Lista 5
…e as Derivadas e as Integrais viveram felizes para sempre.

Victor Saliba [*]
Thales Domingues [†]
André Salles de Carvalho [‡]

Data de Entrega: 11 de Dezembro de 2022

[*]E-mail: victorsaliba13@usp.br; WhatsApp: (12) 99145-9087.
[†]E-mail: thalesdaviddom@usp.br.
[‡]E-mail: andre@ime.usp.br.

Instruções:

1. Essa lista está dividida em três grupos de exercícios, incluindo o Grupo Final.

2. Não é necessário resolver todos os exercícios! Tente resolver aqueles que você achar mais interessantes. Se você não possui preferência, ou não achou nenhum aparentemente divertido, tente resolver os exercícios recomendados primeiro. Esses exercícios estão indicados na nota de rodapé de cada seção.

3. Escolha três exercícios dos dois primeiros grupos para entregar. Além disso, resolvam (ou pelo menos tentem resolver) em grupo o exercício 10. Escrevam em conjunto a resolução de vocês desse exercício (como num artigo colaborativo). A soma das notas dos três primeiros exercícios, que devem ser entregues individualmente, será, no máximo, igual a 5. Os outros 5 pontos serão referentes à resolução da turma do exercício 10. A colaboração, portanto, será fundamental nesse momento!

4. Envie a sua resolução para o e-mail victorsaliba13@usp.br com o assunto "Resolução da Lista 5 de Matemática I". Entreguem a resolução da turma do exercício 10 para o mesmo e-mail com o assunto "Resolução daquele problema da Lista 5".

5. Os exercícios não estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Todavia, serão concedidos três símbolos distintos para os exercícios "interessantes": δ para os exercícios particularmente difíceis (que geralmente precisam de algum truque não tão óbvio para serem resolvidos), π para os problemas difíceis (que requerem tanto um truque, quanto um cuidado maior na resolução) e †† para o exercício 10.

6. Não desanime se não conseguir resolver alguns exercícios ou cometeu algum erro na resolução, erros fazem parte do processo de aprendizado e quanto mais tempo gastar tentando solucionar um exercício, mais você irá aprender com ele.

7. Se houver dúvidas, sugestões ou quiser alguma (outra) dica, basta nos contactar.

8. A colaboração é não apenas permitida, mas encorajada. Caso tenha precisado de ajuda nos três primeiros exercícios, por favor, dê o devido crédito, mencionando nomes.

9. Por último, mas definitivamente o mais importante, divirta-se!

Exercícios:

Grupo I[1]

Exercício 1. Calcule:

(a) $\int_1^2 x^3 \log x dx$;

(b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$;

(c) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^6 x dx$;

(d) $\int \cot x dx$;

(e) $\int \frac{\sin(x^{-2})}{x^3} dx$;

(f) $\int \log^3 x dx$.

Exercício 2. Considere os itens a seguir:

(a) Prove que, se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ são integráveis, então

$$\int_0^2 (x-1) f\left[(x-1)^2\right] dx = 0 = \int_0^{\pi} g(\sin x) \cos x dx.$$

(b) Sendo $n \geq 2$ um número natural, prove que

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

Exercício 3 (δ). Para cada natural n defina $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. Prove que

$$(2n+1) I_n = 2n I_{n-1}$$

e calcule I_{17}.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx.$$

Prove que:

(a) $f(n+1) < f(n)$ para todo natural n;

(b) $f(n+2) + f(n) = \frac{1}{n+1}$ para todo natural n;

(c) $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}$ para todo natural $n > 2$.

[1]Exercícios recomendados: 1, 2, 4 e 5.

Exercício 5 (π). Seja Li $: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Prove que:

(a) $\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{2}{\log 2}$;

(b) $\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!x}{\log^{k+1} x} + n! \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} x} + c_n$, com $c_n = \cdots$;

(c) Li é injetora e sua imagem é $\ldots$;

(d) Existe b tal que $\mathrm{Li}(x) = \int_b^{\log x} \frac{e^t}{t} dt$. Encontre-o!

Grupo II[2]

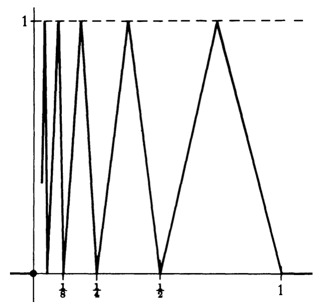
Exercício 6 (δ)**.** Para cada uma das funções f abaixo, se $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, determine os pontos x em que $F'(x) = f(x)$. (Cuidado! Pode ser que $F'(x) = f(x)$, mesmo que f não seja contínua no ponto x.)

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

(d) f é a função da figura abaixo.



Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que:

(a) $f(0) = 0$, ou então $f(0) = 1$ e $f(x) \neq 0$ para todo x;

(b) $f'(x)f(y) = f'(y)f(x)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(c) Existe uma constante c tal que $f'(x) = cf(x)$ para todo x;

(d) $f(x) = e^{cx}$, ou então $f = 0$. (Dica: talvez a função $g(x) = f(x)e^{-cx}$ ajude…)

Exercício 8. Sejam $f, u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f contínua, e u e v deriváveis.

(a) Seja $G(x) = \int_0^{v(x)} f(t)dt$. Prove que G é derivável e calcule $G'(x)$;

(c) Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \int_0^{e^x} xf(t)dt$;

(b) Seja $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Prove que H é derivável e calcule $H'(x)$.

[2]Exercícios recomendados: 6, 7 e 8.

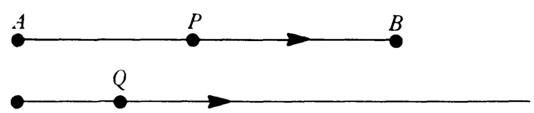
Exercício 9 (π)**.** Um ponto P move-se ao longo de um segmento de reta AB de comprimento 10^7 enquanto um outro ponto Q move-se ao longo de um eixo infinito (veja a figura abaixo). A velocidade de P é sempre igual à distância de P a B (ou seja, $P'(t) = 10^7 - P(t)$), enquanto Q se move com uma velocidade constante igual a $Q'(t) = 10^7$. A distância percorrida por Q após um tempo t é definida como sendo o *logaritmo Neperiano* da distâcia de P a B no instante t. Então

$$Q(t) = \text{Nap log } \left[10^7 - P(t)\right].$$

Essa foi a definição de logaritmo dada por Napier ($1550 - 1617$) em sua publicação de 1614, *Mirifici logarithmonum canonis description.* O número 10^7 foi escolhido pois as tabelas de Napier (feitas com o intuito de realizar calculos astronômicos) listaram os logaritmos de alguns valores que, até aquele momento, se estendiam a sete casas decimais. Mostre que:

(a) $10^7 t = \text{Nap log } [10^7 - P(t)]$;

(b) $\text{Nap log } x = 10^7 \log \frac{10^7}{x}$.



Grupo Final

Exercício 10 (††). Sejam $c \in (a, b)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Decida se as afirmações a seguir são falsas ou verdadeiras, para as que forem falsas apresente um (ou mais!) contra-exemplo(s) para mostrar isso, para as verdadeiras faça as respectivas demonstrações.

(i) F é derivável no ponto c.

(ii) Se f é derivável no ponto c, então F é derivável no ponto c.

(iii) Se f é derivável no ponto c, então F' é contínua no ponto c.

(iv) Se f' é contínua no ponto c, então F' é contínua no ponto c.