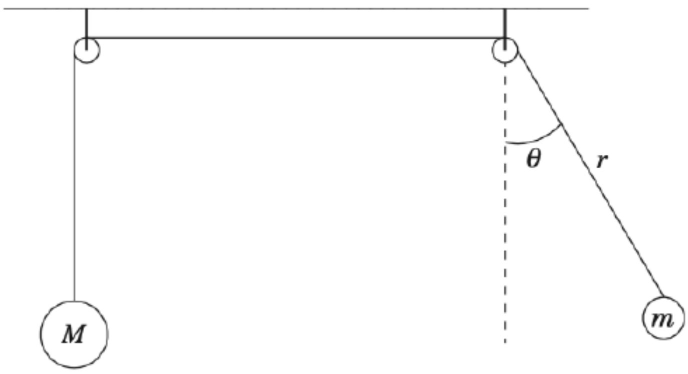
4302305 - Mecânica I (Prof. Oscar Éboli)
Primeiro semestre de 2023
Dúvidas sobre as soluções devem ser enviadas para andriolo@usp.br

Solução da Lista 3

---

1. Considere uma máquina de Atwood como mostra a figura abaixo, onde o corpo de massa m oscila em um plano enquanto que o de massa M move-se verticalmente. O cabo que une as duas massas e as polias são ideais. Obtenha as equações de movimento deste sistema.



Solução.

- **Coordenadas generalizadas**: deslocamento vertical (z) do corpo de massa M, deslocamento angular (θ) e radial (r) do corpo de massa m.

- **Existência de vínculos**: Como a corda é inextensível, seu comprimento é constante, de forma que $r + z = l \;\; \Rightarrow \;\; \dot{r} = -\dot{z}$. Dessa forma, como tínhamos três coordenadas generalizadas e um vínculo (holônomo), então devemos obter $3 - 1 = 2$ equações de movimento

- **Energias cinéticas e potenciais de cada corpo**: Adotamos a altura da polia como altura de energia potencial gravitacional nula (isso define o sinal negativo de suas expressões escritas abaixo). Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
&\text{corpo de massa } M\text{: } T_M = \frac{M\dot{z}^2}{2} = \frac{M\dot{r}^2}{2} \;, \;\; V_M = -Mg(l-r) \\
&\text{corpo de massa } m\text{: } T_m = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \;, \;\; V_m = -mgr\cos\theta
\end{aligned}$$

- **Construção da lagrangeana**: Somamos as energias cinéticas e subtraímos as potenciais

$$\begin{aligned}
L &= T - V = (T_M + T_m) - (V_M + V_m) \\
&= \frac{M\dot{r}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mg(l-r) + mgr\cos\theta
\end{aligned}$$

- **Equações de movimento**: Calculamos as derivadas parciais de L em relação às coordenadas e velocidades generalizadas a fim de usar Euler-Lagrange.

$$\text{para } \theta \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -mgr\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = -gr\sin\theta}$$

$$\text{para } r \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = -Mg + mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\dot{r} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(M+m)\dot{r}\right] = -Mg + mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(M+m)\ddot{r} = -Mg + mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2}$$

---

2. Considere o movimento de um corpo de massa m que pode mover-se em um plano vertical. O corpo está suspenso por uma mola de constante elástica $k = m\omega_0^2$cujo comprimento natural é l. Escolhendo coordenadas convenientes para descrever o movimento, obtenha a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento correspondentes.

Solução.

- **Coordenadas generalizadas**: Como o corpo está restrito a um plano vertical e a mola permite distenções em direção radial, usamos as coordenadas generalizadas r e θ.

- **Existência de vínculos**: O enunciado impõe o movimento num plano vertical, de forma a podermos trabalhar em duas dimensões. Assim, *a priori* já desconsideramos o uso de uma segunda variável angular na escola das coordenadas generalizadas.

- **Energias cinética e potencial**: Considerando o ponto ao qual a mola está fixa como aquele que define o zero da energia potencial gravitacional, temos

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \ , \ \ V = -mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r-l)^2$$

- **Lagrangeana**:

$$L = T - V \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}(r-l)^2}$$

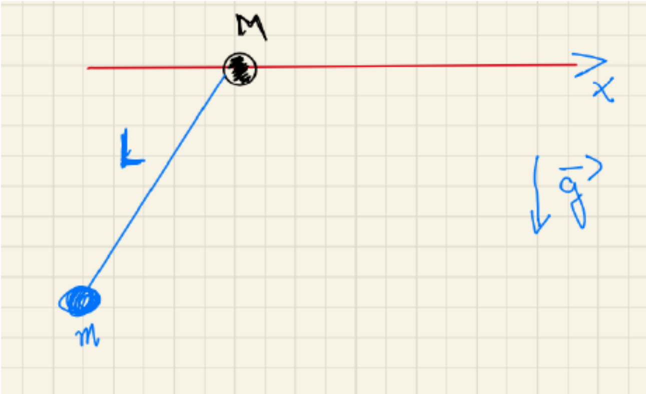
- **Equações de movimento**:

$$\text{para } \theta \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -mgr\sin\theta \ \Rightarrow \ \boxed{2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = -gr\sin\theta}$$

$$\text{para } r \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{r}\right) = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l)}$$

3. O corpo de massa M pode mover-se sem atrito ao longo do eixo x da figura abaixo. Por outro lado, o corpo de massa m está suspenso por uma barra ideal que está presa ao corpo de massa M. Assumindo que o movimento da massa m tem lugar no plano vertical que contém o eixo x, escreva a Lagrangiana do sistema e obtenha as equações de movimento do sistema.



Solução.

- **Coordenadas generalizadas**: Deslocamento horizontal (x) do corpo de massa M, deslocamento angular (θ) de m.

- **Energias**: Convencionamos energia potencial gravitacional nula na altura da barra em que se move M. Além disso, a posição do corpo de massa M é $\vec{r}_M = (x, 0)$ e a do corpo m é dada por $\vec{r}_m = (x - L\sin\theta, L\cos\theta)$. Dessa forma, suas energias são

$$\text{corpo de massa } M\text{: } T_M = \frac{M\dot{x}^2}{2}\ ,\ \ V_M = 0$$

$$\text{corpo de massa } m\text{: } T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - 2L\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2\right)\ ,\ \ V_m = -mgL\cos\theta$$

- **Lagrangeana**:

$$\begin{aligned} L = T - V &= (T_M + T_m) - (V_M + V_m) \\ &= \boxed{\frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2\right) + mgL\cos\theta} \end{aligned}$$

- **Equações de movimento**:

$$\text{para } \theta \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = mL\sin\theta\left(\dot{x}\dot{\theta} - g\right) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mL\dot{x}\cos\theta + mL^2\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow\ \ mL\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dot{x}\cos\theta + L\dot{\theta}\right) = mL\sin\theta\left(\dot{x}\dot{\theta} - g\right)\ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ L\ddot{\theta} - \ddot{x}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta = \sin\theta\left(\dot{x}\dot{\theta} - g\right)\ \ \Rightarrow\ \ \boxed{L\ddot{\theta} - \ddot{x}\cos\theta = -g\sin\theta}$$

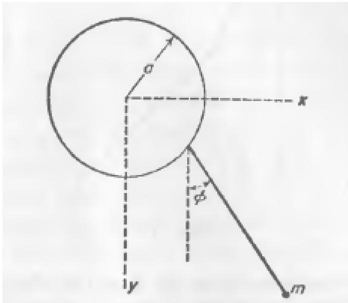
$$\text{para } x \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}\left(M + m\right) - mL\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow\ \Rightarrow\ \ \boxed{\ddot{x}(M+m) - mL\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0}$$

ou, percebendo que x é coordenada cíclica, podemos escrever simplesmente

$$\dot{x}\left(M + m\right) - mL\dot{\theta}\cos\theta = \text{constante.}$$

4. Considere um pêndulo simples de massa m que pode mover-se num plano vertical.

a) Obtenha a Lagrangiana e as equações de movimento no caso do ponto a que o corpo está preso mover-se num círculo no plano vertical com frequência γ. Vide figura abaixo.



b) Repita o item anterior assumindo que o movimento do ponto onde o pêndulo está suspenso **se move apenas horizontalmente**, obedecendo $x = a\cos(\gamma t)$.

c) Repita o item anterior mas assumindo que o movimento é $y = a\cos(\gamma t)$, **com movimento apenas no eixo vertical**.

Solução.

a) Seja θ o ângulo entre o centro do círculo e o ponto de apoio do pêndulo e ϕ o ângulo entre o ponto de apoio do pêndulo e a massa m. Assim, a posição do corpo é dada por

$$\vec{r} = (a\cos\theta + l\sin\phi,\ a\sin\theta - l\cos\phi)$$

onde ϕ é a coordenada generalizada (θ não o é pois sabemos que $\theta = \gamma t$, como dado no enunciado), de forma que a energia cinética assume a forma

$$T = \frac{m}{2}\left[a^2\gamma^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2a\gamma l\dot{\phi}\sin(\phi - \theta)\right] \ ,$$

enquanto que a energia potencial fica, assumindo o zero no eixo horizontal desenhado na figura, dada por

$$U = -mg\left(l\cos\phi - a\sin\theta\right) \ .$$

Assim, a lagrangeana é escrita como

$$L = T - U \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{m}{2}\left[a^2\gamma^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2a\gamma l\dot{\phi}\sin(\phi - \theta)\right] - mg\left(l\cos\phi - a\sin\theta\right)} \ ,$$

e usando Euler-Lagrange, as equações de movimento são dadas por

$$\text{para } \theta\text{: } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l\ddot{\phi} - a\gamma^2\cos(\phi - \theta) = -g\sin\phi}$$

b) Como o deslocamento é apenas horizontal, a posição (cuja única coordenada generalizada é θ) agora é escrita como

$$\vec{r} = \left(a\cos(\gamma t) + l\sin\theta,\ -l\cos\theta\right) \ ,$$

e as energias e a lagrangeana ficam exprimidas da seguinte forma:

$$T = \frac{m}{2}\left[a^2\gamma^2\sin^2(\gamma t) + l^2\dot\theta^2 - 2a\gamma l\dot\theta\sin(\gamma t)\cos\theta\right],\ U = -mgl\cos\theta \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{m}{2}\left[a^2\gamma^2\sin^2(\gamma t) + l^2\dot\theta^2 - 2a\gamma l\dot\theta\sin(\gamma t)\cos\theta\right] + mgl\cos\theta}\,.$$

Dessa forma, para θ a equação de movimento é

$$\boxed{l\ddot\theta - \gamma^2 a\cos(\gamma t)\cos\theta = -g\sin\theta}$$

c) Como o deslocamento do ponto de apoio do pêndulo é agora na vertical, temos a posição escrita como

$$\vec r = \big(l\sin\theta, a\cos(\gamma t) - l\cos\theta\big)\ ,$$

de forma que a lagrangeana tem a seguinte expressão:

$$\boxed{L = \underbrace{\frac{m}{2}\left[l^2\dot\theta^2 + a^2\gamma^2\sin^2(\gamma t) + 2a\gamma l\dot\theta\sin(\gamma t)\sin\theta\right]}_{T} - \underbrace{\{mg[a\cos(\gamma t) - l\cos\theta]\}}_{U}}\,.$$

A equação de movimento correspondente para a coordenada generalizada θ é

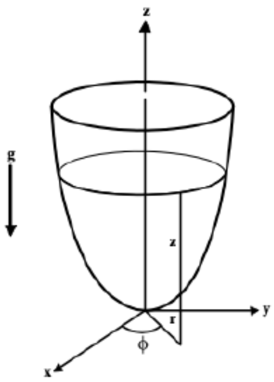
$$\boxed{l\ddot\theta + a\gamma^2\cos(\gamma t)\sin\theta = -g\sin\theta}\,.$$

---

5. Um corpo de massa m move-se sobre o interior de um paraboloide de revolução

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = az \; a > 0 \; .$$

Considere que a energia potencial gravitacional é dada por $U = mgz$. Escreva a Lagrangiana do sistema e obtenha as equações de movimento. Quais são as quantidades conservadas?



Solução.

- **Coordenadas generalizadas**: ρ, ϕ e z.

- **Vínculos**: A equação da parábola dada no enunciado impõe um vínculo holônomo, $\rho^2 = az$, de forma a tornar redundante uma coordenada generalizada. Assim, devemos ter $3 - 1 = 2$ equações de movimento regendo esse sistema.

- **Energias cinética e potencial**:

$$U = mgz = \frac{mg\rho^2}{a} \; , \;\; T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \frac{4}{a^2}\dot{\rho}^2\rho^2\right) \tag{5.1}$$

- **Lagrangeana**:

$$L = T - U \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \frac{4\dot{\rho}^2\rho^2}{a^2}\right) - \frac{mg\rho^2}{a}} \tag{5.2}$$

- **Equações de movimento**:

$$\text{para } \rho \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\left(\dot{\phi}^2 + \dfrac{4\dot{\rho}^2}{a^2}\right) - \dfrac{2mg\rho}{a} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \dfrac{4m\dot{\rho}\rho^2}{a^2} + m\dot{\rho} \end{cases} \Rightarrow \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4m\dot{\rho}\rho^2}{a^2} + m\dot{\rho}\right) = m\rho\left(\dot{\phi}^2 + \frac{4\dot{\rho}^2}{a^2}\right) - \frac{2mg\rho}{a} \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{4}{a^2}\left(\ddot{\rho}\rho^2 + 2\rho\dot{\rho}^2\right) + \ddot{\rho} = \rho\left(\dot{\phi}^2 + \frac{4\dot{\rho}^2}{a^2}\right) - \frac{2g\rho}{a}} \tag{5.4}$$

$$\text{para } \phi \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\rho^2\dot{\phi} \end{cases} \Rightarrow \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\rho^2\dot{\phi}\right) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi} = 0} \, , \tag{5.5}$$

ou $m\rho^2\dot{\phi} = L$ (onde L é uma constante). As quantidades conservadas são a energia (pois o sistema não é dissipativo, e portanto invariante mediante translações temporais) e o momento angular na direção z (associado ao deslocamento angular ϕ) - esse último é evidenciado pelo fato de ϕ ser uma coordenada cíclica (*i.e.* $\partial_\rho L = 0$).