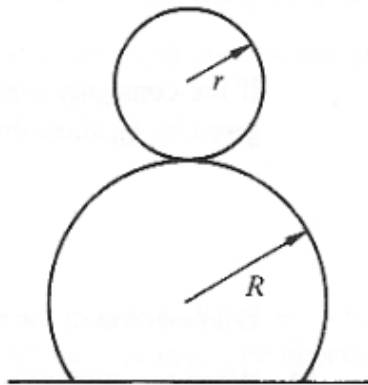


Figura 1: Sistema do problema 1.

2. A Lagrangiana de um sistema é dada por

$$-\frac{m}{2}q\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2 .$$

Deduz a equação de Euler-Lagrange no caso de lagrangianas que dependem da derivada segunda. Aplique o resultado para a lagrangiana acima.

3. Considere um sistema de partículas de massas m_j e coordenadas cartesianas \vec{x}_j . A lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{\vec{x}}_j^2 - \sum_{i,j} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) .$$

- (a) A transformação $\vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_j + a\vec{s}$, é uma simetria do sistema? Justifique.
- (b) Use o teorema de Noether para obter a quantidade conservada.
- (c) Qual o significado físico da quantidade conservada?
4. Considere o sistema do problema anterior. Dada uma rotação infinitesimal na direção \vec{n} por um ângulo $\delta\theta$, a transformação é

$$\vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_j + \delta\theta \vec{n} \wedge \vec{x}_j .$$

Utilizando o teorema de Noether obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

5. Considere um sistema unidimensional com coordenada generalizada q cuja lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) .$$

Uma transformação de escala modifica a variável independente tempo bem como a variável dinâmica segundo

$$q(t) \rightarrow q'(t) = \rho^d q(\rho t) .$$

A quantidade d é chamada “dimensão de escala” da variável dinâmica q .

- (a) Derive a forma infinitesimal desta transformação. Dica: escreva $\rho = e^\alpha$ onde α é pequeno.
- (b) Qual o valor que a dimensão de escala d deve ter para que a teoria seja invariante por esta transformação para $V = 0$?
- (c) Para o valor de d do item anterior, determine a forma mais geral de V para que a teoria seja invariante de escala.
- (d) Usando o teorema de Noether, obtenha a quantidade conservada (D) pela transformação de escala. Note que seu resultado depende explicitamente do tempo apesar da sua derivada total com respeito ao tempo ser zero!