4302305 - Mecânica I (1°sem/2023)
Prof. Oscar Éboli
Monitor - Patrick Andriolo (dúvidas podem ser enviadas para andriolo@usp.br)

Respostas da Lista 6

---

1. Um projétil é disparado verticalmente da superfície da Terra com velocidade inicial v_0 e retorna ao solo após atingir sua altura máxima. Desprezando perdas, calcule:

a) A sua deflexão devido à “força"de Coriolis.

b) A deflexão de um projétil se ele fosse solto da mesma altura máxima.

Respostas: Considerando apenas a força fictícia de Coriolis (desprezando outros termos não inerciais), notamos que a direção na qual ela atua é diferente da força peso. Assim, as equações horárias usuais de lançamento vertical na coordenada z nos fornecem o “tempo de vôo”, durante o qual atua a força fictícia em questão, responsável pela deflexão.

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = \Omega \cos\theta (gt^2 - 2v_0 t), \\ z(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Pela equação de z, sabemos que o tempo de voo é $\Delta t = {}^{2v_0}/_{g}$. Substituindo esse valor em $y(t)$, e sabendo que $y(0) = 0$, temos a deflexão

a) $\Delta y = -\dfrac{4\Omega \sin\theta D v_0^3}{3g^2}.$

O caso seguinte é semelhante, com diferença no tempo de vôo, e resulta na deflexão

b) $\Delta y = \dfrac{\Omega \sin\theta D v_0^3}{3g^2}.$

---

2. Um rio de largura D corre em direção ao norte numa latitude φ com uma velocidade v_0. Encontre a diferença de nível da água entre as margens esquerda e direita do rio.

Resposta. Considerando novamente apenas o termo fictício de Coriolis, notamos que o deslocamento latitudinal do rio faz com que essa força aponte na direção longitudinal (de forma que a margem leste fica maior porque o rio se desloca do sul para norte).

Como a superfície d'água deve ser nivelada em relação à força da "gravidade aparente"(*i.e.* a soma da força peso com Coriolis), temos uma relação de triângulos semelhantes tais que

$$\frac{|\vec{F}_{\text{Coriolis}}|}{|\vec{P}|} = \frac{\Delta h}{D} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{2\Omega D v_0 \sin\varphi}{g}$$

3. Um pêndulo de comprimento L e massa m está suspenso no teto de um trem que se move com velocidade constante v ao longo de um círculo de raio R. Resolva as equações de movimento do pêndulo analogamente ao que foi feito para o pêndulo de Foucault. Não se esqueça de levar em conta a força centrípeta. Justifique suas aproximações.

Resposta: A principal suposição que deve ser feita é de que θ (o ângulo de rotação do pêndulo em torno do eixo z) é pequeno, de forma que

$$\vec{r} = \underbrace{\frac{l\theta^2}{2}\hat{z}}_{\approx 0} + l\sin\theta\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right) ,$$

onde ϕ é o ângulo projetado no plano xy. Com isso,

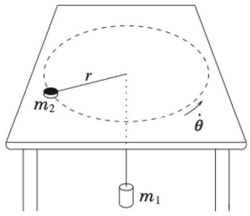
$$\vec{T} \approx \left(-\frac{Tx}{l}, -\frac{Ty}{l}, T\right) .$$

Aplicando isso na equação envolvendo as forças fictícias, deve-se chegar às equações

$$\begin{cases} \ddot{x} + \Omega^2 x = 2\omega\dot{y} , \\ \ddot{y} + \Omega^2 y = -\omega^2 R - 2\omega\dot{x} , \end{cases}$$

onde $\Omega \equiv \omega_0^2 - \omega^2$. A solução é mais fácil se for usado o método matricial.

4. No sistema da figura abaixo, a massa m_2 move-se sem atrito sobre uma mesa horizontal, enquanto a massa m_1 pode mover-se apenas na vertical. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange obtenha a tensão no fio, o qual é inextensível. Expresse sua resposta em termos da quantidade conservada e de r.



Resposta: Há somente um vínculo no sistema (a inextensibilidade da corda que liga os blocos), dado por $z + r = \text{cst.}$. Para tratar esse vínculo com o formalismo de multiplicadores, tomamos sua forma diferencial $\dot{r} = -\dot{z}$ e o comparamos com

$$\sum_k a_{lk}\dot{q}_k + a_{lt} = 0 \; .$$

Em seguida, usamos Euler-Lagrange com vínculos, a fim de obter equações para cada coordenada generalizada envolvendo λ. Isso nos permite encontrar uma expressão de λ em termos das quantidades dadas no enunciado, que corresponde à tensão no fio (tendo em vista a interpretação de forças generalizadas associadas aos vínculos). A expressão final é:

$$T = \lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{L^2}{m_2^2 r^3} + g\right) \; ,$$

onde L é a quantidade conservada (momento angular).

5. Considere o movimento de uma partícula em três dimensões que está sujeita aos vínculos

$$\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}z = 0 \; , \qquad \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z = 0$$

Resposta: Isolamos $z\,\mathrm{d}z$ nos dois vícnulos dados. Teremos então a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx \; ,$$

sendo C uma constante de integração. Substituindo o resultado acima no primeiro vínculo e integrando, chegamos a outro vínculo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = K \; ,$$

onde K também veio da segunda integração. Note que ambos os vínculos são da forma $f(x, y, z, t) = 0$. Assim, trata-se de um sistema holônomo.

6. Considere n osciladores harmônicos de massa unitá cujas posições são x_k. As frequências dos osciladores são distintas, i.e. se $k \neq j$ então $\omega_k \neq \omega_j$. Este sistema está sujeito ao vínculo

$$\sum_{i=1}^{n} x_k^2 = 1$$

a) Utilizando multiplicadores de Lagrange, mostre que as equações de movimento são

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = 2\lambda x_k$$

b) Mostre que $\sum (x_k \ddot{x}_k + \dot{x}_k) = 0$ e obtenha as equações de movimento eliminando o multiplicador de Lagrange.

c) Mostre que as seguintes n quantidades são constantes de movimento:

$$F_k\left(x_k, \dot{x}_k\right) = x_k^2 + \sum_{l=1,\ l\neq k}^{n} \frac{\left(x_l \dot{x}_k - \dot{x}_l x_k\right)^2}{\omega_k^2 - \omega_l^2}$$

Solução.

a) O vínculo dado no enunciado é holônomo. Derive-o em relação ao tempo, e em seguida compare-o com

$$\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0 \ .$$

Com isso, obtemos os coeficientes $a_{lk} (= a_{l=1,k} = 2x_k)$ que acompanham o multiplicador de lagrange na equação de Euler-Lagrange com vínculos não holônomos. Fazendo as derivadas da lagrangeana, chegamos à equação desejada.

b) Derivando o vínculo dado em relação ao tempo duas vezes chegamos precisamente à equação que foi pedida nesse item.

Utilizando a resposta do item anterior, multiplicando ambos os lados por x_k e fazendo a soma sobre todo k, chegamos a uma expressão para λ, que pode ser novamente substituída na equação de movimento original, eliminando o multiplicador.

c) Basta mostrar que $\dot{F}_k(x_k, \dot{x}_k) = 0$ utilizando as propriedades até aqui trabalhadas (o vínculo, sua derivada em relação ao tempo, etc.)