Lista 4
Derivadas

Victor Saliba *
Thales Domingues †
André Salles de Carvalho ‡

Data de Entrega: 18 de Novembro de 2022

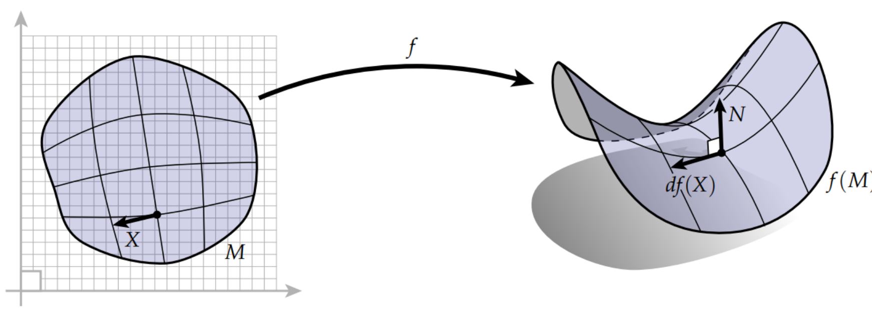

Figura 1: Um mapa de um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ e a sua respectiva diferencial (que nos diz como deformamos o conjunto M para formar a superfície $f(M)$). Fonte: *Discrete Differencial Geometry: An Applied Introduction*, Keenan Crane.

*E-mail: victorsaliba13@usp.br; WhatsApp: (12) 99145-9087.
†E-mail: thalesdaviddom@usp.br.
‡E-mail: andre@ime.usp.br.

Instruções:

1. Essa lista está dividida em três grupos de exercícios, numerados de I a III.
2. Não é necessário resolver todos os exercícios! Tente resolver aqueles que você achar mais interessantes. Se você não possui preferência, ou não achou nenhum aparentemente divertido, tente resolver os exercícios recomendados primeiro. Esses exercícios estão indicados na nota de rodapé de cada seção.
3. Escolha três exercícios do grupo I, um exercício do grupo II e três exercícios do grupo III para entregar **ou** entregue "apenas" os exercícios 8 e 10. A nota dessa lista será a soma das notas obtidas em cada questão, sendo 10 pontos a nota máxima. Para cada uma das duas formas de entrega, sendo n a quantidade total de questões a serem entregues, a nota máxima de cada questão será $10/n$.
4. Envie a sua resolução para o e-mail victorsaliba13@usp.br com o assunto "Resolução da Lista 4 de Matemática I".
5. Serão concedidos até 2 pontos extras se: (1) a resolução da lista for feita em LaTeX; ou (2) qualquer trabalho extra foi realizado: exemplos ou contraexemplos que validem o resultado demonstrado, alguma resolução elegante, uma quantidade maior de questões entregues além daquela requisitada, etc.
6. Os exercícios não estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Todavia, serão concedidos três símbolos distintos para os exercícios "interessantes": δ para os exercícios particularmente difíceis (que geralmente precisam de algum truque não tão óbvio para serem resolvidos), π para os problemas difíceis (que requerem tanto um truque, quanto um cuidado maior na resolução) e † para aqueles…
7. Não desanime se não conseguir resolver alguns exercícios ou cometeu algum erro na resolução, erros fazem parte do processo de aprendizado e quanto mais tempo gastar tentando solucionar um exercício, mais você irá aprender com ele.
8. Se houver dúvidas, sugestões ou quiser alguma (outra) dica, basta nos contactar.
9. A colaboração é não apenas permitida, mas encorajada. Caso tenha precisado de ajuda, por favor, dê o devido crédito, mencionando nomes.
10. Por último, mas definitivamente o mais importante, divirta-se!

Exercícios:

Grupo I[1]

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Prove que f é derivável no ponto 0.

Exercício 2 (δ). Suponha que f é uma função derivável no ponto x. Prove que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Exercício 3 (δ). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove que:

(a) Se f é periódica de período $p > 0$, então f' é periódica de período p.

(c) Se f é ímpar, então f' é par.

(b) Se f é par, então f' é ímpar.

Exercício 4 (π). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, onde n é um número natural. Use a definição de derivada para encontrar uma fórmula para $f^{(k)}(a)$ (a k-ésima derivada de f no ponto a), $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. Calcule $(f_n)'(x)$, onde

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}}.$$

Exercício 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto 0 tal que $f(0) = 0$. Prove que existe uma função g contínua em 0 tal que $f(x) = xg(x)$ para todo x.

Exercício 7. Prove que é impossível escrever $x = f(x)g(x)$, onde f e g são funções deriváveis tais que $f(0) = g(0) = 0$.

Exercício 8 (π). Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$ tais que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, e $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ para todo x. Prove que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ para todo x.

[1] Exercícios recomendados: 1, 4, 5 e 7.

Grupo II[2]

Exercício 9. Esboçe os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. (b) $g(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$.

Exercício 10 (δ)**.** Seja $a > 0$. Encontre o valor máximo da função

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}.$$

(Dica: A derivada pode ser encontrada nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ e $(a, +\infty)$ separadamente.)

Exercício 11. Dada uma esfera de raio $a > 0$, determine o raio r e a altura h do cilindro circular reto inscrito nessa esfera cuja superfície lateral ($2\pi rh$) é máxima.

Exercício 12 (δ)**.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\varphi(0) = 0$ e

$$\varphi'(x) = \frac{2\,[\varphi(x)]^2 + x}{3\,[\varphi(x)]^2 + 5}$$

para todo x.

(a) Decida se 0 é um ponto de máximo, de mínimo ou não é um ponto de extremo local de φ.

(b) Encontre dois números reais $a, b > 0$ tais que $\varphi(x) > ax + b$ para todo $x \geq \frac{10}{3}$. (Dica: Mostre inicialmente que $\varphi'(x) \geq \frac{2}{3}$ se $x \geq \frac{10}{3}$.)

[2] Exercícios recomendados: 9 e 11.

Grupo III[3]

Exercício 13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(n) = n$ para todo número inteiro n. Prove que a equação $f'(x) = 1$ tem infinitas soluções.

Exercício 14. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para quaisquer $x, y \in (a, b)$ se, e somente se, para alguma constante $L > 0$ tem-se $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in (a, b)$.

Exercício 15. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove que se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Exercício 16 (δ). Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que, para alguma constante $\alpha > 1$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in (a, b)$. Prove que f é constante.

Exercício 17 (π). Seja $\mathcal{F}$ a família de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis tais que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Decida qual afirmação a seguir é verdadeira. Para as que forem falsas apresente um contra-exemplo para mostrar isso, para a verdadeira faça a respectiva demonstração.

(i) $\mathcal{F}$ é a família de todas as funções constantes.

(ii) $\mathcal{F}$ é a família de todos os polinômios.

(iii) Todas as funções de $\mathcal{F}$ são de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(iv) Todas as funções de $\mathcal{F}$ são da forma $f(x) = ax + b$.

[3] Exercícios recomendados: 13 e 14.