P02 Física Matemática 02

Q1 Considere o espaço vetorial V das funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciáveis e que satisfazem a seguinte condição de contorno:

$$f(b) - \alpha f(a) = 0,$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Desta forma o espaço vetorial V depende da constante α e poderia ser denotado por $V(\alpha)$. Podemos definir em $V(\alpha)$ o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Considere o operador linear

$$P = -i\frac{d}{dx}$$

atuando em V como

$$Pf = -i\frac{df}{dx}.$$

Mostre que o operador P é formalmente auto-adjunto, ou seja,

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle .$$

para uma escolha adequada de α.

Q2. Considere o espaço vetorial V das funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis e que satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0,$$

$$\beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0,$$

onde $f'(x)$ denota a derivada $\frac{df(x)}{dx}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são constantes reais. Desta forma o espaço vetorial V depende destas constantes e poderia ser denotado por $V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Vamos assumir que no mínimo um dos α e um dos β é não nulo.

Podemos definir em $V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)x.$$

Considere o operador linear

$$L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

atuando em V como

$$(Lf)(x) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df(x)}{dx}\right) + q(x)f(x).$$

Assumiremos que $p(x) > 0$ e diferenciável no intervalo $[a, b]$.

(a) Verifique que $V = V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ é de fato um espaço vetorial.

(b) Mostre que o operador L é formalmente auto-adjunto, ou seja,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle .$$

Q3. No contexto da questão anterior, considere a equação

$$(Lf)(x) = \lambda\rho(x)f(x) \tag{1}$$

onde $\rho(x) > 0$ no intervalo $[a, b]$, $f \in V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) E equação (1) reproduz muitas equações que são importantes na física. Escolha as funções $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$ de forma a reproduzir as equações de Helmholtz, Legendre e Bessel.

(b) A equação (1) define o chamado problema de Sturm-Liouville. Dados os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ e as funções $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$, o problema de Sturm-Liouville consiste em determinar pares $(\lambda, f_\lambda(x))$ que satisfazem (1). Note que (1) é análogo a um problema de autovalores. As funções $f_\lambda(x)$ são chamadas de autofunções e os correspondentes λ são chamados de autovalores.

Vamos definir o seguinte produto escalar em V

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx.$$

Mostre que duas autofunções f_{λ_1} e f_{λ_2} satisfazem

$$\langle f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}\rangle_\rho = 0$$

se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Q4. Considere o espaço de Hilbert $L^2([0, 2\pi], dx)$ e o operador de multiplicação Q que atua em funções $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ como

$$(Qf)(x) = xf(x).$$

(a) Mostre que o operador Q é um operador limitado.

(b) Mostre que Q é autoadjunto, ou seja, $\langle Qf, g\rangle = \langle f, Qg\rangle$

(c) Mostre que a equação de autovalores

$$Qf_\lambda = \lambda f_\lambda$$

implica que $f_\lambda(x) = 0$ para todo $x \neq \lambda$.

Observação: *isto significa que f_λ é nula quase em toda parte e portanto está na classe de equivalência da função nula. Em outras palavras, Q não possui autovetores!*

(d) O operador Q possui algo parecido com autofunções para $\lambda \in [0, 2\pi]$ se admitirmos o uso da "função"delta de Dirac. Usando esta liberdade, bastante utilizada em física, escreva as "autofunções"$f_\lambda(x)$ para λ no intervalo $[0, 2\pi]$.

(e) Note que a função delta de Dirac não é um elemento de $L^2([0, 2\pi], dx)$. Qual seria a norma desta função?