MAP 0313 - 2022 2° Semestre - IME USP
Substitutiva da 1ª Prova, IME-USP, aos 19 de dezembro de 2022.

Instruções:

(i) A resolução desta prova deve ser entregue, em um arquivo no formato pdf, não codificado e não compactado, na página da disciplina no e-disciplinas em espaço destinado para isso até as 23:55 horas do dia 20/12/2022.

(ii) Caso tenha problemas com o depósito do arquivo com a a solução da prova no e-disciplinas, envie um arquivo pdf (sem compactação, senha ou outras nuances estranhas) em um e-mail para garc341@gmail.com com o "assunto" *substitutiva da primeira prova de MAP0313* com a resolução.

(iii) Em uma questão com mais de um item, o estudante pode resolver um item sem ter resolvido os itens anteriores e poderá nessa solução usar propriedades enunciadas nos itens anteriores dessa questão, mesmo que não os haja demonstrado (ou o tenha feito de modo incorreto).

(iv) A prova é com consulta a textos, cadernos e similares, conversar e trocar ideias com o professor e com os colegas não é proibida, resolver a prova deve ser, antes de tudo, uma atividade de aprendizado. Mas a redação da resolução das questões deve ser feita de modo *estritamente individual*. A não observância desta norma pode causar sérios problemas à nota da prova.

Questão 1 Considere a equação de diferenças

$$u_{k+3} = -\frac{u_k}{4} - \frac{3u_{k+1}}{8} + \frac{9u_{k+2}}{4}, \ k \in \mathbb{N}.$$

(a) Demonstre que o conjunto dos $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$ para os quais a solução $u = (u_k)$ dessa equação com condições iniciais $u_\ell = \beta_\ell, \ \ell = 0, 1, 2,$, satisfaz $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ forma um subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ e exiba uma base desse subespaço.

(b) Determine a solução geral de $u_{k+3} = -\frac{u_k}{4} - \frac{3u_{k+1}}{8} + \frac{9u_{k+2}}{4} + \frac{1}{2^k}, \ k \in \mathbb{N}.$

Questão 2 Considere a equação de diferenças

$$u_{k+4} = \frac{1}{2}[(1-2\alpha)(u_{k+3}+u_{k+1}) + (\alpha-2)u_{k+2} + \alpha u_k], \ k \in \mathbb{N},$$

em que α é um número real.

(a) Mostre que $u_k = \frac{1}{2^k}$ e $v_k = (-\alpha)^k$ são soluções desta equação.

(b) Suponha que $|\alpha| \leq 1$ e $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Prove que então todas as soluções desta equação são limitadas. Determine, se existirem, as soluções periódicas desta equação (diferentes da solução identicamente nula).

(c) Faça $\alpha = \frac{-1}{2}$ e decida se existem soluções desta equação que não são limitadas. Justifique sua resposta.

Questão 3 Seja $n \geq 2$ um natural e considere o problema de contorno

$$\begin{cases} 4u_{k+2} - 9u_{k+1} + 4u_k = 0, \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Mostre que o problema (1) tem sempre solução, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Prove que (1) tem apenas uma solução, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.