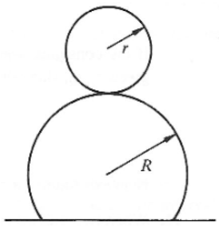
4302305 - Mecânica I (1°sem/2023)
Prof. Oscar Éboli
Monitor - Patrick Andriolo (dúvidas podem ser enviadas para andriolo@usp.br)

Respostas da Lista 5

---

1. Um esfera uniforme de massa m e raio r é colocada sobre um cilindro fixo de raio R conforme mostra a figura abaixo. A única força extrerna é a gravidade. Se a esfera começa a rodar sem escorregar do equilíbrio a partir a uma altura do seu centro de massa $r + R - \varepsilon$, onde $\varepsilon \ll r, R$, encontre o ponto onde a esfera se descola do cilindro utilizando o método de multiplicadores de Lagrange.



Resposta: Escreva a energia cinética e a potencial da esfera, lembrando que o momento de inércia desse tipo de corpo é $\frac{2mr^2}{5}$. Temos dois vínculos: o de contato (a distância entre os centros do cilindro e da esfera, ρ, deve ser igual a $r + R$) e o de rolamento sem deslizamento ($\rho\dot{\theta} = r\dot{\phi}$, onde θ é a abertura angular do vetor de ρ no cilindro e ϕ é a abertura de r na esfera).

Obtenha um multiplicador de lagrange para cada vínculo e escreva Euler-Lagrange para ρ, θ e ϕ. Como a força (generalizada) de contato está associada ao multiplicador que acompanha o coeficiente de Lagrange $a_{1\rho}$, faça uso da conservação de energia para obter

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{17}\right).$$

2. A Lagrangiana de um sistema é dada por

$$L = -\frac{m}{2} q \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 \ .$$

Deduza a equação de Euler-Lagrange no caso de lagrangianas que dependem da derivada segunda. Aplique o resultado para a lagrangiana acima.

Solução: Assim como feito no caso de lagrangeanas que dependem até a primeira derivada das coordenadas, suponha agora que $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, de forma que a ação continue definida como

$$S[L] \equiv \int \mathrm{d}t \ L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \ .$$

Realize uma transformação infinitesimal $q(t) \mapsto q'(t) = q(t) + \varepsilon\eta(t)$, calcule $\delta S = S[L'] - S[L]$, usando integração por partes e o lema fundamental do cálculo de variações, deduza

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \ .$$

Usando esse resultado aplicado à lagrangeana acima, a equação de movimento resultante é

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \ .$$

3. Considere um sistema de partículas de massas m_j e coordenadas cartesianas $\vec{x}_j$. A lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \sum_j \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_j^{\,2} - \sum_{i,j} V\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \ .$$

a) A transformação $\vec{x}_j \mapsto \vec{x}_j + a\vec{s}$, é uma simetria do sistema? Justifique.

b) Use o teorema de Noether para obter a quantidade conservada.

c) Qual o significado físico da quantidade conservada?

---

a) Uma simetria é uma transformação num sistema que mantém inalteradas as equações de movimento. Como a lagrangeana transformada é igual à lagrangeana original (pois $a\vec{s}$ é constante e se anula na parte cinética, ao passo que é igual para toda partícula j, mantendo o argumento do potencial sempre o mesmo), isso é suficiente (mas não necessário!) para que seja uma simetria.

b) Como visto em aula, podemos usar a conservação da quantidade

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k - \Lambda \ ,$$

onde Λ é tal que

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} \ .$$

Para a lagrangeana dada, temos

$$\Lambda = 0 \ \ \Rightarrow \ \ C = \sum_k \left(m_k \dot{\vec{x}}_k \right) \cdot a\vec{s}$$

c) Trata-se do momento linear total do sistema. Simetrias de translação espacial sempre implicam na conservação do momento.

4. Considere o sistema do problema anterior. Dada uma rotação infinitesimal na direção $\vec{n}$ por um ângulo $\delta\theta$, a transformação

$$\vec{x}_j \mapsto \vec{x}_j + \delta\theta\vec{n} \times \vec{x}_j \ .$$

Utilizando o teorema de Noether obtenha a quantidade conservada associada a rotações

---

Resposta: Essa transformação é, em certo sentido, mais complexa que a anterior porque a lagranegana não é invariante (perceba novamente), mas sua variação o é (essa sim é a condição suficiente e necessária para que a transformação seja simetria). Prosseguindo como no item **(b)** da questão anterior, teremos

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k - \underbrace{\Lambda}_{0} = \left(\sum_k m_k \dot{\vec{x}}_k\right) \cdot \delta\vec{x}_k = \underbrace{\left(\sum_k \vec{x}_k \times m_k \dot{\vec{x}}_k\right)}_{\text{conservado}} \cdot \delta\theta\vec{n} \ .$$

A quantidade conservada em questão é o momento angular, tipicamente associado às simetrias por rotações infinitesimais.

5. Considere um sistema unidimensional com coordenada generalizada q cuja lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \ .$$

Uma transformação de escala modifica a variável independente tempo bem como a variável dinâmica segundo

$$q(t) \mapsto q'(t) = \rho^d q(\rho t) \ .$$

A quantidade d é chamada dimensão de escala da variável dinâmica q.

a) Derive a forma infinitesimal desta transformação. Dica: escreva $\rho = e^{\alpha}$, onde α é pequeno.

b) Qual o valor que a dimensão de escala d deve ter para que a teoria seja invariante por esta transformação para $V = 0$?

c) Para o valor de d do item anterior, determine a forma mais geral de V para que a teoria seja invariante de escala.

d) Usando o teorema de Noether, obtenha a quantidade conservada (D) pela transformação de escala. Note que seu resultado depende explicitamente do tempo apesar da sua derivada total com respeito ao tempo ser zero!

Respostas:

a) A forma infinitesimal é obtida ao expandirmos a reparametrização sugerida no enunciado, $\rho \approx 1 + \alpha$, de forma que $q'(t) = (1 + \alpha d)q(t + \alpha t)$. Expandindo $q(t + \alpha t)$ em Taylor novamente, temos $q'(t) = q(t) + \alpha[q(t)d + \dot{q}(t)t]$.

b) Para $V = 0$, a fim de obter uma teoria invariante de escala, impomos $\delta S = S[L'] - S[L]$, até chegarmos no integrando mais simplificado possível, que deve ser 0. Isso nos dá uma equação para encontrar d., cujo resultado deve ser $d = -1/2$.

c) Devemos impor novamente $\delta S = 0$ como no caso anterior, mas ao assumirmos $V \neq 0$, o integrando mais simplificado possível corrsponde a uma EDO da forma $V'(q)q = 2[k_1 - V(q)] \ \Rightarrow \ V(q) = \frac{k_2}{q^2} + k_1$, onde k_1 e k_2 são constantes.

d) Aqui aplicamos o teorema de Noether, como nos exercícios anteriores. A quantidade D tem a forma

$$D = \frac{mq\dot{q}}{2} - Et \ .$$