Transformações do Campo

Série e Transformada de Fourier

Caso Unidimensional:

Se $f(t)$ é periódica e satisfaz as condições de Dirichlet (seccionalmente contínua e ~~contínua~~ monotônica)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{i \frac{2\pi}{T} k t} \longrightarrow \text{série de Fourier}$$

onde $$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i \frac{2\pi}{T} k t} \, dt$$

→ a função $f(t)$ pode ser ~~escrita~~ representada por uma série de potências ⇒ $f(t) \Longleftrightarrow \{ \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots \}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ → frequência angular em radianos T → período da função

→ se a função não for periódica: considerasse que o período da função seja infinito ⇒ função periódica com $T \to \infty$

→ converter de período para frequência ⇒ que aí fica mais fácil para trabalhar porque c_k tende aparentemente para zero

Como é uma série ⇒ $\Delta\omega$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} e^{i \Delta\omega k t} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i \Delta\omega k t} \, dt$$

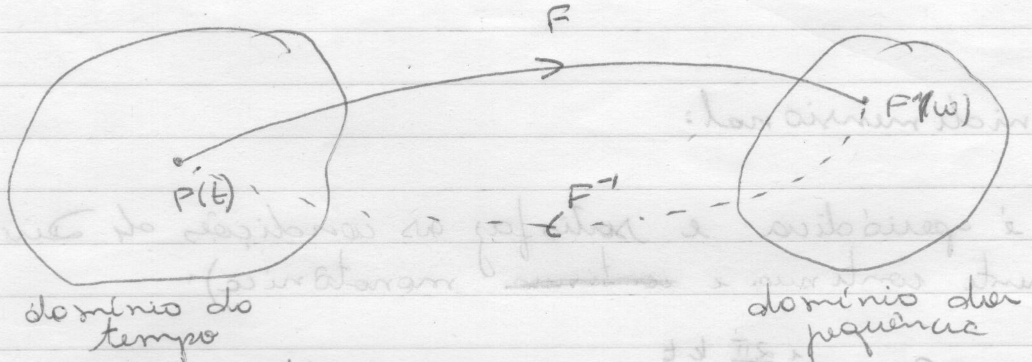
qdo $T \to \infty$ $k\Delta\omega \to \omega$ e $\sum \to \int$ temos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} \, dt}_{F(\omega)} \, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$f(t) \xrightarrow{\quad F \quad} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$F(\omega) \Rightarrow$ transformada de Fourier



tempo ~~transformada de~~ Fourier frequência

$$f(t) \underset{\text{operador}}{\xrightarrow{\quad F \quad}} F(\omega)$$

$\longleftarrow$ F^{-1} antitransformada de Fourier.

gráfico de $F(\omega) \Rightarrow$ é chamado de espectro de uma função ~~espectro de~~ e pode ser de fase ou amplitude.
~~espectro de amplitude p/ qualquer componente k é~~
$|F_k| =$

$\Rightarrow$ se eu quiser escrever em termos de sen e cos:

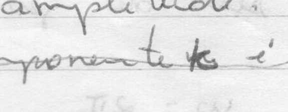
$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \operatorname{sen} k_n x) \Rightarrow \text{série de Fourier completa}$$

$$a_n = \frac{2}{L_x} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} f(x) \cos k_n x \, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L_x} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} f(x) \operatorname{sen} k_n x \, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

p/ f_x no intervalo $-\frac{L_x}{2} \le x \le \frac{L_x}{2}$ e periódica em L_x

espectro de amplitude $|F_n| = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$
espectro de fase $\phi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$



$F(\omega) \cdot F^*(\omega) \Rightarrow$ espectro de potência (é o quadrado do espectro de amplitude)
$F^*(\omega) \Rightarrow$ conjugado de $F(\omega)$ $\quad (x + iy) \longrightarrow (x - iy)$ conjugado

~~propriedades:~~
~~1) $F(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \{F(t$~~

propriedades

1) $F\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F\{f(t)\} + \beta F\{g(t)\}$ → linearidade

2) $f(t) \longrightarrow F(\omega)$ $\quad H(\omega) = i\omega F(\omega)$ transformada de derivada
$f'(t) \longrightarrow H(\omega)$

Para o caso bi-dimensional

$$f(t) \xrightarrow{F} F(\omega)$$ → caso unidimensional

se tivermos $f(x,y) \xrightarrow{F} F(\mu,\nu)$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

teremos:

$$F(\mu,\nu) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\mu x}\, dx\, e^{-i\nu y}\, dy$$

e

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)\, e^{i\mu x}\, e^{i\nu y}\, d\mu\, d\nu$$

propriedades:

$f(x,y) \longrightarrow F(\mu,\nu)$ $\qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = i\mu\, F(\mu,\nu)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = i\nu\, F(\mu,\nu)$$

↓
operador derivada no domínio da frequência

Transformada discreta

função contínua mas sim vários pontos discretos de função ⇒ transformada discreta

$\Delta t = 1$ $\quad t = 0, 1, 2, \ldots N-1$ pontos
$\quad W = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

$$F(W) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)\, e^{\frac{-2\pi i W t}{N}} \qquad w = 0, 1, \ldots, N-1 \Rightarrow \text{transformada discreta}$$

$$F(t) = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{N-1} F(W)\, e^{2\pi i W t/N} \qquad t = 0, 1, \ldots, N-1$$

N ⇒ é o número total de pontos amostrados no intervalo Δt e a freq. é dada por:

$$\cancel{w = \frac{2\pi}{N\Delta t}} \qquad w = \frac{2W\pi}{N\Delta t} \qquad W = 0, 1, \ldots, N/2$$

(w em radianos)

referência: Kanasewich, E.R. 1981 Time sequence analysis in Geophysics 3rd Ed. The University of Alberta Press. (cap. 3)

$F(W)$ e $f(t)$ podem ser rapidamente calculados utilizando os algoritmos de FFT (Fast Fourier Transform)

Solução da Equação de Laplace

$\nabla^2 U = 0 \qquad U = U(x, y, z)$

equação de Laplace é válida ~~apenas~~ na superfície da Terra e fora dela. Só pode usar dentro da Terra se não cruzar as fontes responsáveis pelo potencial (massas magnéticas ou gravimétricas). Se cruzar as fontes, então é necessário acrescentá-las na equação ⇒ trabalha com a eq. de Poisson.

solução da eq. de Laplace, em coordenadas cartesian

$$\nabla^2 U = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

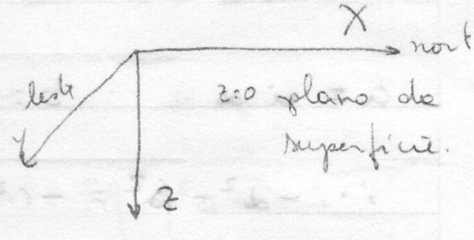
porque ⇒ gravimétrico: $\vec{g}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

magnético: $\vec{T} = \frac{\partial U}{\partial t}\vec{t}$ (componente do campo

↳ são essas componentes que eu meço ⇒ é bom resolver a eq. em coordenadas cartesianas.

solução pelo método de separação de variáveis:

$$U(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$



$\cancel{\nabla^2 U = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}$

$\cancel{\nabla^2 U = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + d^2 Y}$

$$\nabla^2 U = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) Z(z) + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} Z(z) + X(x) Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

$\div X(x) Y(y) Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0$$

a relação só é válida para todo o espaço se cada um dos fatores for constante.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

$\Rightarrow$ procuremos a solução para cada fator:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = a^2$$

solução particular é uma exponencial:

$$X(x) = e^{\pm ax}$$

da mesma forma é possível encontrar soluções semelhantes para $Y(y)$ e $Z(z)$:

$$Y(y) = e^{\pm by} \quad e \quad Z(z) = e^{\pm cz}$$

com $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

~~se a, b, c~~

se um dos três (a, b, c) for diferente de zero, não é possível ~~obter~~ que todos sejam reais para satisfazer a igualdade. Então

$$a^2 + b^2 = -c^2$$

e escolhemos a e b puramente imaginários:

$$a = i\alpha \qquad b = i\beta$$

$$\therefore -\alpha^2 - \beta^2 = -c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

então a solução da equação fica

$$X(x)\,Y(y)\,Z(z) = e^{\pm i\alpha x}\, e^{\pm i\beta y}\, e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}$$

$\mathcal{U}(x, y, z) = 0$ (z aponta p/ baixo):

Os exponenciais negativos não são solução (explode).

escolher como solução todos as exponenciais positivas

$$\mathcal{U}(x,y,z) = e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}$$

tenho uma solução particular da equação. A combinação linear desta solução também é solução da eq. de Laplace.

$$\mathcal{U}(x,y,z) = c_1 e^{i(\alpha x+\beta y)} e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} + c_2 e^{i(\alpha x+\beta y)} e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}$$

generalizando

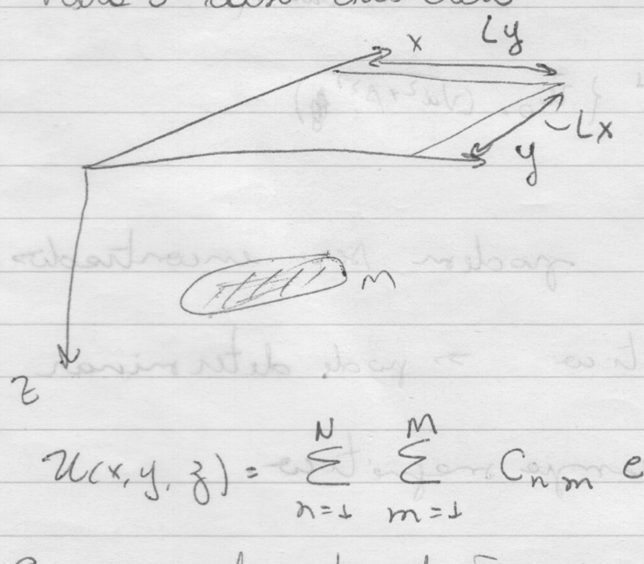
$$\mathcal{U}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}\, d\alpha\, d\beta$$

como as medidas são feitas em $z=0$ (plano de observação), a eq integral acima fica reduzida à:

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta \Rightarrow \text{transformada}$$

$$\mathcal{U}(x,y,0) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}(\alpha,\beta)$$

Para o caso discreto



$$k_x = \frac{2\pi n}{L_x} \qquad L_x = (N-1)\Delta x$$

$$k_y = \frac{2\pi m}{L_y} \qquad L_y = (M-1)\Delta y$$

$N \Rightarrow$ número de dados na direção x

$M \Rightarrow$ número de dados na direção y

$$k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \qquad \Delta x = \Delta y$$

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} C_{nm}\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}$$

C_{nm} coeficientes de Fourier da função $\mathcal{U}(x,y,z=0)$

Uso em aplicações geofísicas

(Transformações do campo potencial)

1) derivadas parciais $\Rightarrow x, y, z \Rightarrow$ tipo de transformação do campo potencial

$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ e $\frac{d}{dz}$ são todos operadores lineares

$\vec{g}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ $\Rightarrow$ força em uma direção é a derivada do potencial naquela direção.

Derivar o potencial gravimétrico $\Rightarrow$ força gravimétrica Δg e a anomalia Δg ($\Rightarrow$ que é a componente vertical do grad $U = U_z$)

$$U_z(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, C(\alpha,\beta)}_{D(\alpha,\beta)}\, e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}\, d\alpha\, d\beta$$

$D(\alpha,\beta) \Rightarrow$ anti transformada

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, C(\alpha,\beta) = D(\alpha,\beta) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftarrows}} \Delta g\,(x,y,z=0)$$

~~então~~

$$\cancel{\Delta g(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}\, d\alpha\, d\beta}$$

p/ $z=0$ $\quad \frac{d}{dz}U(x,y,z) = F^{-1}\{\tilde{u}_0 \cdot (\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\}$

~~dá para fazer a fórmula~~

analogamente $\frac{d}{dx}$ e $\frac{d}{dy}$ podem ser encontrados.

$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial t}\vec{t}$ campo magnético $\Rightarrow$ pode determinar todos as componentes do campo magnético.

derivada horizontal:

$$U_x = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{i\alpha\, C(\alpha,\beta)}_{D'(\alpha,\beta)}\, e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}\, d\alpha\, d\beta$$

$$i\alpha\, C(\alpha,\beta) = D'(\alpha,\beta) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftarrows}} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z)$$

2) continuação ~~para cima~~ do campo gravimétrico

$$g(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, C(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}\, d\alpha\, d\beta$$

$\Delta g(x,y,\bar{z})$ → em um plano z qualquer:

$$\Delta g(x,y,\bar{z}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\bar{z}}\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{D}(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta$$

$$\bar{D}(\alpha,\beta) = \underbrace{e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\bar{z}}}_{\text{fator de continuação}} D(\alpha,\beta)$$

esse é anomalia $\Delta g(x,y,0)$ que seria observada em um plano de observação $z = \bar{z}$

Percebemos que:

$$\underbrace{\Delta g(x,y,0)}_{\text{observação}} \xrightarrow{F} D(\alpha,\beta) \xrightarrow{\times e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\bar{z}}} \bar{D}(\alpha,\beta) \xrightarrow{F^{-1}} \Delta g(x,y,\bar{z})$$

transf. de Fourier   fator de continuação   anti-transf.

campo magnético e caso discreto

$$T(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N_x}\sum_{m=0}^{N_y} \check{T}_0(k_x,k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, e^{(k_z z)}$$

$\check{T}_0(k_x,k_y)$ ⇒ coeficientes de Fourier de $T_0(x,y)$

k_x, k_y, k_z ⇒ números de ondas $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$

$k_x = \frac{2\pi n \Delta x}{L_x}$ $n = 0, 1, \ldots, N_x$

$k_y = \frac{2\pi m \Delta y}{L_y}$ $m = 0, 1, \ldots, N_y$

5

$z > 0$ continuação p/ baixo: enfatiza as altas frequências (pequenos comprimentos de onda)

$e^{k_z z}$ → explode → e os ruídos (altas frequências) ficam ressaltados

$z < 0$ continuação p/ cima: atenua as altas frequências bem p/ ver os grandes comprimentos de onda.

$\frac{1}{e^{k_z z}}$

<u>outros operadores</u>

operação	operador
continuação	$\underbrace{e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\bar{z}}}_{\text{filtro de continuação}}$
derivada vertical	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
derivada 2ª vertical	$(\alpha^2+\beta^2)$
comp. x da derivada horizontal	$(i\alpha)$
comp. y da derivada horizontal	$(i\beta)$
derivada horizontal na direção $\vec{n}$ formando ângulo θ com x	$(i\alpha\cos\theta + i\beta\,\mathrm{sen}\,\theta)$
derivada direcional na direção $\vec{n}$, onde $\vec{n}$ é um versor	$i\alpha n_1 + i\beta n_2 + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,n_3$ com $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

anomalia $\xrightarrow{F}$ coef. de Fourier $\xrightarrow{\text{operador}}$ coef. de Fourier modificado $\xrightarrow{F^{-1}}$ anomalia transformada

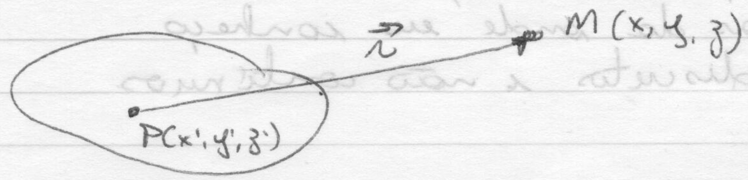
Algumas considerações que devem ser feitas para usar transformada de Fourier (FFT) rápida

- os dados não se extendem até o infinito
- onde não conheço os dados, considero-os como repetições cíclicas de onde eu conheço
- os dados são discretos e não contínuos

Redução ao polo de anomalias magnéticas

- técnica de interpretação para mapas magnéticos e aeromagnéticas, que pretende eliminar a distorção causada pela inclinação do vetor magnetização.
- em gravimetria existe uma relação simples entre causa e efeito, ou seja, entre corpo geológico e a anomalia residual observada sobre o corpo de alta ou baixa densidade. Mas em magnetometria, a anomalia associada a um corpo quase sempre apresenta uma distorção devido ao vetor magnetização, ~~que é~~ usualmente, é inclinado. Este problema não ocorre no pólo onde o campo magnético indutor é vertical e a magnetização remanescente também é vertical.
- redução ao pólo ⇒ técnica que consiste em calcular pseudo-anomalias que seriam causadas por corpos magnetizados sob a suposição que a magnetização e o campo externo indutor, são, ambos, verticais, utilizando a relação de Poisson.
- com isto pretende-se realçar a complexidade do corpo e não do campo, pois no pólo só existe uma componente.
- se a redução ao pólo não produz uma anomalia simples, pode ter dois motivos para que isto aconteça:
  1) magnetização remanescente ⇒ dando valores até acertar ou medir em laboratório
  2) corpo é assimétrico com forte mergulho em uma direção.

Considere a distribuição de massa magnética abaixo:



$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \Rightarrow$ distância entre P e M.

O potencial magnético em M é escrito como:

$$V(m) = \iiint \vec{J}(P)\, \mathrm{grad}_P \left(\frac{1}{r}\right) dv$$

onde dv é o elemento de volume

$\vec{J}(P) = J(P)\,\vec{v}$ é a magnetização constante na direção $\vec{v}$. Variar de intensidade e direção, isso permite ~~seto~~ considerar a remanescência.

$$\mathrm{grad}_P \left(\frac{1}{r}\right) = -\mathrm{grad}_m \left(\frac{1}{r}\right)$$

~~Pf~~ $\mathrm{grad}\, P (\to x', y', z')$ e $\mathrm{grad}\, m\, (x^o, y^o, z^o)$ e são simétricos. então o potencial magnético pode ser escrito como:

$$V(m) = -\vec{v} \iiint J(P)\, \mathrm{grad}_m \left(\frac{1}{r}\right) dv = -\vec{v}\, \mathrm{grad}_M \iiint J(P) \frac{1}{r}\, dv$$

o potencial newtoniano gravimétrico é:

$$\mathcal{U}(m) = \iiint \sigma(P) \frac{1}{r}\, dv$$

supondo que $J(P) \equiv \sigma(P)$, ou seja, a distribuição de magnetização é numericamente igual à distribuição de densidade

$$V(m) = -\vec{v} \iiint \mathrm{grad}_m \left(\frac{1}{r}\right) \sigma(P)\, dv = -\vec{v} \cdot \mathrm{grad}_m \mathcal{U}(m)$$

$V(m) = -\vec{v} \cdot \mathrm{grad}_m \mathcal{U}(m) \Rightarrow$ produto escalar

$\vec{v} \to \vec{i}$

$\mathrm{grad}_m \to \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

$$\boxed{V(m) = -\frac{d\,\mathcal{U}(m)}{d\nu}}$$ → Relação de Poisson

campo magnético: $\vec{T}(m) = -\text{grad}\, V(\vec{m})$

supor que $\vec{\nu}$: é um vetor de magnetização do campo
$\vec{\lambda}$: é um vetor na direção do campo total

$$T_\lambda = -\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\, V(m) = -\frac{d V(m)}{d\lambda}$$

mas $V(m) = -\frac{d\,\mathcal{U}(m)}{d\nu}$

$$\boxed{T_\lambda = \frac{d^2 \mathcal{U}}{d\lambda\, d\nu}}$$ → esta é outra forma de escrever a relação de Poisson.

neste caso a anomalia deve ter uma forma simples, o potencial gravitacional é monopolar (simples).

- no pólo ⇒ $\lambda = z$ e $\nu = z$ (só tem uma direção (vertical))

$$T_0 = \frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 T_0}{d\nu\, d\lambda} = \frac{d^2}{d\lambda\, d\nu}\left(\frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2}\right) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{d^2 \mathcal{U}}{d\lambda\, d\nu}\right) = \frac{d^2}{dz^2}\left(T_\lambda\right) = T_\lambda''$$

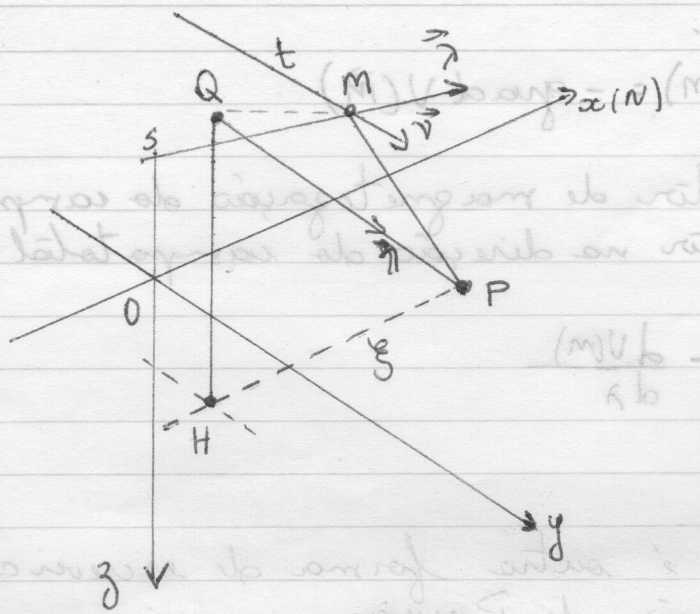
onde T_λ é para qualquer latitude magnética então foi possível relacionar o campo medido T_λ com o campo no pólo T_0.

Portanto: $T_0 = \iint T_\lambda''\, d\lambda\, d\nu$ → integral da redução ao polo

T_λ'' é fácil de obter usando a transformada de Fourier.

F

Para efetuar esta integral considere o seguinte sistema de coordenadas:



onde P está no plano de medida ~~(x, y, 0)~~

s variável muda ao longo de $\vec{\lambda}$

t variável muda ao longo de $\vec{\nu}$

η distância entre Q e P

ξ distância da projeção de Q (H) no plano xy, até P

M ponto de observação ou medida $\rightarrow M(x, y, z)$

Q está no plano $\nu\lambda$

O origem do sistema de coordenadas.

$$\vec{OQ} = \vec{OM} + \vec{MQ} = \vec{OM} + \vec{\lambda} s + \vec{\nu} t$$

$\vec{M} \Rightarrow (x, y, z)$

$Q \rightarrow (x + \lambda_1 s + \nu_1 t,\ y + \lambda_2 s + \nu_2 t,\ z + \lambda_3 s + \nu_3 t)$

$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$

$T_\lambda'' \rightarrow T_\lambda''(Q)$ (vou passar de M para Q)

$$T_0 = \iint T''_\lambda (x + \lambda_1 s + \nu_1 t, y + \lambda_2 s + \nu_2 t, z + \lambda_3 s + \nu_3 t)\, ds\, dt \qquad 0 \leq s, t < \infty$$

Para obter as expressões para os coeficientes de redução ao polo, vamos ~~te~~ relembrar a solução da equação de Laplace para o campo magnético T_λ, em coordenadas cartesianos:

$$\boxed{T_\lambda = T_\lambda(x,y,z) = \iint \tilde{T}(\alpha,\beta)\, e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}\, e^{i\alpha x}\, e^{i\beta y}\, d\alpha\, d\beta}$$

onde $\tilde{T}(\alpha,\beta)$ são os coeficientes da transformada de Fourier do campo magnético medido (plano de medida ~~com~~ em $z=0$)

$$\tilde{T}(\alpha,\beta) = \iint T(x,y,z)\, e^{-i\alpha x}\, e^{-i\beta y}\, dx\, dy$$

α = nº de onda na direção x (k_x)
β = nº de onda na direção y (k_y)
$\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$

derivando $T_0(m)$ duas vezes em relação a z e trocando M por Q tem-se:

$$T_\lambda''(Q) = \iint \tilde{T}(\alpha,\beta)\, e^{(z+\lambda_3 s+\nu_3 t)\gamma}\, e^{i\alpha(x+\lambda_1 s+\nu_1 t)}\, e^{i\beta(y+\lambda_2 s+\nu_2 t)}\, \gamma^2\, d\alpha\, d\beta$$

onde γ^2 aparece porque é a derivada segunda em relação a z.

onde $\lambda_1 = \cos I_i \cos D_i$ $\qquad \nu_1 = \cos I_m \cos D_m$
$\lambda_2 = \cos I_i \operatorname{sen} D_i$ $\qquad \nu_2 = \cos I_m \operatorname{sen} D_m$
$\lambda_3 = \operatorname{sen} I_i$ $\qquad \nu_3 = \operatorname{sen} I_m$

I_i, I_m → inclinação do campo indutor e da magnetização
D_i, D_m → declinação do campo indutor e da magnetização

reagrupando em termos de s e t:

$$T_\lambda''(Q) = \iint \tilde{T}(\alpha,\beta)\, e^{(\gamma z+i\alpha x+i\beta y)}\, e^{(\lambda_3\gamma+i\lambda_1\alpha+i\lambda_2\beta)s}\, e^{(\nu_3\gamma+i\nu_1\alpha+i\nu_2\beta)t}\, \gamma^2\, d\alpha\, d\beta$$

$A = \lambda_3\gamma + i\alpha\lambda_1 + i\beta\lambda_2$
$B = \nu_3\gamma + i\alpha\nu_1 + i\beta\nu_2$

$$T_\lambda''(Q) = \iint \tilde{T}(\alpha,\beta)\, e^{\gamma z+i\alpha x+i\beta y}\, e^{As}\, e^{Bt}\, \gamma^2\, d\alpha\, d\beta$$

⑧

mas $T_0 = \iint T_\lambda'' \, ds \, dt$

introduzindo a expressão p/ $T_\lambda''(Q)$ e integrando sobre s e t de zero a $-\infty$ ⇒ isto porque estou integrando fora das massas.

$$\int_0^{-\infty} e^{As} ds = \frac{1}{A} \qquad \int_0^{-\infty} e^{Bt} dt = \frac{1}{B} \qquad 0 < s, t < -\infty$$

A expressão para o campo reduzido ao pólo no ponto $M(x,y,z)$ é:

$$T_0(x,y,z) = \iint \tilde{T}(\alpha,\beta) \, e^{z\gamma + i\alpha x + i\beta y} \, \frac{\gamma^2}{AB} \, d\alpha \, d\beta$$

onde $A = \lambda_3 \gamma + \lambda_1 \alpha i + \lambda_2 \beta i$

$B = \nu_3 \gamma + \nu_1 \alpha i + \nu_2 \beta i$

$\frac{\gamma^2}{A.B}$ ⇒ é o filtro da redução ao polo.

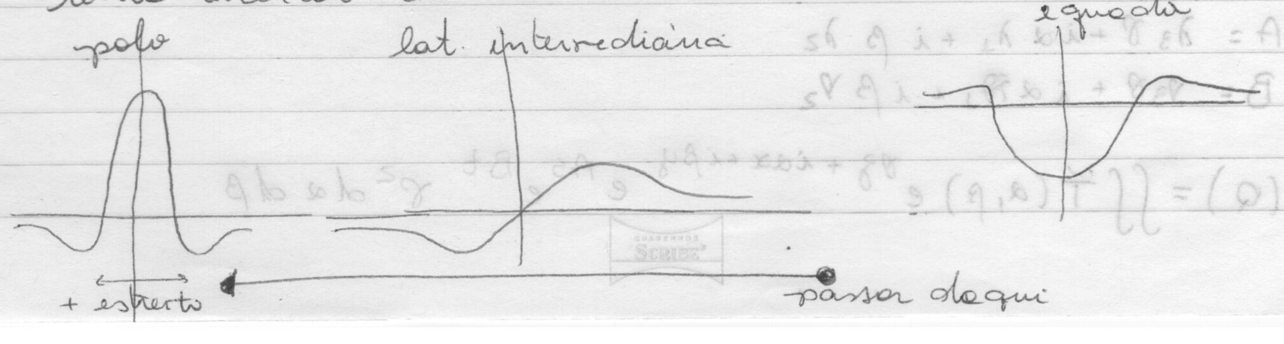
$F[T_0] = \tilde{T}(\alpha,\beta) \, C(\alpha,\beta,I_i,D_i,I_m,D_m)$ ⇒ transf. de Fourier

$T_0 = F^{-1}[\tilde{T}(\alpha,\beta) \, C(\alpha,\beta,I_i,D_i,I_m,D_m)]$ → anti-transformada

onde $C = \frac{\gamma^2}{A.B}$

no equador não vale, porque I é muito baixo e dá problemas. ~~Latitudes acima -25° e ab~~ Para latitudes acima de 25° e abaixo de -25°, usa-se redução ao pólo.

Inicialmente considera-se A=B porque não se tem informações sobre a magnetização remanescente. Se ficar estranho passa a dar valor a B (para ν) e tenta acertar de novo



Redução ao Equador

Te → campo ~~ao~~ equador ⇒ horizontal, Declinação é importante.

$$Te = \frac{d\mathcal{U}}{dh}$$ onde $\vec{h}$ é a direção do meridiano magnético

$$T_\lambda = \frac{d^2\mathcal{U}}{d\lambda\, d\nu}$$

$$\frac{d^2 Te}{d\lambda\, d\nu} = \frac{d^2}{d\lambda\, d\nu}\left(\frac{d\mathcal{U}}{dh}\right) = \frac{d}{dh} T_\lambda$$

$$\frac{d}{dh} = \vec{h} \cdot \operatorname{grad} \mathcal{U}$$

$$Te = \vec{h} \cdot \operatorname{grad}(\vec{h} \cdot \operatorname{grad} \mathcal{U})$$

$$\vec{h} = \cos D\, \vec{i} + \operatorname{sen} D\, \vec{j}$$ D → declinação magnética

$$Te = \left(\cos D \frac{\partial}{\partial x} + \sin D \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\cos D \frac{\partial}{\partial x} + \sin D \frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{U}$$

$$Te = \iint \left(\cos D \frac{\partial}{\partial x} + \sin D \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 T_\lambda \, d\nu\, d\lambda$$

$$Te = \iint \tilde{T}(\alpha, \beta)\, e^{\gamma z} e^{i\alpha x} e^{i\beta y} \frac{E}{AB}\, d\alpha\, d\beta$$

onde $E = -(\alpha \cos D)^2 - 2\alpha\beta \cos D \sin D - \beta(\sin D)^2$

A e B como na redução ao polo.

Redução ao polo foi desenvolvida por Baranov (1959)

ref. para transf. do campo potencial:

W. Baranov 1975 Potential Field and their transformation in Applied Geophysics. Gebruder Borntraeger, Berlin.