Eletromagnetismo Avançado — 7600035 — 7 de novembro de 2022

Solução da segunda prova (P_2)

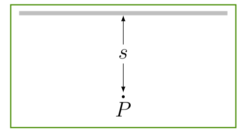

Figura 1: Questão 1

1. O fio retilíneo mostrado na figura 1 está inicialmente livre de correntes elétricas. No instante $t = 0$ liga-se subitamente uma corrente I_0, que permanece com esse valor até o instante $t = \tau$. Encontre o potencial vetor em função do tempo no ponto P, à distância s do fio.

   Solução

   Vamos posicionar a origem de um sistema de referências no ponto do fio mais próximo de P e orientar o eixo z ao longo do fio. Convém identificar dois instantes especiais, $t_1 \equiv s/c$ e $\mathrm{d}t_2 \equiv \tau + s/c$. Antes de $t = t_1$, nenhum sinal chega a P, e o potencial vetor é nulo. No intervalo $t_1 > t > t_2$, o ponto P recebe sinal da região do fio que vai de $z = -\sqrt{c^2t^2 + s^2}$ até $z = \sqrt{c^2t^2 + s^2}$. Assim, o potencial vetor nesse intervalo de tempo é dado por

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\sqrt{c^2t^2+s^2}}^{\sqrt{c^2t^2+s^2}} \frac{I_0\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+s^2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

   Efetuada a integral, resulta que

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln(\sec\theta + \tan\theta)\hat{\mathbf{z}},$$

   onde $\tan\theta = \sqrt{c^2t^2 + s^2}/s$.

   Para $t > t_2$, o ponto P recebe sinal de um trecho do fio à direita da origem, que se estende desde $\sqrt{c^2(t-\tau)^2 + s^2}$ a $\sqrt{c^2t^2 + s^2}$ e do trecho simétrico, à esquerda da origem. O potencial vetor, agora, é

$$\vec{\mathbf{A}} = 2\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\sqrt{c^2(t-\tau)^2+s^2}}^{\sqrt{c^2t^2+s^2}} \frac{I_0\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+s^2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

   Efetuada a integral, resulta que

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{\sec\theta_1 + \tan\theta_1}{\sec\theta_2 + \tan\theta_2} \hat{\mathbf{z}},$$

   onde $\tan\theta_1 = \sqrt{c^2t^2 + s^2}/s$ e $\tan\theta_2 = \sqrt{c^2(t-\tau)^2 + s^2}/s$.

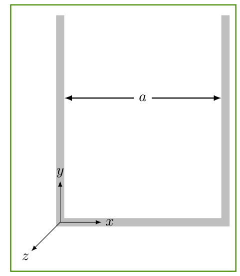

Figura 2: Questão 2

2. A figura 2 mostra uma guia de onda com formato de calha retangular. A guia é muito comprida nas direções y e z, e tem largura a na direção x.

   (a) Se a guia fosse fechada no topo, não seria possível propagar ondas TEM nela. No caso, é possível; explique por quê;

   (b) Escreva a expressão mais geral para o campo elétrico no espaço entre as paredes da calha;

   (c) Combine a lei de Faraday com a lei de Gauss para encontrar uma equação para a componentes x do campo elétrico;

   (d) Resolva essa equação para encontrar a dependência em x de E_x.

   (e) O que você precisaria fazer para encontrar a dependência em y de E_x? Não é necessário resolver equações, basta indicar o procedimento.

Solução

a No sistema de coordenadas da figura, os campos elétrico e magnético de uma onda podem ser escritos nas formas

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}}(x,y)e^{i(kz-\omega t)}; \tag{1a}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{0}}(x,y)e^{i(kz-\omega t).} \tag{1b}$$

As ondas TEM não têm componente z. Assim, da lei de Faraday, segue que a componente z do rotacional do campo elétrico é nula. O campo elétrico pode, portanto, ser escrito como gradiente de um potencial. Da equação de Poisson dentro da guia, vê-se que esse potencial obedece à equação de Laplace. Se a guia for fechada no topo, o potencial será nulo ao longo de um contorno fechado em torno do espaço interno, o que significa que o potencial será nulo no interior desse contorno e que o campo elétrico será nulo. Já se a guia for aberta, como na figura, essa restrição não existe, e ondas TEM poderão propagar-se.

b A expressão mais completa para a onda TEM é a que aparece na Eq. (1), acima, onde

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = E_x(x,y)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x,y)\hat{\mathbf{y}}. \tag{2}$$

c A lei de Faraday (componente z) diz que

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

ou, se derivarmos em relação a y, que

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0. \tag{4}$$

A Lei de Gauss, com $\rho = 0$, assume a forma

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

ou, se derivarmos em relação a x,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

A soma das Eqs. (4) e (6) mostra então que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0, \tag{7}$$

que é o resultado desejado.

d Para resolver a Eq. (7), precisamos antes de mais nada conhecer as condições de contorno para E_x em $x = 0$ e $x = a$ (paredes verticais da guia). Nos pontos vizinhos a essas paredes condutoras, o campo paralelo a elas deve ser zero, o que significa que $\vec{\mathbf{E}} = E_x\hat{\mathbf{x}}$. Assim, junto às paredes verticais, $E_y = 0$ para qualquer y. Significa que $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$, e pela Eq. (5), que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad (x = 0, x = a). \tag{8}$$

A equação diferencial propriamente dita pode ser resolvida por separação de variáveis, $E_x(x, y) = X(x)Y(y)$, que imediatamente conduz à equação do oscilador harmônico:

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 X = 0. \tag{9}$$

A condição (8) mostra que a solução é

$$X(x) = A\cos(k_x x), \tag{10}$$

onde $k_x = m\pi/a$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), para garantir que a derivada de X se anule em $x = a$.

e A primeira coisa a fazer é encontrar a condição de contorno em $y = 0$. Para isso, basta observar que, em $y = 0$ (piso condutor da guia), o campo E_x deve anular-se. Assim, a condição é mais simples: $E_x(y = 0) = 0$. A função $Y(y)$ obedece a uma equação semelhante à Eq. (9), mas o segundo termo à esquerda é negativo. Encontrada a solução geral dessa equação, é fácil impor a condição de contorno para encontrar a solução particular de interesse.