MAP 2122 - MAP 0313
Método de Simpson

Notações e Hipóteses

Problema

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular encontrar uma aproximação de $I = \int_a^b f(x)dx$ e obter uma estimativa do erro cometido nessa aproximação.

Notações e Hipóteses

Problema

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular encontrar uma aproximação de $I = \int_a^b f(x)dx$ e obter uma estimativa do erro cometido nessa aproximação.

Ideia

Tomar $p(x)$ o polinômio interpolador da tabela

$x_0 = a$	$x_1 = \frac{a+b}{2}$	$x_2 = b$
$f(a)$	$f(\frac{a+b}{2})$	$f(b)$

e aproximar I por $I_S = \int_a^b p(x)dx$.

$p(x)$ na forma de Newton

Note que $x_1 = \frac{a+b}{2}$ é o ponto médio entre $x_0 = a$ e $x_2 = b$, assim o intervalo $[a, b]$ fica dividido ao meio pelo ponto x_1 e, se $h = \frac{b-a}{2}$, tem-se $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$.
Como usual, faça $y_j = f(x_j)$, e veja que

$$f_0[x_0] = y_0,\ \ f_1[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{h},\ \ f_2[x_0, x_1, x_2] = \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}.$$

Na forma de Newton, o polinômio interpolador da tabela dada é

$$\begin{aligned} p(x) &= f_0[x_0] + f_1[x_0, x_1](x - x_0) + f_2[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - a) + \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}(x - a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Cálculo de I_S

Lembre que $h = \frac{b-a}{2}$ e note que

1. $\displaystyle\int_a^b (x-a)dx = \frac{(x-a)^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{(b-a)^2}{2} = 2h^2$
2. $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-\tfrac{a+b}{2})dx = \int_a^{a+2h} (x-a)(x-(a+h))dx$

Cálculo de I_S

Lembre que $h = \frac{b-a}{2}$ e note que

1. $\int\limits_a^b (x-a)dx = \frac{(x-a)^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{(b-a)^2}{2} = 2h^2$
2. $\int\limits_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})dx = \int\limits_a^{a+2h} (x-a)(x-(a+h))dx = \int\limits_{-h}^{h} (t+h)tdt = \frac{2h^3}{3}$

Portanto, por (1),

$$I_S = \int_a^b p(x)dx = 2y_0h + 2h(y_1 - y_0) + \frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ou seja

$$I_S = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 + 4y_1) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \tag{2}$$

Estimativa de Erro

A estimativa de erro cometido ao aproximar $I = \int_a^b f(x)dx$ por $I_S = \int_a^b p(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$, em que $h = \frac{b-a}{2}$, não será demonstrada aqui, apenas enunciada, e será usada sem cerimônia.

Fato 1.

Suponha que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é quatro vezes derivável e* $f^{(4)}(x)$ *é contínua, então, se* $M_4 = \max_{\xi\in[a,b]}\{|f^{(4)}(\xi)|\}$, *tem–se*

$$|I - I_S| \leq \frac{h^5}{90} M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880} M_4 \quad (3)$$

Assim, se $q(x)$ é um polinômio de grau 3, o método de Simpson fornece o valor exato da integral de $q(x)$ em qualquer intervalo $[a, b]$, ou seja, $\int_a^b q(x)dx = \frac{b-a}{6}(q(a) + 4q(\frac{a+b}{2}) + q(b))$.

Aplicações

1 - Aproximação para $\log 2$

Como $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, ao aplicar o método de Simpson para aproximar a integral de $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[1, 2]$, obtém–se

$$\log 2 \approx \frac{1}{6}(f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + f(2)) = \frac{1}{6}(1 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{2}) = \frac{25}{36}.$$

Aplicações

1 - Aproximação para $\log 2$

Como $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, ao aplicar o método de Simpson para aproximar a integral de $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[1, 2]$, obtém–se

$$\log 2 \approx \frac{1}{6}(f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + f(2)) = \frac{1}{6}(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{25}{36}.$$

Para encontrar uma estimativa do erro cometido nessa aproximação, veja que $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4}$ e $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$.
Assim $\max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = 24$ e (3) mostra que

$$|\log 2 - \frac{25}{36}| \leq \frac{24}{2880} = \frac{1}{120} = .008\overline{3}.$$

Aplicações

2 - Uma aproximação para o perímetro de uma elipse

Considere a elipse de eixos $2a > 0$ e $2b > 0$. A equação canônica dessa elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e demonstra–se que seu perímetro é dado por

$$\ell = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

Para obter uma aproximação de ℓ, pode usar-se o método de Simpson para avaliar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta$, com $f(\theta) = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ e obter a seguinte aproximação para o perímetro da elipse:

$$\ell = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta \approx \frac{\pi}{3}(f(0) + 4f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{3}(b + 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a)$$