4302305 - Mecânica I (Prof. Oscar Éboli)
Primeiro semestre de 2023
Dúvidas sobre as soluções devem ser enviadas para andriolo@usp.br

Solução da Lista 2

---

1. Descreva qualitativamente o movimento de uma partícula na presença do potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \,,$$

onde $\alpha > 0$ e $\gamma > 0$.

Solução.
Uma partícula sujeita a um potencial central $U(r)$ tem sua energia total dada por

$$\begin{aligned} E &= T + U(r) && (1.1)\\ &= \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U(r) && (1.2)\\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) && (1.3)\\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + U(r) && (1.4)\\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + U(r) && (1.5)\\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \,, && (1.6) \end{aligned}$$

onde usamos que $L \equiv \|\mathbf{L}\| = mr^2\dot{\theta}$ da (1.4) para a (1.5). A expressão (1.2) carrega a informação sobre uma partícula que se move em duas dimensões[1], ao passo que podemos definir um potencial efetivo $U_{\text{eff}}(r)$ como

$$U_{\text{eff}} \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3} \,, \tag{1.7}$$

a fim de podermos analisar esse problema unicamente na direção radial. Definamos $\beta \equiv {}^{L^2}\!/_{2m}$, de forma que

$$U_{\text{eff}} = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}. \tag{1.8}$$

Os movimentos possíveis são obtidos ao analisarmos os pontos em que a derivada se anula, que são os pontos críticos:

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha r^{-2} - 2\beta r^{-3} + 3\gamma r^{-4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha r^2 - 2\beta r + 3\gamma = 0 \,. \tag{1.9}$$

Trata-se de uma equação quadrática, cujas soluções são

$$r = \frac{2\beta r \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad \Delta \equiv 4\beta^2 - 12\alpha\gamma \,. \tag{1.10}$$

[1] A princípio poderíamos pensar como sendo um problema de três dimensões, em esféricas, mas como sabemos que o potencial é central, há conservação de momento angular e portanto o movimento é restrito a um plano, caracterizado por (r, θ).

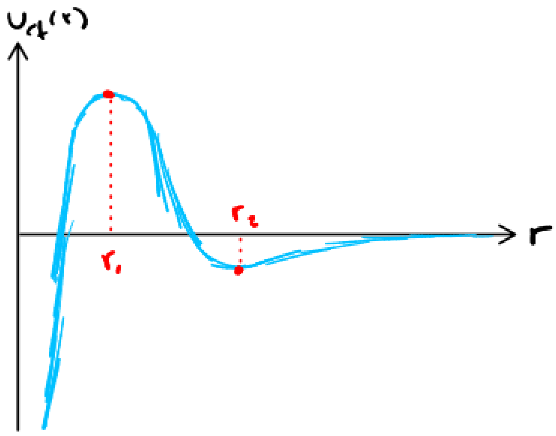
Note que a quantidade de soluções depende do sinal de Δ. Se $\Delta > 0$, temos dois pontos críticos. Teremos um ponto crítico se $\Delta = 0$ e nenhum de $\Delta < 0$.

Isso mostra que, como deveríamos esperar, a relação entre os parâmetros α, β e L muda a física do problema. Assim, separamos os movimentos possíveis de acordo com esses três casos:

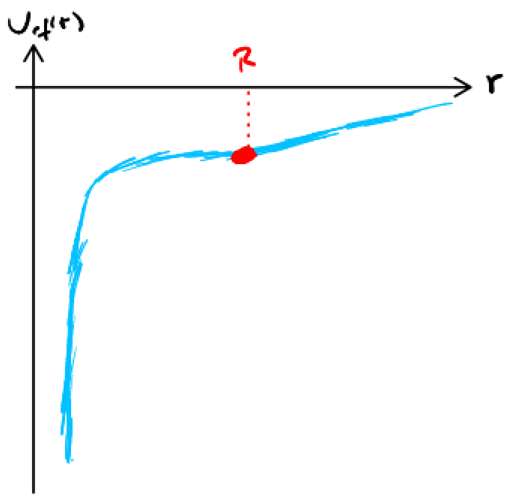
- $\Delta > 0$: Nos pontos críticos $U_{\text{ef}}(r_1)$ e $U_{\text{ef}}(r_2)$ temos órbitas circulares (instável de raio r_1 e estável de raio r_2). Se $E < 0$, $r < r_1$, a partícula tende a $r = 0$, enquanto que se $r > r_1$ ela realiza órbitas elipsoidais.

  Quando a energia for positiva mas menor que $U_{\text{ef}}(r_1)$ e $r_0 < r_1$, então o objeto vai a $r \to 0$, e caso $r_0 > r_1$ tende a $r \to +\infty$. Se $r + 0 > r_1$, temos um caso de espalhamento (hipérbole).

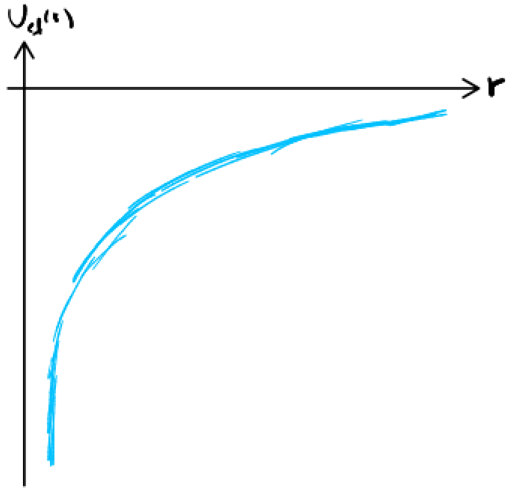
  Se a energia for positiva e maior que $U(r_1)$, o sinal da velocidade inicial seleciona $r \to 0$ (se for negativo) ou $r \to +\infty$ (se for positivo), independentemente da posição.



- $\Delta = 0$: Há órbitas circulares instáveis em $U_{\text{ef}}(R)$. Caso a energia total seja positiva ou nula a partícula vai a $r \to +\infty$ se sua $\dot{r}_0$ for positiva e vai a $r \to 0$ se for negativa. Caso a energia total for negativa (e diferente de U_{ef}), sempre tenderá a $r \to 0$.



- $\Delta < 0$: Para toda energia $E < 0$ a partícula vai a $r \to 0$. Se $E \geq 0$, pode ir a $r \to 0$ se a $\dot{r}_0 < 0$ e vai a $r \to +\infty$ se $\dot{r}_0 > 0$.


$U_d(r)$
r

2. Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = m\omega^2 r^2 \,.$$

a) Descreva qualitativamente os movimentos possíveis;

b) Dada a energia do corpo E, obtenha a sua trajetória.

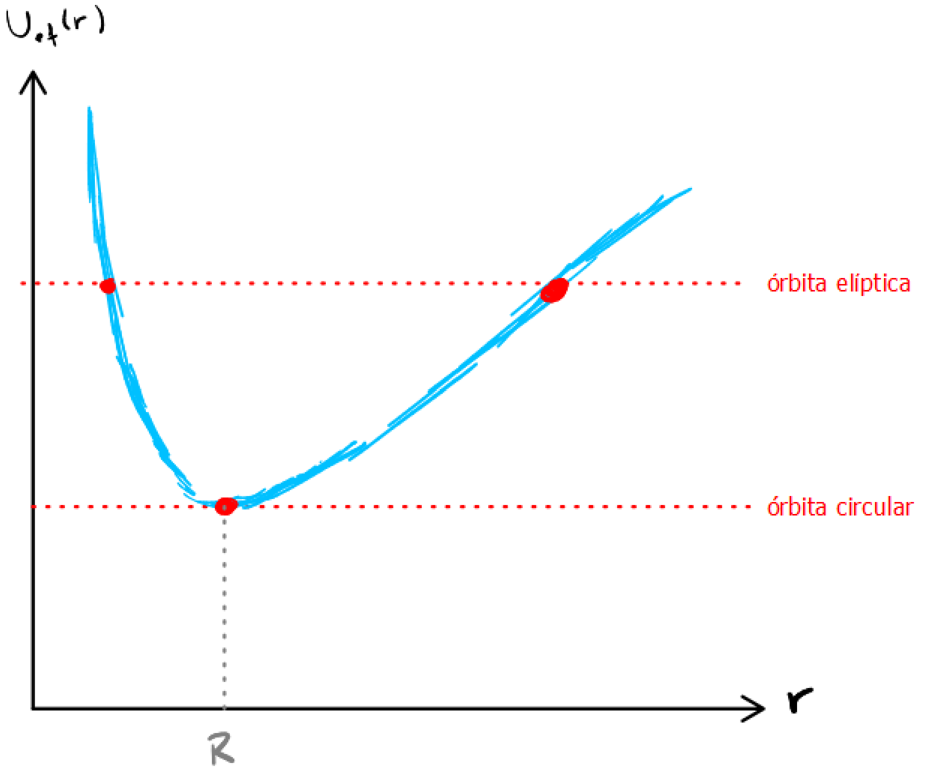
Solução.

a) O potencial efetivo é

$$U_{\text{eff}} = m\omega^2 r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \,. \tag{2.1}$$

Notamos que esse potencial é ilimitado superiormente (vai a $+\infty$ tanto para $r \to 0$ quanto $r \to +\infty$), mas é limitado inferiormente por um mínimo global $U_{\text{eff}}(R)$:

$$U'_{\text{eff}}(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{L}{m\omega}} \,. \tag{2.2}$$



Podemos notar que no mínimo global (onde a energia da partícula é a menor possível) há uma órbita circular estável, enquanto que valores maiores de energia resultam em trajetórias elípticas (que, pelo Teorema de Bertrand, devem ser fechadas, pois o potencial $U(r)$ é da forma kr^2).

b) A trajetória do corpo pode ser calculada a partir de

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

mas sabendo que

$$L = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{mr^2}{L}\,\mathrm{d}\theta \tag{2.4}$$

podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{\sqrt{2m}}{L}\,\mathrm{d}\theta\ . \tag{2.5}$$

A equação acima é importante pois é geral (funciona para qualquer potencial efetivo), e portanto sempre pode ser usada para calcular as trajetórias. Seu lado direito é simples de ser integrado, enquanto que o lado esquerdo merece alguma atenção.

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - Ar^2 - {}^{B}\!/_{r^2}}}\ , \tag{2.6}$$

onde definimos $A \equiv {}^{m\omega^2}\!/_{E}$ e $B \equiv {}^{L^2}\!/_{2mE}$. Agora fazemos a substituição $u \equiv {}^{1}\!/_{r}$ ($\mathrm{d}u = -{}^{1}\!/_{r^2}$), de forma que

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - Ar^2 - {}^{B}\!/_{r^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - {}^{A}\!/_{u^2} - Bu^2}} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - A - Bu^4}}. \tag{2.7}$$

Podemos simplificar o radicando completando quadrados, se percebermos que

$$u^2 - Bu^4 - \frac{1}{4B} = -\left(\sqrt{B}u^2 - \frac{1}{2\sqrt{B}}\right)\ , \tag{2.8}$$

o que motiva a substituição

$$v \equiv \sqrt{B}u^2 - \frac{1}{2\sqrt{B}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = 2\sqrt{B}u\,\mathrm{d}u\ . \tag{2.9}$$

Finalmente, temos

$$-\frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - A - Bu^4}} = -\frac{1}{2\sqrt{EB}} \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{{}^{1}\!/_{4B} - A - v^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{{}^{1}\!/_{4B} - A}}\right) + C\ . \tag{2.10}$$

Agora voltamos à variável r:

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{1}{2\sqrt{EB}} \cos^{-1}\left[\left(\frac{1}{4B} - A\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt{B}}{r^2} - \frac{1}{2\sqrt{B}}\right)\right] = \frac{\sqrt{2m}}{L}\left(\theta - \theta_0\right)\ , \tag{2.11}$$

e isolando r em função de θ (e reestabelecendo as expressões de A e B que havíamos definido) temos a trajetória

$$\boxed{r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{mE}}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E}}\cos\left[2(\theta - \theta_0)\right]\right\}^{-1/2}.} \tag{2.12}$$

3. Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \, ,$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

a) Existem órbitas circulares? Qual a condição para que isso ocorra?

b) Dada a energia do corpo $E < 0$, obtenha a sua trajetória.

Solução.

a) Sabendo que o potencial é isotrópico, órbitas circulares são aquelas que resolvem $U'_{\text{eff}} = 0$. Vejamos se essa equação possui soução:

$$\left.\frac{\mathrm{d}U_{\text{eff}}(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\beta + \frac{L^2}{2m}\right)\right]_{r=R} = 0 \quad \Rightarrow \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha R^{-2} - 2\left(\beta + \frac{L^2}{2m}\right) R^{-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{2}{\alpha}\left(\beta + \frac{L^2}{2m}\right)} \, . \tag{3.2}$$

Como $\alpha, \beta > 0$, sempre existe uma órbita circular de raio R como expressado acima.

b) As trajetórias periódicas podem ser obtidas pelo mesmo método empregado a partir do exercício anterior, partindo de

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{\sqrt{2m}}{L}\,\mathrm{d}\theta \, . \tag{3.3}$$

Resolvemos o lado esquerdo fazendo novamente a substituição $u = {}^{1}\!/\!{}_{r}$, o que resulta em

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{E - Au^2 + \alpha u}} \, , \tag{3.4}$$

onde definimos $A \equiv {}^{L^2}\!/\!{}_{2m} + \beta$. Em seguida, completamos quadrados notando que

$$-\left(Au^2 - \alpha u + \frac{\alpha^2}{4A}\right) = -\left(\sqrt{A}u - \frac{\alpha}{2\sqrt{A}}\right)^2 \, , \tag{3.5}$$

e fazemos outra substituição, dada por

$$v \equiv \sqrt{A}u - \frac{\alpha}{2\sqrt{A}} \, . \tag{3.6}$$

Com isso, a integral resulta em

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = A^{-1/2}\cos^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{E + {}^{\alpha^2}\!/\!{}_{4A}}}\right) \, . \tag{3.7}$$

Voltando à variável r, esse termo assume a forma

$$A^{-1/2}\cos^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{E + {}^{\alpha^2}\!/\!{}_{4A}}}\right) = A^{-1/2}\cos^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{4AE + \alpha^2}}\left(\frac{A}{r} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \, . \tag{3.8}$$

Logo, considerando a integral da variável θ, chegamos a

$$A^{-1/2}\cos^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{4AE+\alpha^2}}\left(\frac{A}{r}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{2m}}{L}\,(\theta-\theta_0) \tag{3.9}$$

e isolando $r(\theta)$ obtemos

$$\boxed{r(\theta)=\frac{2A}{\alpha}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4AE}{\alpha^2}}\cos\left[\frac{\sqrt{2mA}}{L}(\theta-\theta_0)\right]\right\}^{-1},\;\; A\equiv\frac{L^2}{2m}+\beta\,,\; E<0} \tag{3.10}$$

4. No potencial do problema 3, considere que o termo r^{-2} é muito menor que o termo de Kepler. Mostre que a velocidade de precessão da órbita

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi m\beta}{L^2 T}$$

onde L é o momento angular e t o período. O termo extra na forma r^{-2} parece muito com a barreira centrífuga. Por que esse termo causa a precessão da órbita?

Solução.

Note que a trajetória $r(\theta)$ obtida no exercício anterior depende de θ unicamente como argumento de uma função periódica (o cosseno). Assim, $r(\theta)$ também será periódico com o mesmo período, igual a 2π. Dessa forma, o deslocamento angular da precessão - isso é, a diferença de θ desde onde a "primeira" elipse deveria fechar (θ_1) e onde a "próxima" se inicia (θ_2) - pode ser escrito como:

$$\underbrace{\frac{2mA}{L}\theta_2 = \frac{2mA}{L}\theta_1 + 2\pi}_{\text{condição de periodicidade do raio}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \equiv \theta_2 - \theta_1 = 2\pi\frac{L}{\sqrt{2mA}}\,. \tag{4.1}$$

Por hipótese, como $\beta \ll 1$, a variação $\Delta\theta$ pode ser expandido como

$$\Delta\theta = 2\pi\frac{L}{\sqrt{2mA}} = 2\pi\frac{L}{\sqrt{L^2 + 2m\beta}} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}} \approx 2\pi - \underbrace{\frac{2\pi m\beta}{L^2}}_{\Delta\Omega}, \tag{4.2}$$

onde usamos que $(1 \pm x)^\alpha \approx 1 \pm \alpha x \;\forall\; x \ll 1$. Podemos notar que ao invés de termos uma volta completa com 2π radianos (caso em que a trajetória seria fechada), temos um deslocamento de precessão $\Delta\Omega$ como destacado acima. Assim, nossa velocidade de precessão (suposta constante) é

$$\dot{\Omega} = \frac{\Delta\Omega}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\Omega} = \frac{2\pi m\beta}{L^2 T}}\,. \tag{4.3}$$

A precessão da órbita que surge pela descrição com o termo envolvendo β pode ser entendida de diferentes formas, sendo uma delas a seguinte: A trajetória ainda deve ser planar (pela centralidade da força atuante e consequente conservação de momento angular) e elipsoidal, mas pelo Teorema de Bertrand, não pode ser mais fechada ao combinarmos um termo que vai com r^{-2}.

5. No problema de Kepler,

$$U(r) = -{}^{\alpha}\!/_{r} \ ,$$

com $\alpha > 0$, obtenha as soluções com energia positiva.

Solução.

Dado $U(r)$, o potencial efetivo é escrito como

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \ , \tag{5.1}$$

e como deduzido anteriormente, temos

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{\sqrt{2m}}{L}\,\mathrm{d}\theta \tag{5.2}$$

onde a parte direita da igualdade é simples, enquanto que precisamos nos concentrar em resolver a parte esquerda. Os passos, como visto nos exercícios **2** e **3** são os mesmos:

- **Substituição** $u \equiv {}^{1}\!/_{r}$ na integral sobre r (esse passo tende a se repetir com quaisquer potenciais que dependam apenas de polinômios de r, pois sempre temos um termo ${}^{1}\!/_{r^2}$ - aquele que vem acompanhado do momento angular). Isso nos dá:

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - Au^2 + Bu}} \ , \tag{5.3}$$

  onde $A \equiv {}^{L^2}\!/_{2mE}$ e $B \equiv {}^{\alpha}\!/_{E}$.

- **Completar quadrados** a fim de transformar o radicando em algo como “constante + variável^2”. No nosso caso, temos

$$-Au^2 + Bu - \frac{B^2}{4A} = -\left(\sqrt{A}u - \frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2 \ . \tag{5.4}$$

- **Substituição** usando a expressão linear (que está entre os parênteses), que chamamos de v:

$$-\frac{1}{\sqrt{E}}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - Au^2 + Bu}} = -\frac{1}{\sqrt{AE}}\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 + {}^{B^2}\!/_{4A} - v^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{1 + {}^{B^2}\!/_{4A}}}\right) + C \ . \tag{5.5}$$

- **Voltar à variável $\boldsymbol{r}$** e isolá-la como função de θ (que vem da integral calculada sobre a parte direita de (5.2)). Com isso, resulta

$$\boxed{r(\theta) = \frac{2A}{B}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{B^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right\}} \tag{5.6}$$

6. Obtenha a equação da trajetória de soluções com energia negativa para uma partícula de massa m na presença do potencial

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \, ,$$

com $\alpha > 0$.

Solução.

Seguindo os mesmos passos que fizemos nos exercícios anteriores, temos o potencial efetivo dado pela expressão

$$U_{\text{eff}}(r) = \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{r^2} \, . \tag{6.1}$$

Aqui temos três possívesi casos: $\alpha = {}^{L^2}\!/_{2m}$, $\alpha > {}^{L^2}\!/_{2m}$ e $\alpha < {}^{L^2}\!/_{2m}$. Olhemos para cada um, individualmente.

- $\alpha = {}^{L^2}\!/_{2m}$. Aqui temos

$$U_{\text{eff}}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = {}^{m\dot{r}^2}\!/_2 \quad \Rightarrow \quad r(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} t + r_0 \, . \tag{6.2}$$

  Por outro lado, usando o momento angular,

$$mr^2\dot{\theta} = L \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \frac{L}{m\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}t + r_0\right)} \, \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \sqrt{\frac{m}{2E}} L \ln r(t). \tag{6.3}$$

  Logo,

$$\boxed{r(\theta) = \exp\left[\frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{m}L} (\theta - \theta_0) \right]} \, . \tag{6.4}$$

Para os casos seguintes defino $k \equiv {}^{L^2}\!/_{2m}$ e $x = \alpha - k$. Em ambos, devemos resolver, de forma semelhante aos exercícios anteriores, a equação

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{\sqrt{2m}}{L} \, \mathrm{d}\theta \, . \tag{6.5}$$

Após fazermos as substituições relevantes, o lado esquerdo resulta em

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + xu^2}} \, , \tag{6.6}$$

e como a diferença entre os dois casos está no sinal de x, teremos para $x > 0$ uma função dependente de cosseno, e para $x < 0$, uma função dependente do seno hiprbólico:

- $\alpha > {}^{L^2}\!/_{2m} \Leftrightarrow x > 0$: O lado direito de (6.6) fica escrito como

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \frac{1}{\sqrt{xE}} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{r}\right) . \tag{6.7}$$

Considerando a integral de θ, temos

$$\frac{1}{\sqrt{xE}} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{r}\right) = \frac{2m}{L}(\theta - \theta_0) . \tag{6.8}$$

Isolando r, temos o resultado

$$\boxed{r(\theta) = \left\{\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - L^2}} \cos\left[\sqrt{\frac{2m\alpha}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right]\right\}} \tag{6.9}$$

- $\alpha < {}^{L^2}\!/_{2m} \Leftrightarrow x < 0$: O lado direito de (6.6) fica escrito como

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = -\frac{1}{\sqrt{xE}} \sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{r}\right) . \tag{6.10}$$

de forma que

$$-\frac{1}{\sqrt{xE}} \sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{r}\right) = \frac{\sqrt{2m}}{L}(\theta - \theta_0) \tag{6.11}$$

e isolando $r(\theta)$ chegamos a

$$\boxed{r(\theta) = \left\{\sqrt{\frac{2mE}{L^2 - 2m\alpha}} \sinh\left[\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{L^2}(\theta - \theta_0)}\right]\right\}} \tag{6.12}$$

Como analisar o movimento de partículas em potenciais centrais?

Analisar o movimento de corpos sujeitos a potenciais que dependem apenas da distância radial significa encontrar os tipos de órbitas (círculos, elipsoides, hipérboles, etc.) que eles realizam, de acordo com a quantidade de energia que possuem.

Manual prático:

1. Dado $U(r)$, construa $U_{\text{eff}}(r)$. Para fazer isso, basta somar a $U(r)$ o termo que envolve o momento angular:

$$U_{\text{eff}}(r) \equiv U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \; .$$

2. Analise os limites

$$\lim_{r \to 0} U_{\text{eff}}(r) \quad \text{e} \quad \lim_{r \to +\infty} U_{\text{eff}}(r) \; .$$

3. Para encontrar os pontos críticos (que **podem**, e para nossos fins costumam ser, máximos ou mínimos), resolva a equação

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{eff}}(r)}{\mathrm{d}r} = 0 \; .$$

4. Desenhe o gráfico do potencial com as informações de **2** e **3**

5. Pontos de mínimo correspondem a órbitas circulares estáveis (e suas vizinhanças estão relacionadas a órbitas elipsoidais, não necessariamente fechadas), enquanto máximos são órbitas circulares instáveis (e suas vizinhanças podem estar relacionadas a hipérboles - casos em que a partícula vem de $\to +\infty$ e, por não ter energia suficiente para passar a barreira de potencial, volta para $+\infty$).

Observações:

- Formalmente, para procurarmos máximos e mínimos devemos olhar para três casos: (1) onde a derivada de U_{eff} se anula (pontos críticos); (2) onde U_{eff} não é diferenciável e (3) nos extremos do intervalo onde essa função é definida. No caso do curso de Mecânica I, usualmente os potenciais são bem comportados (como todos que vimos na Lista 2), então esses dois últimos casos acabam "ficando de lado"[2] e a derivada nula costuma identificar máximos e mínimo (mas tome cuidado!)

- A priori, olhamos para máximos e mínimos **locais**. Você pode descobrir se são máximos ou mínimos, formalmente, calculando a segunda derivada de U_{eff} (se esse valor for positivo, então trata-se de um mínimo, e caso for negativo, você terá um máximo), ou "heuristicamente", a depender dos limites encontrados em **2** e da quantidade de pontos críticos obtida em **3**.

[2]Para terror d@s matemátic@s. :)