4302305 - Mecânica I (Prof. Oscar Éboli)
Primeiro semestre de 2023
Dúvidas sobre as soluções devem ser enviadas para andriolo@usp.br

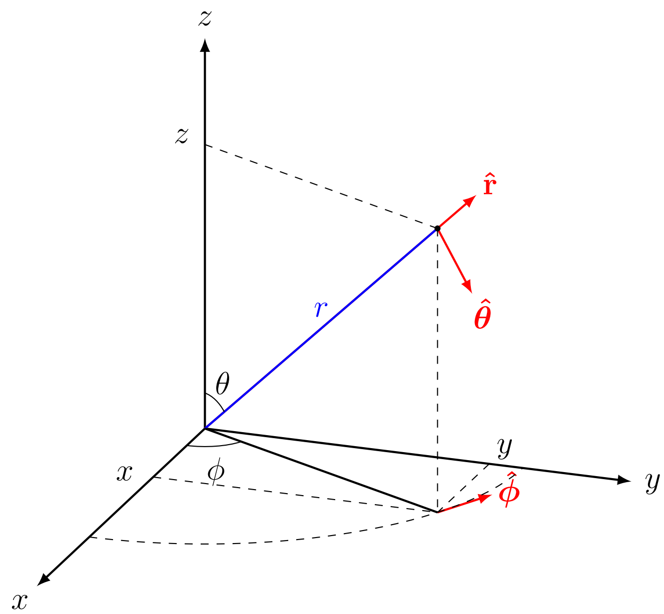
Solução da Lista 1

---

1. Utilizando coordenadas esféricas, obtenha:

a) A velocidade de uma partícula;

a) A aceleração de uma partícula.



a) Sabemos que a posição de uma partícula qualquer num sistema de coordenadas esféricas, em que a base (r, θ, ϕ) é definida por

$$\begin{cases} \hat{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ \hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \\ \hat{\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \end{cases},$$

é $\vec{r} = r\hat{r}$. A velocidade dessa partícula é então

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,(r\hat{r})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}.$$

Podemos escrever $\dot{\hat{r}}$ em termos dos outros versores usando a regra da cadeia:

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\frac{d\phi}{dt} = \underbrace{(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\phi)}_{\hat{\theta}}\,\dot{\theta} + \underbrace{(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)}_{\sin\theta\hat{\phi}}\,\dot{\phi}.$$

Logo,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}}$$

b) A aceleração da partícula é dada por $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$. Assim, basta derivarmos o resultado do item anterior, abrindo as regras da cadeia

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}r\sin\theta\hat{\phi}\right) \\
&= \left(\ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}\right) + \left(\ddot{\phi}r\sin\theta\hat{\phi} + \dot{\phi}\dot{r}\sin\theta\hat{\phi} + \dot{\phi}r\frac{d\sin\theta}{dt}\hat{\phi} + \dot{\phi}r\sin\theta\dot{\hat{\phi}}\right)
\end{aligned}
$$

como as derivadas de cada versor correspondem a

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} \\
\dot{\hat{\theta}} = \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\dfrac{d\phi}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi} \\
\dot{\hat{\phi}} = \dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi}\dfrac{d\phi}{dt} = -\dot{\phi}\left(\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}\right)
\end{cases}
$$

então temos

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{v}} = \ddot{r}\hat{r} &+ \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}\right) + \\
&+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi}\right) + \\
&+ \ddot{\phi}r\sin\theta\hat{\phi} + \dot{\phi}\dot{r}\sin\theta\hat{\phi} + \dot{\phi}\dot{\theta}r\cos\theta\hat{\phi} + \dot{\phi}r\sin\theta\left(-\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta}\right) \\
= &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 r\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 r\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \\
&+ \left(2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + \ddot{\varphi}r\sin\theta\right)\hat{\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 r\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 r\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + \ddot{\varphi}r\sin\theta\right)\hat{\phi}}
$$

2. Considere um sistema de N partículas. Mostre que a energia cinética total com respeito a um dado referencial é a soma da energia cinética com respeito ao centro de massa mais a energia cinética do centro de massa.

Considerando um referencial inercial em relação ao qual temos um sistema de N partículas, denotemos por $\vec{R}$ a posição de seu centro de massa, e por $\{\vec{r}_i\}_{i=1,\ldots,N}$ a posição de cada uma das partículas que constituem o sistema. Em relação ao centro de massa, cada uma das partículas têm coordenada $\vec{r}_i{}'$, de forma que

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i{}' \,. \tag{2.1}$$

Usando essa expressão, podemos calcular a energia a energia cinética desse sistema em relação ao referencial inercial em termos da coordenada do centro de massa e das coordenadas relativas das partículas:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \tag{2.2}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i{}' \right)^2 \tag{2.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{R}}^{\,2} + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i{}' + \dot{\vec{r}}_i{}'^{\,2} \right) \tag{2.4}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{R}}^{\,2} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i{}' \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i{}'^{\,2} \right) \tag{2.5}$$

$$= \frac{\dot{\vec{R}}^{\,2}}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right)}_{M} + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i{}' \right)}_{0} + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i{}'^{\,2} \right) \tag{2.7}$$

$$= \frac{M\dot{\vec{R}}^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i{}'^{\,2}. \tag{2.8}$$

A somatória do meio se anula em (2.7) pois a menos da derivada em $\dot{\vec{r}}_i{}'$, trata se da posição do próprio centro de massa em relação a si mesmo. Na expressão (2.8), o primeiro termo é a energia cinética do centro de massa, e a somatória é a energia cinética das partículas relativa a esse ponto.

3. Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x está sujeita a uma força $-\alpha\dot{x}$. Partindo da posição $x(0) = x_0$ com velocidade $\dot{x}_0 = v_0$, obtenha $v(t)$ e $x(t)$.

Pela segunda lei de Newton, a força resultante dada no enunciado pode ser equacionada com a aceleração da partícula:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\alpha\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{3.1}$$

Como o movimento está restrito a uma dimensão, por simplicidade trabalharemos com os módulos das quantidades de interesse. A equação acima é mais facilmente solucionável se usarmos a variável $v = \dot{x}$. Assim,

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \quad\Rightarrow\quad m\dot{v} = -\alpha v \quad\Rightarrow\quad \dot{v}(t) = -\frac{\alpha}{m}v(t). \tag{3.2}$$

Integrando a equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\alpha}{m}\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v'}{v'} = -\frac{\alpha}{m}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' \quad\Rightarrow \\ &\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\alpha}{m}(t-t_0) \quad\Rightarrow\quad v(t) = v_0\exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t-t_0)\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando a condição de contorno $\dot{x}_0 = v_0$, concluimos que $t_0 = 0$. Logo,

$$\boxed{v(t) = v_0\exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)}. \tag{3.4}$$

Por outro lado, a posição $x(t)$ é obtida ao integrarmos a expressão acima:

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\;v(t') = \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\;v_0\exp\left(-\frac{\alpha t'}{m}\right) \quad\Rightarrow \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow\quad \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\;\dot{x}(t') = v_0\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\;\exp\left(-\frac{\alpha t'}{m}\right) \quad\Rightarrow \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow\quad [x(t)]_{t_0=0}^{t} = v_0\left(-\frac{m}{\alpha}\right)\left[\exp\left(-\frac{\alpha t'}{m}\right)\right]_{t_0=0}^{t} \quad\Rightarrow \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow\quad x(t) = x(0) + v_0\left(-\frac{m}{\alpha}\right)\left[\exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right) - 1\right] \quad\Rightarrow \tag{3.8}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)\right]}. \tag{3.9}$$

4. Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão no semi-eixo $x > 0$ sob ação do potencial

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}},$$

onde $a, b > 0$. Obtenha

a) A força atuando na partícula;

b) Os possíveis movimentos que a partícula pode descrever;

c) A distância de equilíbrio e o período de pequenas oscilações em torno do mínimo.

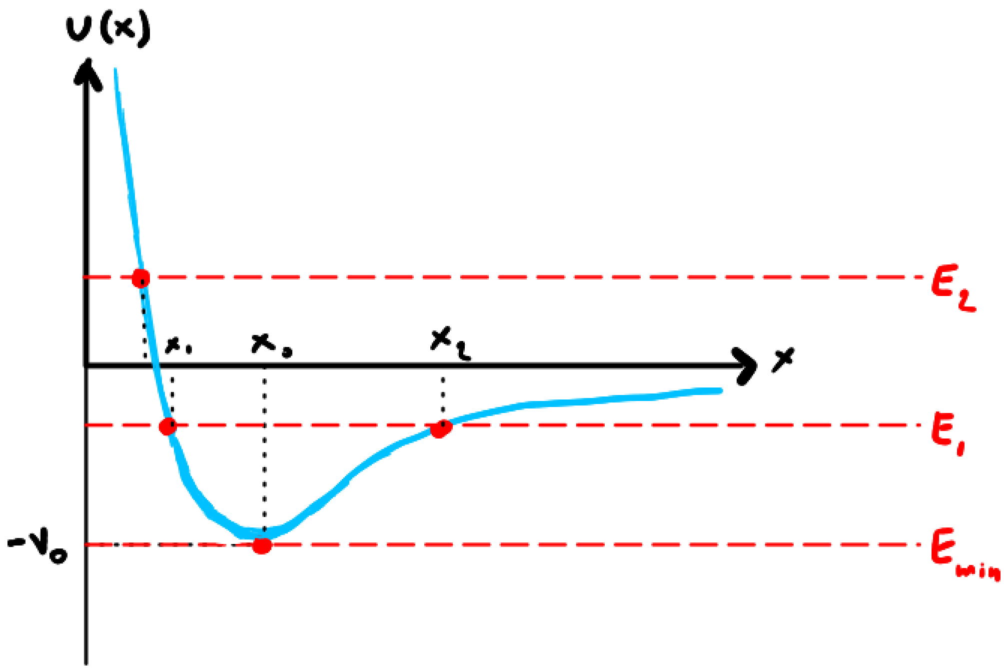
Solução.

a) O módulo da força F atuando na partícula, na direção x, é dada por

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}\right) = \frac{(-6)a}{x^7} - \frac{(-12)b}{x^{13}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = -\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}}}$$

b) Os possíveis movimentos que uma partícula sujeita ao potencial $V(x)$ dado são:

- $E \in (-V_0, 0)$: movimento oscilatório em torno do mínimo
  Enquanto E estiver abaixo de 0 e acima do limite inferior importo pelo potencial dado, $-V_0$, haverá movimento oscilatório em torno do mínimo dessa função. Quanto maior for o valor de E nesse intervalo, maior a anarmonicidade da oscilação.
- $E \in [0, +\infty)$: trajetória retilínea assintótica
  Caso a energia seja nula ou positiva, a partícula tende assintoticamente a $+\infty$.
- $E = -V_0$: repouso.
  A partícula permanece parada em x_0 com a menor energia possível.



c) A distância de equilíbrio é a abscissa x_0 tal que $F(x_0) = 0$. Assim,

$$-\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = +\left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}},$$

com o sinal positivo pois o enunciado delimitou o problema ao semi-eixo positivo.

Já o período de pequenas oscilações harmônicas em torno desse ponto pode ser obtido por meio da expansão da energia potencial em séries de Taylor, centrada em x_0, até segunda ordem:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \\ &= U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{U''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \mathcal{O}(x^3). \end{aligned}$$

Como $U'(x_0)$ é justamente a derivada de $U(x)$ no ponto crítico x_0, o termo de primeira ordem é nulo. Ao tomarmos a derivada $U'(x)$, o termo constante $U(x_0)$ também se anula, e resta

$$F = m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} = -U''(x_0)(x - x_0)$$

de forma que

$$m\ddot{x} = -kx = -U''(x_0)x \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\ k = U''(x_0).$$

Note que a expressão acima de T é geral para qualquer movimento de pequenas oscilações em torno de mínimos locais de um dado $U(x)$ (ou seja, basta calcular a segunda derivada de $U(x)$ e avaliá-la no ponto de mínimo, e você terá o período de pequenas oscilações). Podemos escrever o período de pequenas oscilações desse exercício, após alguma manipulação algébrica, como:

$$\boxed{T = \frac{\pi}{3a} x_0 \sqrt{2mb}}$$

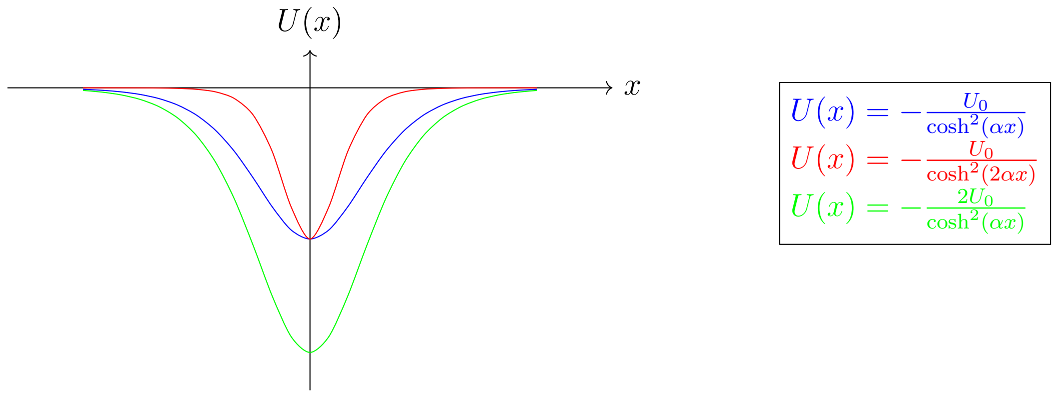
5. Utilizando a conservação de energia e integração, obtenha a solução de uma partícula na presença do potencial

$$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}.$$

Solução.

A solução de um corpo sujeito a um dado potencial geralmente se refere à posição em função do tempo. No caso desse exercício, aceitamos como resposta essa função horária ou o período (não perturbativo) de oscilação.

Considerações gerais: Trata-se de um potencial dado por uma função par, que tem um mínimo local (e global) em $x = 0$, e tende assintoticamente a 0 conforme $x \to \pm\infty$. O coeficiente U_0 determina a “profundidade" desse poço de potencial, enquanto o coeficiente α está relacionado à “largura" desse poço, como mostra a figura abaixo.



A energia total (E) de uma partícula nesse potencial está compreendida em $[-U_0, +\infty)$. Note que se $E = U_0$, ela necessariamente deve estar em repouso no ponto $x_0 = 0$. Se $E \in (U_0, 0)$, a partícula oscila em torno do mínimo. Caso $E > 0$, a partícula vai a $x \to \pm\infty$ em movimento não uniforme (e o sinal depende do sentido da velocidade inicial).

Assim, o período de uma partícula nesse potencial é bem definido se sua energia total E estiver em $(-U_0, 0)$. Assumindo que E está nesse intervalo, a conservação de energia nos permite escrever

$$E = T(\dot{x}) + U(x) = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}}_{\text{energia num ponto qualquer}} = \underbrace{-\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x_0)}}_{\text{energia no ponto extremal}} . \tag{5.1}$$

Dessa forma, podemos substituir a expressão acima na fórmula (deduzida na aula 3) para o período de oscilação qualquer:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{5.2}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x_0)} + \frac{U_0}{\cosh(\alpha x)}}} \tag{5.3}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)} - \frac{1}{\cosh(\alpha x_0)}}} \tag{5.4}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\cosh(\alpha x)}{\sqrt{1 - \frac{\cosh^2(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x_0)}}}\,\mathrm{d}x \tag{5.5}$$

Consideremos a substituição $u = \sinh(\alpha x)$ ($\Rightarrow \mathrm{d}u = \alpha \cosh(\alpha x)\,\mathrm{d}x$) e a identidade $\cosh^2(\alpha x) = 1 + \sinh^2(\alpha x)$. Efetuando a integral,

$$T = \sqrt{\frac{2m}{U_0}} \int\limits_{\sinh(-\alpha x_0)}^{\sinh(\alpha x_0)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{u_0^2}}} = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int\limits_{\sinh(-\alpha x_0)}^{\sinh(\alpha x_0)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}$$

chegamos a

$$T = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{-E}} \left[\sin^{-1}\left(\frac{u}{u_0}\right)\right]_{\sinh(-\alpha x_0)}^{\sinh(\alpha x_0)} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}$$

As respostas que chegaram a um $x(t)$ compatível com o período acima também foram consideradas.