

INSTITUTO DE FÍSICA/USP

**4300156 — GRAVITAÇÃO**

*Notas de Aula*

**4<sup>a</sup> parte**

**João Zanetic**

**2<sup>o</sup> semestre/2019**

# **GRAVITAÇÃO/Notas de Aula**

**(Versão parcialmente revista em outubro de 2017)**

4ª parte

João Zanetic/IFUSP

## **Índice**

Capítulo 10 - Os "Principia" de Isaac Newton.....	163
10.1.Introdução .....	163
10.2.Os vórtices e o mecanicismo de Descartes .....	164
10.3.O princípio dos "Principia" .....	169
10.4.Uma breve descrição do conteúdo dos "Principia" .....	173
10.5.Força central e a segunda lei de Kepler .....	180
10.6.O caminho para chegar ao princípio da gravitação universal. ....	183
10.7.Articulação da hipótese gravitacional de Newton .....	187
10.8.À guisa de conclusão sobre os "Principia".....	199
Capítulo 11 - Triunfos da mecânica newtoniana depois de Newton. ....	200
11.1.Determinação de G.....	200
11.2.Determinação dg massa da Terra.....	202
11.3.Determinação da massa do Sol. ....	203
11.4.Descoberta de novos planetas.....	204
11.5.Uma viagem para além do sistema solar.....	207
Capítulo 12. Mais alguns tópicos gravitacionais.....	210
12.1.Campo gravitacional. ....	210
12.2.A velocidade de escape da Terra .....	211
12.3.Dois modos diferentes de medir massa? .....	217
12.4.Newton e as duas massas .....	218
12.5.Einstein e as duas massas .....	221
12.6.Alguns comentários finais (?). ....	225

## Capítulo 10 - Os "Principia" de Isaac Newton

### 10.1. Introdução

Kepler e Galileu sintetizaram com seu trabalho um novo tipo de pensamento que estava nascendo no século XVII. Era uma continuidade do tipo de pesquisa científica iniciada por Copérnico algumas décadas antes deles. Kepler aliava, de forma extremamente criativa e produtiva, o pensamento mágico/astrológico e alquímico com uma perspectiva geométrica que visava articular o pensamento copernicano. Galileu, por seu turno, representava a ascensão do pensamento racional, filosófico e experimental. Como diria Koyré, ele buscava também a matematização da física: redução do real ao puramente geométrico. Se Copérnico buscava uma harmonia geométrica na sua reconstrução da proposta heliocêntrica de Aristarco, podemos dizer que tanto Kepler quanto Galileu deram continuidade à tradição pitagórica da ligação da matemática com a física.

Como vimos, rompia-se o círculo da visão de mundo aristotélica que pode ser duplamente simbolizada pela utilização das seções cônicas no lugar do círculo: a elipse de Kepler para as órbitas planetárias e a parábola de Galileu para o movimento dos projéteis.

Kepler e Galileu, duas figuras tão diferentes, estabeleceram as bases de uma nova ciência. Enquanto Galileu usava sua imaginação de forma comedida e solidamente baseada em suas análises matemáticas e de observação, inclusive através do telescópio, Kepler lançava mão do livre pensar ancorado também na matematização do real.

*"Enquanto Galileu se limita a interpretar com a ajuda de esquemas geométricos precisos as manchas lunares como indicadores do relevo, Kepler salta imediatamente mais adiante a imaginar selenitas, a conjecturar qual seria a constituição corporal e inclusive a explicar-nos seus planos urbanísticos (...) Inclusive vaticina viagens espaciais, e em seu*

*postumamente publicado, **Sonho**, oferece-nos uma verdadeira obra de ficção científica.*"<sup>175</sup>

Quando, anos mais tarde, Newton, ao homenagear seus predecessores, afirmou que tinha conseguido realizar sua grande obra pois estava sustentado por ombros de gigantes, certamente os de Kepler e Galileu aí deveriam estar incluídos.

## 10.2. Os vórtices e o mecanicismo de Descartes

Uma outra figura que não pode ser ignorada na construção da ciência moderna é René Descartes, como já ficou claro quando o mencionamos ao tratarmos do princípio da inércia, na secção 8.4. Ele é muito mais importante como filósofo do que como cientista, sendo o autor do célebre **Discurso do Método**<sup>176</sup> que, além de apresentar as suas regras do pensamento racional, era uma espécie de autobiografia intelectual do próprio Descartes. À época de sua publicação o **Discurso** foi recebido como um prefácio de três tratados científicos: a **Dióptrica**, que era um tratado sobre a óptica, onde aparecia pela primeira vez a lei do seno da refração; os **Meteoros**, que tratava de fenômenos atmosféricos; e a **Geometria**, onde ele apresentava uma teoria geral das equações.<sup>177</sup>

Numa retrospectiva histórica da construção das ideias gravitacionais, não podemos deixar de mencionar algo do pensamento científico de Descartes, principalmente por conta dos comentários que o jovem Newton produziu, como veremos mais adiante. Descartes foi influenciado, entre outros, por Francis Bacon, mas

---

<sup>175</sup> SANTOS, Carlos S. na Introdução à **op. cit.**, nota 115, pág. 23.

<sup>176</sup> O **Discurso** foi publicado em 1637 com o título *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, que pode ser traduzido como “Discurso do método para bem conduzir a razão e buscar a verdade nas ciências”. Uma boa tradução em português que também apresenta uma instrutiva apresentação histórica de Denis Huisman, especialista em Descartes, foi publicada pela Editora Universidade de Brasília, em 1985.

<sup>177</sup> KOYRÉ, Alexandre. **Considerações sobre Descartes**. Editorial Presença, Lisboa, 1980, págs. 11/13.

afastou-se da postura empirista do filósofo inglês, optando por uma metodologia dedutiva em que a matemática desempenhava um papel central.

Como afirma Koyré, Descartes também pode ser inserido no quadro dos que batalharam pela matematização da física, o que pode ser exemplificado nas suas tentativas de resolver tanto o problema da inércia quanto o da queda dos graves.

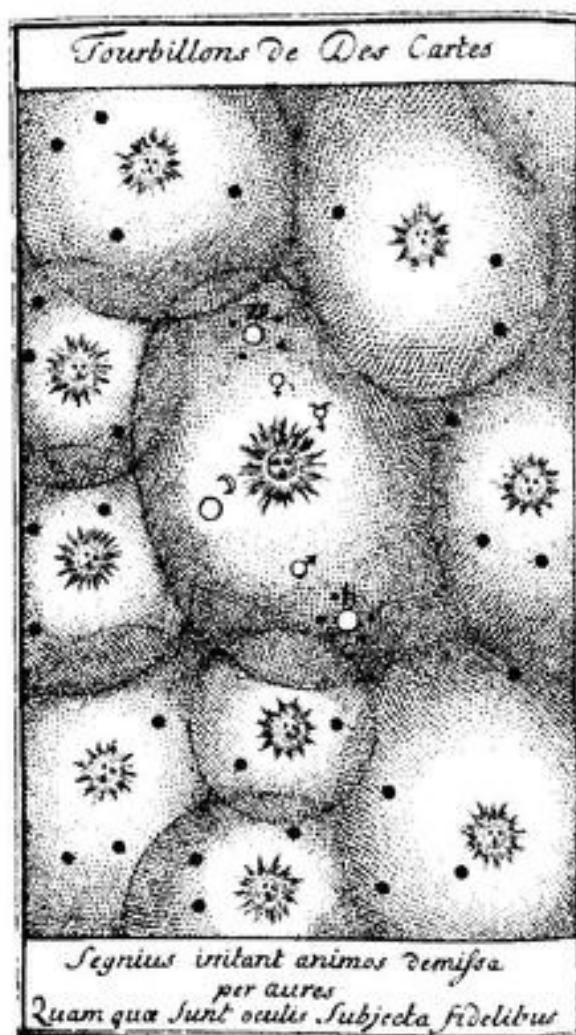
Na maior parte de suas investigações sobre os fenômenos físicos, Descartes dava pouca importância à experimentação, enfatizando o modo de investigação que partia dos primeiros princípios e deduções correspondentes. Ele desenvolveu uma concepção mecânica do universo e utilizava a matemática como um instrumento metodológico para trabalhar suas intuições e deduções.

Descartes identificava a matéria com a extensão, ou seja, ele negava a possibilidade de existência do vácuo e afirmava que em todo o universo existe matéria. Além da extensão, o movimento era a outra grandeza fundamental que constituía seu mundo físico.

*"A matéria impregnava todo o espaço e, portanto, em princípio a matéria primordial somente podia sofrer um movimento de rotação. Deste modo se estabeleceu um vórtice gigante no qual os tijolos primários de matéria eram arrastados girando, gastando-se gradualmente pelo atrito. Independentemente de sua forma original, os blocos primários de matéria se desgastavam para formar um pó, a matéria primeira, e pequenas esferas, a matéria segunda. O pó cósmico ou matéria primeira constituía o elemento fogo que formava o Sol e as estrelas fixas. A matéria segunda era o ar ou elemento etéreo que compunha o material do espaço interestelar. Havia também uma matéria terceira, a saber, os blocos originais de matéria que não se haviam decomposto em pó mas que apenas haviam-se arredondado. Estes grandes blocos esféricos de matéria*

*constituíam o elemento terra que formava a Terra, os planetas e os cometas."* <sup>178</sup>

Os vórtices, compostos por uma infinidade de partículas dessa matéria tênue, sutil e invisível que estavam permanentemente em rotação, que constituíam redemoinhos em torno dos planetas e do Sol, seriam os responsáveis pela queda dos graves e pela ascensão dos corpos leves. Eis aqui mais uma espécie de um **modelo gravitacional**. A **figura 36** ilustra esse modelo cartesiano de vórtices.



**Figura 36. O sistema solar no modelo cartesiano de vórtices**<sup>179</sup>

<sup>178</sup> MASON, Stephen F. **Historia de las ciencias. 2: La revolucion científica de los siglos VI y VII.** Vol. 2, Alianza Editorial, Madrid, 1985, pág. 62.

<sup>179</sup> Figura extraída de Stephen F. Mason, **op. cit.**, nota 178, pág. 64.

O historiador da ciência brasileiro Roberto de Andrade Martins sintetiza bem esse modelo gravitacional de Descartes, como podemos verificar na citação seguinte:

*“Segundo Descartes, seria o próprio turbilhão [vórtice] da Terra que produziria a gravidade. O argumento é aproximadamente o seguinte: se um líquido se move em círculos, todas as suas partículas tendem a se afastar do centro e mover-se em linha reta (por aquilo que chamamos de inércia). Quanto mais rápido o movimento circular, maior essa tendência a se afastar do centro. Se houver um líquido em rotação muito rápida, e dentro dele partículas com rotação mais lenta, essas partículas terão menor tendência a se afastar do centro, e serão empurradas pelo líquido em direção ao centro. Seria exatamente isso que ocorreria nas proximidades da Terra: segundo Descartes, os corpos terrestres giram lentamente em torno do eixo da Terra, enquanto o segundo elemento do vórtice terrestre gira muito rapidamente; por isso, os corpos terrestres são empurrados, pelo material do vórtice, em direção à Terra.”<sup>180</sup>*

Nesse sistema de Descartes, a Terra poderia ser considerada imóvel no centro de seu próprio vórtice que arrastava a Lua em sua órbita ao redor da Terra.

Da mesma forma, poderia ser explicado o fato de que todos os planetas se achavam presos ao Sol num vórtice muito mais amplo girando em torno do mesmo.

À época em que Descartes escrevia seu **Tratado do Mundo**, por volta de 1632/33, que incluía essa concepção dos vórtices, Galileu era condenado pelo Tribunal da Inquisição. Devido a isso esse **Tratado** só foi publicado após a morte de Descartes. Assim, ele sucumbe a essa realidade o que acarretaria uma dubiedade em sua visão de mundo. Como em seu sistema todos os movimentos eram considerados relativos, ele

---

<sup>180</sup> MARTINS, Roberto de Andrade. **Descartes e a impossibilidade de ações à distância**. In: Saul Fuks (org.). *Descartes: um legado científico e filosófico*. Ed. Relume Dumará, Rio de Janeiro, 1997, págs. 89/90.

imaginava a Terra imóvel no centro de seu vórtice, satisfazendo desse modo a concepção dominante de que a Terra estaria em repouso no centro do mundo.

Mesmo com essa concessão teórica de movimento relativo, a obra cartesiana foi incluída no Index da Inquisição, em Roma e em Paris, em 1663. Em 1740, seus trabalhos foram retirados do Index de livros proibidos para servir de alternativa ao sistema Newtoniano que estava cada vez mais ganhando certa popularidade na França.<sup>181</sup>

Um dos seguidores da teoria cartesiana dos vórtices foi Christian Huygens (1629-1695), que teria utilizado redemoinhos provocados em recipientes com água a fim de "confirmar" a teoria cartesiana da queda dos corpos.

O termo mecanicismo ganhou força com o desenvolvimento dos trabalhos de Descartes que considerava todos os sistemas materiais como máquinas guiadas por leis da natureza, leis mecânicas. Inclusive o corpo humano era assim considerado por Descartes, assim como as plantas, os animais e os demais corpos inorgânicos. Essa forma mecânica de explicar o comportamento dos corpos materiais opunha-se à estrutura hierárquica presente na concepção aristotélica.

*"As leis da natureza são as leis da mecânica"*, escrevia Descartes. Essa ideia cartesiana incluía a concepção de Deus como o grande legislador. É interessante, a este respeito, acompanhar o que diz o historiador da ciência Stephen Mason:

*"Descartes supunha que Deus governava o universo plenamente mediante "leis da natureza" que haviam sido decididas desde o começo. Uma vez criado o Universo, a divindade não havia interferido com a máquina que havia feito. A quantidade de matéria e a quantidade de movimento do mundo eram constantes e eternas, como também "as leis que Deus colocou na natureza". Durante a Idade Média havia-se chegado a pensar que Deus participava dia a dia no funcionamento do universo, delegando seu poder às hierarquias dos seres angelicais que impulsionavam os corpos celestes*

---

<sup>181</sup> MASON, Stephen F. **Op. cit.**, nota 178, pág. 63.



*nas suas órbitas, observando e regendo os acontecimentos terrestres. (...) As pessoas do século dezessete, por outra parte, estavam interessadas no curso ordinário dos acontecimentos, buscando seu modo "legal" de operação. (...)*

*(...) J. Calvino elaborava no terreno teológico a concepção de Deus como reitor absoluto do universo, governando mediante leis promulgadas desde o início. (...) A filosofia cartesiana desfrutou do favor dos calvinistas interessados na ciência. Durante o século dezessete, as teorias de Descartes eram ensinadas nas universidades da calvinista Holanda, assim como em Cambridge, a mais puritana das universidades inglesas (...)."<sup>182</sup>*

### **10.3. O princípio dos "Principia"**

O último trecho da citação acima nos remete a Cambridge e, portanto, a Isaac Newton que, no período mencionado, estudava e pesquisava naquela universidade inglesa.

Newton nasceu no dia 25 de dezembro de 1642, mesmo ano da morte de Galileu, em Lincolnshire, e morreu em Kensington, Londres, em 20 de março de 1727.

Em 1665 graduou-se como bacharel em artes no **Trinity College** da Universidade de Cambridge. Parte desse ano e do ano seguinte Newton retornou ao campo, à cidade onde nasceu, devido a uma terrível peste que atacou Londres, matando um grande número de pessoas.

Nesses dois anos, Newton aprofundou seus estudos em vários campos aos quais dedicaria parte ponderável dos vinte e poucos anos que se seguiram até a publicação, em 1686/7, de sua obra mais conhecida, os **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**.

---

<sup>182</sup> MASON, Stephen F. **Op. cit.**, nota 178, págs. 66 e 68.

Assim é que, afirmam vários historiadores, já em 1666, com a idade de 24 anos, Newton havia produzido conhecimento novo e extraordinário sobre os seguintes assuntos:

1. tinha uma formulação provisória de sua teoria da gravitação, pelo menos como uma hipótese de trabalho razoável;
2. redigiu um esboço medianamente completo do **cálculo de fluxões**, que viria a ser o cálculo infinitesimal;
3. formulou o seu teorema do binômio;
4. escreveu e pesquisou a natureza da luz.

Parte significativa do pensamento do jovem Newton é encontrada nas anotações que ele havia começado a fazer quando tinha dezoito anos, em 1661, constituindo o que veio a ser conhecido como seu caderno de apontamentos de Trinity, sendo a parte mais importante aquela que compreende o período de 1664 a 1665, que Newton intitulou *Questiones quædam Philosophicæ*, que pode ser traduzida como “Certas questões filosóficas”<sup>183</sup>. Eis o que dizem J. E. McGuire e Martin Tamny, que teceram interessantes comentários para a tradução inglesa desse caderno de apontamentos, a respeito da influência cartesiana sobre Newton:

*“É inegável que as idéias de Descartes são especialmente importantes para Newton, porque elas negam o que ele afirma. Como vimos, Newton advoga o princípio epicuriano de átomos e vazio, um compromisso que tornou a posição de Descartes a principal adversária de Newton, algo que atraiu muito sua atenção. Não se pode concluir disso que Newton rejeitava totalmente as idéias de Descartes, embora ele questionasse a concepção dos vórtices fluidos. Reconhece-se que as componentes dos vórtices desempenharam um papel nos argumentos astronômicos de Newton na*

---

<sup>183</sup> MCGUIRE, J. E.; TAMNY, M. **Certain philosophical questions: Newton’s Trinity notebook**. Cambridge University Press, 1985.

*década de 1680. (...) No entanto, não se pode negar que a base conceitual da matéria de Descartes dos céus fluidos – sua identificação com a extensão – foi imediatamente rejeitada por Newton: ela se opunha à existência do vazio e da estrutura atômica da matéria.”*<sup>184</sup>

Nos anos seguintes, Newton dedicou-se ao aprofundamento de seu conhecimento em cada uma dessas áreas. É preciso frisar que Newton conhecia os trabalhos de seus precursores, particularmente os trabalhos de Kepler, Galileu e Descartes, além de Copérnico, é claro.

Outro contemporâneo que acabou influenciando os trabalhos de Newton foi Robert Hooke (1635-1703) que, por sua vez foi influenciado, no que respeita à gravitação, por William Gilbert. Este, como já vimos, por analogia com seus estudos sobre os ímãs, imaginava que a própria Terra se comportaria como um grande ímã para os corpos situados nas proximidades de sua superfície. Gilbert havia, inclusive, conseguido demonstrar experimentalmente que a "força" magnética entre os corpos variava com a distância que os separava. Assim, Hooke procurou também medir a variação da "força" gravitacional da Terra sobre corpos próximos à sua superfície. Hooke procurou medir a gravidade (peso) de corpos tanto junto à superfície quanto em poços profundos de minas e nos altos dos morros. Ele próprio afirmara não ter conseguido nenhuma informação segura a respeito da variação da gravidade.

Dessa forma, Newton, nesses mesmos anos de 1665 e 1666, dedicava-se à investigação de temas semelhantes aos investigados por Hooke. Aparentemente, Newton também foi influenciado pelo trabalho que Galileu realizou com pêndulos; ou, como afirma Bernal:

*"O estudo do pêndulo simples levou ao estudo do pêndulo circular; o estudo do pêndulo circular levou à ideia de força centrífuga e esta, por seu*

---

<sup>184</sup> MCGUIRE, J. E.; TAMNY, M. **Op. cit.**, nota 183, pág. 147.

*turno, levou à ideia de uma gravidade que mantinha os planetas em suas órbitas, ao mesmo tempo que eles oscilavam circularmente de modo perfeitamente livre. A gravidade, no caso do pêndulo, é simplesmente a componente do peso do corpo suspenso na direção do centro. Uma vez que Newton entendeu isto, ele podia prosseguir até o fim."*<sup>185</sup>

"*Prosseguir até o fim*" poderia significar, por exemplo, procurar a solução de uma questão particularmente difícil para a época. Por volta de agosto de 1684, Edmund Halley (1656-1742), outro contemporâneo com forte influência sobre o desenvolvimento dos *Principia*, em uma entrevista que manteve com Newton, teria formulado a seguinte pergunta: qual seria a curva que deveria ser descrita pelos planetas, supondo que a força de atração em direção ao Sol, uma das suposições que vários físicos faziam àquela época, fosse inversamente proporcional ao quadrado da distância deles ao Sol? Newton teria respondido, imediatamente, que deveria ser uma elipse.

Halley teria ficado alegre e surpreso com a resposta. A seguir ele solicitou os cálculos de Newton que, procurou entre seus papéis, mas, não os tendo encontrado, prometeu a Halley que iria refazê-los e os enviaria a ele. Em novembro do mesmo ano, Halley recebeu um pequeno ensaio em que se encontrava a demonstração completa da questão formulada. Nota-se por essas datas como Newton, apesar de ter iniciado a pensar sobre esses temas vinte anos antes da formulação da questão por Halley, tinha ainda problemas importantes em aberto. É possível que isso tenha provocado o atraso da publicação dos **Principia**, que foram finalmente preparados para publicação em 1686, como podemos verificar na reprodução da capa da primeira edição dos **Principia** reproduzida na **figura 38**.

Outro problema que talvez também tenha sido responsável pelo atraso da publicação dos *Principia*, refere-se à questão da força gravitacional de uma esfera homogênea que seria igual à provocada por uma massa, equivalente à da esfera,

---

<sup>185</sup> BERNAL, John D. **Op. cit.**, nota 5, pág. 209.

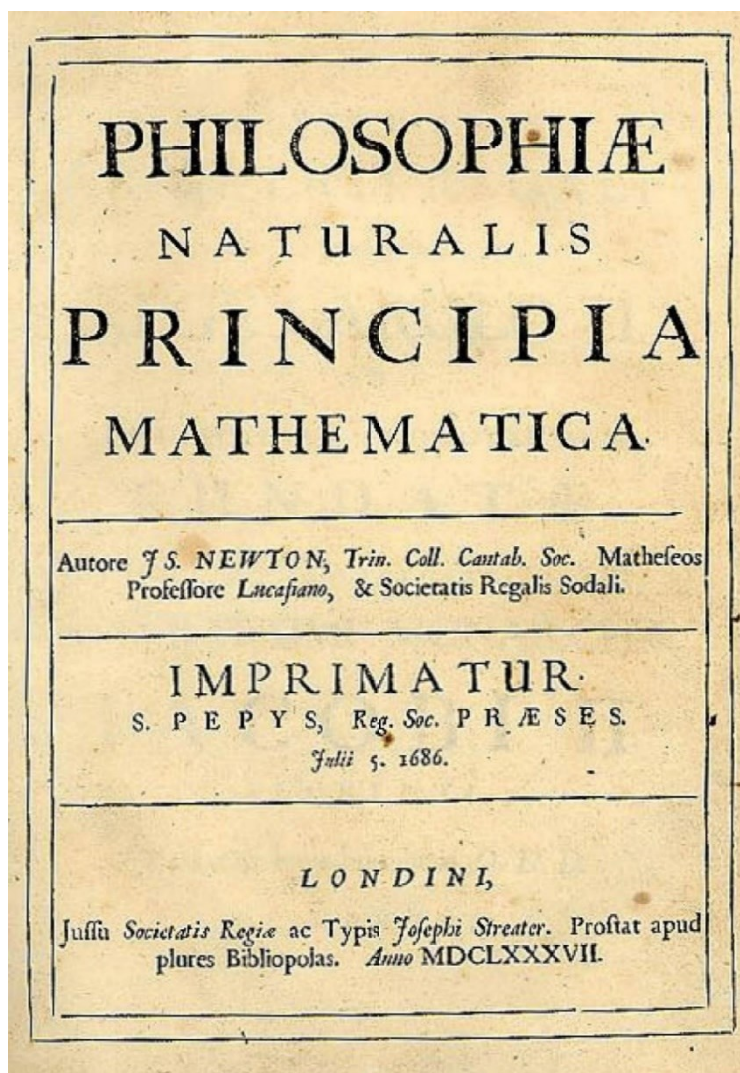
localizada no centro de massa. O cálculo necessário para resolver esse problema também não era trivial. Veremos algumas dessas etapas nas seções seguintes.

Finalmente, em julho de 1686, Newton finaliza seu livro e, em 1687, a primeira edição dos **Principia** começou a ser distribuída.

Essa obra marcou profundamente toda a física que foi construída nos dois séculos seguintes à sua publicação, como atestam as afirmações de Einstein apresentadas nestas **Notas de Aula**.

#### 10.4. Uma breve descrição do conteúdo dos "Principia"

Os Principia constam de três livros que passo a descrever sucintamente a seguir.



**Figura 37.** Capa da primeira edição dos Principia de Newton

## Livro 1

**Assunto central:** leis gerais do movimento dos corpos sujeitos à ação de forças centrais; na primeira metade aborda o movimento de um ou dois corpos no vazio; na segunda metade aborda o problema de três corpos. Aliás este último problema foi mal resolvido por Newton; Euler chegou a uma solução melhor, cerca de cinquenta anos mais tarde.

## Livro 2

**Assunto central:** estudo do movimento nos meios resistivos; dependência da resistência com a velocidade; fundamentos da hidrostática e corpos flutuantes; movimento do pêndulo; movimento de líquidos em tubos e movimento de projéteis.

Eis o que escreveu o historiador da ciência Clifford Truesdell sobre esse livro dos Principia:

*"Apesar dessa sucessão anárquica de demonstrações matemáticas, hipóteses brilhantes, intuições, blefes e erros crassos, o livro 2 tem sido considerado, com justiça, como a manifestação mais grandiosa do gênio de Newton. O livro 2 foi propriamente um desafio lançado aos geômetras da época. Viram diante de si a necessidade de corrigir os erros, substituir as intuições mediante hipóteses claras, ordenar essas hipóteses dentro de um esquema da mecânica racional, trocar os blefes por demonstrações matemáticas e criar novos conceitos para alcançar o que Newton não havia conseguido. Não é exagero afirmar que a mecânica racional, e portanto, a física matemática, junto com a visão da natureza a que esta*

*deu lugar, nasceu deste desafio, aceitos como foram pela escola matemática da Basileia.*"<sup>186</sup>

Da escola matemática mencionada por Truesdell na citação acima, destacaram-se os matemáticos e físicos Euler e os Bernoulli.

### **Livro 3**

**Assunto central:** o **sistema de mundo**, ou seja, o movimento dos planetas, o movimento da Lua e suas anomalias, a aceleração da força gravitacional, o problema das marés, etc.

O quadro da **figura 38** exhibe, numa reprodução adaptada de uma página dos Principia, uma típica demonstração de um teorema, ou proposição, encontrada ao longo da maior parte do conteúdo dessa obra de Newton.

A utilização elegante e precisa da geometria é uma constante nas páginas dos Principia. Esse procedimento newtoniano é muito parecido com a forma de apresentação do livro sobre a geometria do geômetra grego Euclides.

É a matematização da física iniciada por Galileu, Kepler e Descartes atingindo seu pleno desenvolvimento, marcando para sempre a vitória do paradigma que tinha no *De revolutionibus*, de Copérnico, uma síntese de partida. Porém, mesmo após a publicação dos Principia, houve forte oposição à nova ciência. Por exemplo, Huygens e Leibniz, não aceitavam a proposição gravitacional de Newton. Huygens afirmava que Newton estaria voltando a utilizar as qualidades ocultas e as forças espirituais que tinham sido banidas pela nascente ciência natural.

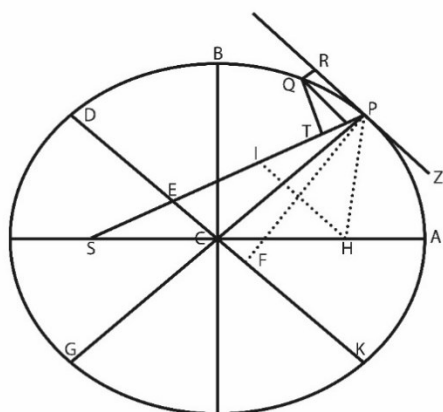
---

<sup>186</sup> Citado por CUNHA, Elio B. M. **Uma nova história da mecânica**. Rev. de Ensino de Física, vol. 6, nº 1, abril/1984, pág. 48

TEXTO EXTRAÍDO DO ORIGINAL DE NEWTON<sup>o</sup>  
PROPOSIÇÃO XI, PROBLEMA VI

*“If a body revolves in an ellipse; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of the ellipse.”*

*“Seja S o foco da elipses. Tracemos SP cortando o diâmetro DK da elipse em E, e a ordenada Qv em x; completemos o paralelogramo QxPr. É evidente que EP é igual ao semieixo AC: pois ao traçarmos HI a partir do foco H da elipse e paralelo a EC, como CS e CH são iguais, ES e EI também serão iguais; então EP é a meia-soma da PS a PI, isto é (por causa das paralelas HI e PR o dos ângulos iguais IPR o HPZ), de PS e PH, os quais tomados juntos são iguais ao eixo inteiro 2AC. Tracemos QT perpendicular a SP, e designando por L latus rectum principal da elipse (ou  $\frac{2BC^2}{AC}$ ), teremos:*



*Tracemos HI a partir do foco H da elipse e paralelo a EC, como CS e CH são iguais, ES e EI também serão iguais; então EP é a meia-soma da PS a PI, isto é (por causa das paralelas HI e PR o dos ângulos iguais IPR o HPZ), de PS e PH, os quais tomados juntos são iguais ao eixo inteiro 2AC. Tracemos QT perpendicular a SP, e designando por L latus rectum principal da elipse (ou  $\frac{2BC^2}{AC}$ ), teremos:*

$L.QR:L.Pv = QR:Pv = PE:PC = AC.PC$ ,  
e, também,  $L.Pv:Gv.Pv = L:Gv$ , e,  $Gv.Pv:Qv^2 = PC^2=CD^2$

*Pelo Corolário II, Lema VII, quando os pontos P e Q coincidem,  $Qv^2 = Qx^2$ , e  $Qx^2$  ou  $Qv^2:QT^2 = EP^2:PF^2 = CA^2:PF^2$ , e (pelo lema XII) =  $CD^2:CB^2$ .*

*Multiplicando os termos correspondentes das quatro proporções e simplificando, teremos:*

$L.QR:QT^2 = AC.L.PC^2.CD^2:PC.Gv.CD^2.CB^2 = 2PC:Gv$ , desde que  $AC.L = 2BC^2$ . Mas coincidindo os pontos Q e P,  $2PC$  e  $Gv$  são iguais. E portanto as quantidades  $L.QR$  e  $QT^2$ , proporcionais a estas, também serão iguais. Multiplicando esses iguais por  $\frac{SP^2}{QR}$ ,  $L.SP^2$  se tornará igual a  $\frac{SP^2.QT^2}{QR}$ . Portanto (pelos Corolários I e V, VI) a força centrípeta é inversamente proporcional a  $L.SP^2$ , isto é, inversamente proporcional ao quadrado da distância SP.”

QEI

**\*\*Mathematical Principles 06 Natural Philosophy and his System of the World**, Sir Isaac Newton, traduzido ao inglês por Andrew Motte em 1729 e revista por Florian Cajori. Uni-versity of California Press, edição de 1946, pàgs, 56/7.

**Figura 38.** Esse quadro consta do artigo “*Philosophie Naturalis Principia Mathematica*”, de Roberto Thut Medeiros, publicado na Revista de Ensino de Física, vol. 9, nº 1, out/1987, págs. 45/54. O Problema VI encontra-se explicado detalhadamente nesse artigo.



Eis uma citação significativa de Huygens contra as ideias de Newton:

*"Eu estou impressionado que Newton tenha tido o trabalho de construir, sobre hipótese tão improvável e audaciosa, tantos teoremas e uma completa teoria das ações dos corpos celestes. Eu estou me referindo à sua hipótese de que todas as pequenas partículas de diversos corpos se atraem mutuamente na razão do inverso do quadrado das distâncias."*<sup>187</sup>

O livro de Newton, apesar de sua enorme importância para o desenvolvimento da física, é pouco conhecido, pouco lido mesmo entre o público universitário. Aliás, infelizmente, isso é verdade com relação a todos os clássicos da física. É o resultado de um ensino dominado por manuais que apenas apresentam, quase sem exceções, o "formulismo" da física.

*Vamos reproduzir um trecho interessante dos Principia, parte do terceiro livro, que se intitula Do sistema do mundo:*

*“Corpos lançados em nosso ar não sofrem nenhuma resistência além do ar. Retire-se o ar, como é feito no vácuo do Sr. Boyle, e a resistência cessa; pois nesse vazio uma pena e um pedaço de ouro sólido descem com velocidade igual. E o mesmo argumento deve-se aplicar aos espaços celestiais acima da atmosfera da Terra; nesses espaços, onde não existe ar para resistir a seus movimentos, todos os corpos se moverão com o máximo de liberdade; e os planetas e cometas prosseguirão constantemente suas revoluções em órbitas dadas em espécie e posição, de acordo com as leis acima explicadas; mas, apesar de tais corpos poderem, com efeito, continuar em suas órbitas pela simples lei da gravidade, todavia eles não podem de modo algum ter, em princípio, derivado dessa lei a posição regular das próprias órbitas (...)*

---

<sup>187</sup> Citado por Brian Easlea. **Op. cit.**, nota 82, pág. 44.

*Esse magnífico sistema do Sol, planetas e cometas poderia somente proceder do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso. (...) e para que os sistemas das estrelas fixas não caiam, devido a sua gravidade, uns sobre os outros, Ele colocou esses sistemas a imensas distâncias entre si (...)*

*Esse Ser governa todas as coisas, não como a alma do mundo, mas como Senhor de tudo; (...) Ele dura para sempre, e está presente em todos os lugares; e, por existir sempre e em todos os lugares, ele constitui a duração e o espaço. (...) Assim como um homem cego não tem idéia das cores, nós também não temos idéia da maneira pela qual o todo sábio Deus percebe e entende todas as coisas. Ele é completamente destituído de todo corpo e figura corporal, e não pode portanto nem ser visto, nem ouvido, nem tocado; nem deve ser ele adorado sob a representação de qualquer coisa corporal (...) Nós o conhecemos somente pelas suas invenções mais sábias e excelentes das coisas e das causas finais. (...)*

*Até aqui explicamos os fenômenos dos céus e do nosso mar pelo poder da gravidade, mas ainda não designamos a causa desse poder. É certo que ele deve provir de uma causa que penetra nos centros exatos do Sol e planetas, sem sofrer a menor diminuição de sua força; que opera não de acordo com a quantidade das superfícies das partículas sobre as quais ela age (como as causas mecânicas costumam fazer), mas de acordo com a quantidade da matéria sólida que elas contêm, e propaga sua virtude em todos os lados a imensas distâncias, decrescendo sempre no quadro inverso das distâncias. A gravitação com relação ao Sol é composta a partir das gravitações com relação às várias partículas das quais o corpo do Sol é composto; e ao afastar-se do Sol diminui com exatidão na proporção do quadrado inverso das distâncias até a órbita de Saturno, como evidentemente aparece do repouso do apogeu dos planetas; mais*

*ainda, e mesmo para os mais remotos apogeus dos cometas, se estes apogeus estão também em repouso. Mas até aqui não fui capaz de descobrir a causa dessas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos, e não construo nenhuma hipótese; pois tudo que não é deduzido dos fenômenos deve ser chamado uma hipótese; e as hipóteses, quer metafísicas ou físicas, quer de qualidades ocultas ou mecânicas, não têm lugar na filosofia experimental. Nessa filosofia as proposições particulares são inferidas dos fenômenos, e depois tornadas gerais pela indução. Assim foi que a impenetrabilidade, a mobilidade e a força impulsiva dos corpos, e as leis dos movimentos e da gravitação foram descobertas. E para nós é suficiente que a gravidade realmente exista, aja de acordo com as leis que explicamos e que sirva abundantemente para considerar todos os movimentos dos corpos celestiais e do nosso mar. (...)"<sup>188</sup>*

Nós apenas podemos estabelecer algumas conjecturas sobre o que se passava na mente de Newton quando escrevia essas frases. Seu teísmo, sua "aparente" convicção experimental, sua "fé" na gravitação universal e sua... magia.

John Mainard Keynes (1883-1946), o famoso economista inglês que arrebatou, em 1942, num leilão, os escritos de Newton elaborados em Cambridge, escreveu o seguinte num artigo sobre a figura de Newton:

*"Newton não foi o pioneiro da idade da razão. Ele foi o último dos mágicos, o último dos babilônios e sumérios (...) foi a última criança prodígio a quem a Magia poderia prestar uma homenagem apropriada e sincera."<sup>189</sup>*

---

<sup>188</sup> NEWTON, Isaac. **Principia**. Coleção "Os pensadores", Abril Cultural, São Paulo, 1979, págs. 19/22.

<sup>189</sup> KEYNES, John Mainard. **Newton**. Rev. de Ensino de Física, vol. 5, nº 2, dez/1983.

Por outro lado, numa análise que buscava as raízes econômicas e sociais dos Principia, o físico soviético Boris Hessen, afirmava o seguinte, em 1932:

*"(...) o fenômeno de Newton é visto como devido a uma espécie de bondade da divina providência, e o poderoso impulso que seu trabalho deu ao desenvolvimento da ciência e da tecnologia é considerado como o resultado de seu gênio pessoal.*

*(...) Esse breve perfil dos Principia mostra a completa coincidência entre as temáticas físicas da época, que emergiam de exigências econômicas e técnicas (...) E uma vez que todos esses problemas eram problemas de mecânica, fica claro porque a principal obra de Newton foi uma investigação geral sobre a mecânica celeste e terrestre."<sup>190</sup>*

Tivemos assim uma breve história da construção da principal obra de Newton e sua inserção cultural. Nas próximas seções vamos apresentar alguns detalhes da construção de seu **princípio da gravitação universal**.

### **10.5. Força central e a segunda lei de Kepler**

Fruto de sua análise dos resultados de Kepler, principalmente suas duas primeiras leis, Newton intuiu que o Sol deveria ser responsável por algum tipo de ação mais direta sobre os planetas.

Assim, pela primeira lei de Kepler, os planetas moviam-se em órbitas curvas, elípticas. Isso significava, utilizando a primeira lei de Newton, que alguma força era aplicada sobre o planeta para forçá-lo a desviar-se da reta.

Portanto, os planetas estavam sendo continuamente acelerados. Pela segunda lei de Newton, deveria haver uma força na direção da aceleração. Mas, qual seria esta força?

---

<sup>190</sup> HESSEN, Boris. **As raízes sociais e econômicas dos Principia de Newton**. Rev. de Ensino de Física, vol. 6, nº 1, abril/1984, págs. 38 e 55.

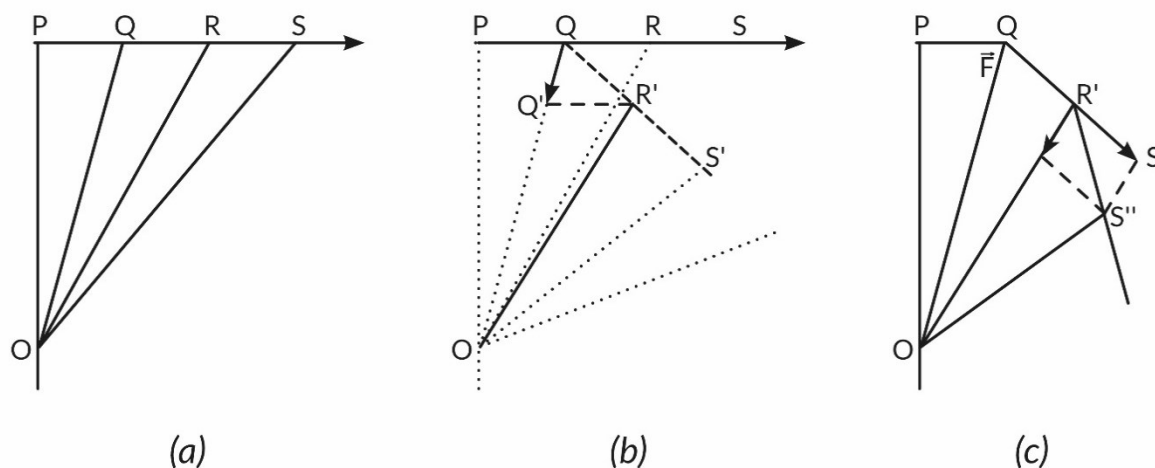
Como as duas primeiras leis de Kepler situam o Sol como ponto preferencial da órbita elíptica, nada impedia Newton de considerá-lo como o centro de ação dessa força. Em particular, Newton poderia perguntar-se, essa força não poderia eventualmente ser uma força do tipo **central**, isto é, uma força dirigida para um ponto central e talvez com magnitude dependente da distância a esse centro?

É claro que essa hipótese de Newton tinha que ser coerente com os resultados encontrados por Kepler.

Para procurar entender como Newton trabalhou com essa sua hipótese, vamos inicialmente estudar o movimento de um corpo que se desloca com velocidade constante, visto por um observador situado num ponto O fora de sua trajetória.

Se marcarmos numa reta pontos que delimitam distâncias percorridas em intervalos de tempos iguais, como mostra a **figura 39 (a)**, percebemos que as áreas descritas, isto é, áreas dos triângulos OPQ, OQR, e assim por diante, são iguais.

**Verifique o que foi aqui afirmado analisando a figura com cuidado.**



**Figura 39.** Newton e a segunda lei de Kepler<sup>191</sup>

Assim, a segunda lei de Kepler é aplicável mesmo para o caso de um corpo que se movimenta uniformemente numa linha reta na ausência de qualquer força. **Não é um resultado surpreendente?**

<sup>191</sup> Figura extraída do Projeto Harvard.

Vamos agora procurar generalizar tal resultado. Imaginemos a situação em que o corpo sofre a ação de uma força de curta duração em Q, na direção de O, como é mostrado na figura 39 (b) acima. Desta forma, no intervalo de tempo seguinte, igual ao gasto para ir com movimento uniforme de P para Q, o corpo estará sujeito a uma composição de movimentos: um que o levaria em linha reta até R e outro que o levaria em direção a O até Q'. A composição destes dois movimentos leva o corpo até o ponto R'. **A partir de análise cuidadosa da figura determine as áreas dos triângulos OQR e OQR'.**

Como a base desses dois triângulos é a mesma - OQ - e como suas alturas são iguais - as perpendiculares a partir dos vértices R e R' até QQ', as áreas desses dois triângulos são iguais.

Se, de novo, uma força de curta duração for aplicada em R', na direção de O, outra vez teríamos uma composição de movimentos que produziria a situação mostrada na figura (c) acima. Novamente a área do novo triângulo é igual à do anterior. **Verifique esta afirmação.**

Portanto, imaginando intervalos de tempo tão pequenos que tendem a zero, teremos uma força que age continuamente sempre dirigida para o ponto O. Newton demonstrou que o raciocínio empregado para os triângulos acima continuaria válido.

Desta forma concluímos que se um corpo está sujeito continuamente a uma força dirigida para o centro O ele se moverá de acordo com a segunda lei de Kepler.

Em outras palavras:

**Um corpo sujeito a uma força central obedece à segunda lei de Kepler.**

Vamos procurar entender o significado físico desse resultado obtido por Newton, utilizando os conceitos de momento de uma força e momento angular, introduzidos na **seção 7.8.**

Se a força  $F$  aplicada à partícula for central, isto é, sempre dirigida para o centro  $O$ , ela será sempre paralela a  $r$  e, portanto, sempre  $\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$ . Portanto da expressão 14, teremos que  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , ou seja  $L = \text{constante}$ . Assim:

**Para uma partícula sujeita a uma força central, o momento angular relativo ao centro de força é uma constante do movimento  $L = mrv_{\perp}$**

Esse resultado é coerente com a argumentação utilizada para chegar na expressão 4 da página 106.

Finalmente, podemos dizer que:

**Em todo movimento sujeito a uma força central, o raio vetor da partícula descreve áreas iguais em tempos iguais.**

Kepler havia descoberto que a órbita de um planeta está contida num plano que contém o Sol, a expressão  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \text{constante}$ , confirma esse resultado por ele obtido.

Podemos interpretar modernamente a segunda lei de Kepler como significando a lei da **conservação do momento angular**.

Foi dado, com essa interpretação da segunda lei de Kepler, um importante passo na direção de compreender a dinâmica do movimento dos corpos celestes em torno do Sol. A força que mantém os planetas em órbita é uma força central dirigida para o Sol. Faltava ainda encontrar a expressão para essa força.

### **10.6. O caminho para chegar ao princípio da gravitação universal.**

No seu livro **Philosophiae naturalis principia methemática**, Newton apresentou o desenvolvimento de sua proposta para a gravitação. Em tal empreitada ele teria sido ajudado, como mencionei anteriormente, por duas figuras fundamentais: Robert Hooke e Edmund Halley. Na **seção 10.3**, relatei um pouco dessa "ajuda". Newton reconheceu que Hooke teve uma enorme influência sobre seu pensamento no que respeitava a aceitação do conceito de força centrípeta. No entanto, Hooke e Newton

tiveram vários atritos a respeito da primazia da descoberta da lei do inverso do quadrado da distância.

I.B. Cohen afirma que essa lei pode ser obtida, por exemplo, a partir da expressão da aceleração centrípeta que Newton afirmava conhecer desde meados da década de 1660. No entanto o privilégio da publicação da expressão da aceleração centrípeta é de Christiaan Huygens que, em 1673, no seu **Horologium oscillatorium**, apresentou uma demonstração de que para um movimento circular uniforme a aceleração centrípeta teria a seguinte expressão matemática<sup>192</sup>:  $a_c = \frac{v^2}{r}$ .

Com essa expressão, utilizando as duas primeiras leis de Newton e a terceira lei de Kepler, aplicada ao movimento de um planeta em torno do Sol, chega-se por meio de simples álgebra à expressão do princípio da gravitação de Newton<sup>193</sup>. **Faça esse exercício.**

Vale a pena mencionar também que, segundo demonstram algumas cartas trocadas por Newton, Halley e Hooke, poucos anos antes de publicação dos **Principia**, Newton não havia ainda chegado à sua lei da gravitação. Numa carta a Newton, datada de 6 de janeiro de 1680, Hooke afirmava que

*"(...) eu suponho que a atração é sempre proporcional ao inverso do quadrado da distância ao centro (...)"<sup>194</sup>*

Numa carta de Newton a Halley, datada de maio-junho de 1686, um ano antes da publicação de seu livro, Newton apresentava uma resenha de sua correspondência com

<sup>192</sup> COHEN, I.B. **Op. cit.**, nota 130. págs. 227/228. Cohen apresenta um breve histórico envolvendo as figuras de Hooke, Huygens e Newton a respeito da aceleração centrípeta e da lei do inverso do quadrado da distância.

<sup>193</sup> COHEN, I.B. **Op. cit.**, nota 130. págs. 165/167.

<sup>194</sup> Citada na Introdução de Eloy Rada à última edição espanhola dos Principia. NEWTON, Isaac. **Princípios matemáticos de la filosofia natural**, volume I. Alianza Universidad, Madrid, 1987, pág. 31.



Hooke e reconhecia que a proposta de Hooke o levou ao descobrimento do teorema da elipse.<sup>195</sup>

Na página 179, na já mencionada **figura 38**, reproduzi um exemplo de cálculo efetuado por Newton nos **Principia**, onde ele demonstrava que a força centrípeta atuante num corpo que percorre uma órbita elíptica é inversamente proporcional ao quadrado da distância do corpo ao foco da elipse.

Esse resultado pode ser escrito como

$$F \propto \frac{1}{R^2} \quad (16)$$

Uma expressão matemática dessa qualidade já estava "no ar" nesse período, não só por causa das intuições ou hipóteses formuladas por pesquisadores como Robert Hooke, bastando mencionar que Kepler propusera uma espécie de lei da diminuição da intensidade luminosa exatamente seguindo a proporcionalidade do inverso do quadrado da distância desde o foco de luz.<sup>196</sup>

Newton estava disposto, pouco antes de preparar os Principia para a impressão, a considerar que essa força também responderia pela força central decorrente da sua análise das leis de Kepler. Ele assim postulou que

*"Se a matéria dos globos que gravitam entre si é homogênea em todos os lugares que equidistam dos centros por todos os lados, o peso de cada um deles com relação ao outro variará inversamente como o quadrado da distância entre os centros."*<sup>197</sup>

Em outras palavras, Newton postulou que a força entre quaisquer duas massas  $m_1$  e  $m_2$  ou  $m_P$ , massa de um planeta,  $m_S$ , massa do Sol, é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre eles:

<sup>195</sup> RADA, Eloy. **Op. cit.**, nota 194, pág. 36.

<sup>196</sup> COHEN, I.B. **Op. cit.**, nota 130. pág. 144.

<sup>197</sup> NEWTON, Isaac. **Op. cit.**, nota 194, Livro III. Proposição VIII. Teorema VIII.

$$F_{grav} \propto \frac{1}{R^2} \quad (17)$$

William Gilbert havia sugerido, quase um século antes desses trabalhos de Newton, que o efeito de um imã é proporcional à massa do imã. Influenciado talvez por esse tipo de sugestão ou outra qualquer semelhante, Newton postulou que

*"A gravidade ocorre em todos os corpos e é proporcional à quantidade de matéria existente em cada um."*<sup>198</sup>

Isso significa que qualquer corpo próximo à superfície da Terra está sujeito a uma força gravitacional que é proporcional à massa da Terra,  $m_T$ , e também à massa do próprio corpo,  $m_c$ . Essas duas proporcionalidades, juntas, produzem a seguinte relação:

$$F_{grav} \propto m_T m_c \quad (18)$$

Newton generalizou esta relação para quaisquer dois corpos, por exemplo, a interação entre a Terra e a Lua seria governada por tal expressão, assim como a força gravitacional entre qualquer planeta e o Sol.

$$F_{grav} \propto m_1 m_2 \quad (19)$$

Considerando o efeito conjunto das duas expressões, (17) e (19), obtemos:

$$F_{grav} \propto \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (20)$$

A fim de converter a proporcionalidade numa equação, introduzimos uma constante de proporcionalidade  $G$ .

$$F_{grav} = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (21)$$

---

<sup>198</sup> NEWTON, Isaac. **Op. cit.**, nota 194, Proposição VII. Teorema VII.

Esta é a lei de Newton da gravitação, também conhecida como **princípio da gravitação universal**.

Na sequência analisaremos a articulação desta teoria gravitacional realizada pelo próprio Newton e apresentada no seu livro **Principia. Não percam!**

### 10.7. Articulação da hipótese gravitacional de Newton

*"A natureza e as leis da natureza jazem escondidas na noite;*

*Deus disse: "Faça-se Newton" e tudo foi luz."*

*A. Pope<sup>199</sup>*

Havia que articular a teoria da gravitação de Newton. Afinal, ela também contava com críticos do porte de Huygens que, como vimos, entre outros argumentos, afirmava que a atração à distância proposta por Newton recolocava em cena categorias do pensamento mágico.

Newton postulava que para um planeta de massa  $m_p$  e à distância  $R_{ps}$  do Sol de massa  $m_s$ , a força gravitacional é dada por:

$$F_{grav} = G \frac{m_s m_p}{R_{ps}^2} \quad (22)$$

Nessa expressão, Newton não conhecia os valores de  $G$ ,  $m_p$  e  $m_s$ .

O que fazer?

#### 1. Que valor de R utilizar?

Mais uma dificuldade bastante séria restava para Newton enfrentar: que valor de R poderia ser utilizado na sua expressão (21) uma vez que, por exemplo, no caso da atração gravitacional entre a Terra e um corpo próximo à sua superfície, parte da Terra

---

<sup>199</sup> Versos (panegírico) do poeta inglês Alexander Pope (1688-1744) que está gravado na lápide do túmulo de Isaac Newton, na Abadia de Westminster, em Londres, Inglaterra.

está bem próxima ao corpo enquanto que outras partes estão a grandes distâncias do mesmo?

Newton resolveu esse e outros problemas, como podemos observar seguindo a leitura de algumas de suas proposições e teoremas contidos no livro I do **Principia**. Vamos a eles.

**Proposição LXX. Teorema XXX:**

*"Se em direção a cada ponto de uma superfície esférica se dirigissem forças centrípetas iguais e decrescentes na razão do quadrado da distância desde tais pontos, digo que um corpúsculo situado no interior de tal superfície não é atraído para nenhum lado por tais forças."*

Newton afirmava aí que a força gravitacional no interior de uma superfície esférica é nula.

**Proposição LXXI. Teorema XXXI:**

*"Com os mesmos pressupostos, digo que um corpúsculo situado fora de uma superfície esférica é atraído na direção do centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao centro da esfera."*

Aqui Newton afirmava que para efeito do cálculo da força gravitacional num ponto exterior a uma superfície esférica tudo se passava como se considerássemos toda a massa dessa superfície concentrada no centro da mesma.

**Proposição LXXIII. Teorema XXXIII:**

*"Se em direção a cada ponto de uma esfera dada tendem forças centrípetas iguais e decrescentes segundo o quadrado da distância a ditos pontos, digo*

*que um corpúsculo situado dentro da esfera é atraído com uma força proporcional a sua distância ao centro."*

**Proposição LXXIV. Teorema XXXIV:**

*"Com os mesmos pressupostos, digo que um corpúsculo situado fora de uma esfera é atraído com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao centro da mesma."*

**Proposição LXXV. Teorema XXXV:**

*"Se em direção a cada ponto de uma esfera dada tendem forças centrípetas iguais e decrescentes segundo o quadrado das distâncias a cada ponto; digo que outra esfera qualquer semelhante será atraída por ela com uma força inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre os centros."*

Quando não há quebra da homogeneidade de densidades nos corpos envolvidos na atração gravitacional mútua considera-se sempre a distância  $R$  como sendo a distância entre seus centros. Newton resolveu mais um problema.

A seguir vamos analisar alguns problemas resolvidos por Newton na articulação de seu paradigma.

**2. O problema da Lua.**

Um dos testes de aplicabilidade do princípio da gravitacional universal foi a tentativa de aplicá-lo para explicar o movimento da Lua em órbita em torno da Terra.

**Proposição III. Teorema III. (livro III):**

*"A força com a qual a Lua é retida em sua órbita se dirige em direção à Terra e é inversamente como o quadrado da distância dos lugares ao centro da Terra."*

$$F_{grav} = G \frac{m_L m_T}{R_{TL}^2} \quad (23)$$

onde:  $m_L$  é a massa da Lua,  $m_T$  é a massa da Terra e  $R_{TL}$  é a distância da Lua à Terra.

Vamos procurar testar a validade da expressão (23), procurando calcular com o uso da mesma alguma grandeza conhecida relacionada com o movimento da Lua em torno da Terra.

Muito antes de Newton formular sua teoria da gravitação conhecia-se o período do movimento da Lua em torno da Terra:  $T_L = 27,3 \text{ dias}$ . Assim, para verificar a expressão basta calcular esse período com o auxílio da mesma. Vamos ver como podemos fazer isso.

Embora as quantidades e grandezas  $G$ ,  $m_L$  e  $m_T$  não fossem conhecidas à época de Newton, podemos utilizar alguns artifícios para eliminá-las ou substituí-las por quantidades conhecidas.

Devido a um resultado descoberto por Galileu de que todos os corpos próximos à superfície da Terra, em queda livre, possuem uma mesma aceleração  $g$ , aplicando a 2ª lei de Newton podemos afirmar que um tal corpo de massa  $m$  estará submetido a uma força gravitacional dada por

$$F_{grav} = mg \quad (24)$$

A expressão da força gravitacional também poderá ser expressa pelo princípio da gravitação universal:

$$F_{grav} = G \frac{m m_T}{R_T^2} \quad (25)$$

onde:  $m_T$  é a massa da Terra e  $R_T$  é o raio da Terra.

As expressões (24) e (25) podem ser igualadas

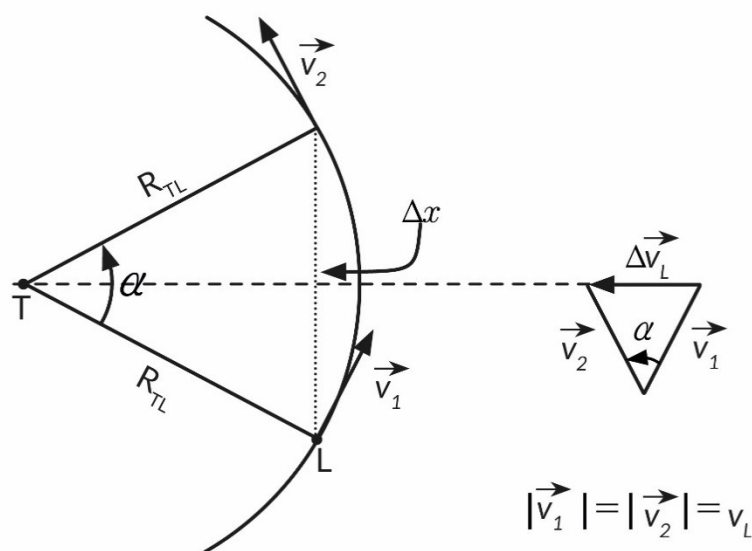
$$mg = G \frac{mm_T}{R_T^2} \quad (26)$$

Portanto, 
$$Gm_T = gR_T^2 \quad (27)$$

Substituindo a expressão (27) na (23), obtemos:

$$F_{grav} = \frac{m_L g R_T^2}{R_{TL}^2} \quad (28)$$

Sabemos que a órbita da Lua em torno da Terra é praticamente circular. Portanto, podemos estudá-la também como um **movimento circular uniforme**. Assim, em cada ponto de sua órbita a direção de sua velocidade será diferente, mas seu módulo será sempre o mesmo. A Figura 40 apresenta duas particulares posições da Lua e suas respectivas velocidades vetoriais.



**Figura 40**

A aceleração média da Lua pode ser calculada pela diferença vetorial entre essas duas velocidades dividida pelo respectivo intervalo de tempo:

$$a_c = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_L}{\Delta t}$$

Essa diferença vetorial entre as velocidades,  $\Delta v_L$ , está representada na **Figura 40**. Como se nota, ela está dirigida para o centro da Terra.

Chamando de  $\Delta x$  a corda compreendida entre os dois pontos da órbita considerados e por semelhança dos dois triângulos desenhados na figura acima, podemos escrever a seguinte igualdade, considerando apenas os módulos:

$$\frac{\Delta v_L}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{R_{TL}} \quad \text{ou} \quad \Delta v_L = \frac{v_L}{R_{TL}} \Delta x$$

O módulo da aceleração centrípeta média poderá ser calculado por

$$a_c = \frac{\Delta v_L}{\Delta t} = \frac{v_L}{R_{TL}} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Calculando o limite da expressão acima para  $\Delta t$  tendendo a zero, obtemos a aceleração centrípeta que age em cada ponto da órbita da Lua em torno da Terra:

$$a_c = \frac{v_L^2}{R_{TL}}$$

Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos a força centrípeta que age sobre a Lua em seu movimento ao redor da Terra:

$$F_C = \frac{mv_L^2}{R_{TL}} \quad (29)$$

Num movimento circular uniforme a velocidade pode ser calculada pela razão entre o perímetro da circunferência e o respectivo período do movimento. Assim, para o caso da Lua em torno da Terra a velocidade  $v_L$  será determinada por:

$$v_L = \frac{2\pi R_{TL}}{T_L} \quad (30)$$

Substituindo (30) em (29), obtemos:

$$F_C = \frac{4\pi^2 m_L R_{TL}^2}{T_L^2 R_{TL}} \quad \text{ou} \quad F_C = \frac{4\pi^2 m_L R_{TL}}{T_L^2} \quad (31)$$



A força centrípeta é provocada pela força de atração gravitacional entre a Terra e a Lua, o que significa que as expressões (28) e (31) podem ser igualadas:

$$\frac{m_L g R_T^2}{R_{TL}^2} = \frac{4\pi^2 m_L R_{TL}}{T_L^2}$$

Simplificando, obtemos:

$$T_L^2 = \frac{4\pi^2 R_{TL}^3}{g R_T^2} \quad (32)$$

Assim, obtemos a expressão do período do movimento orbital da Lua:

$$T_L = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{R_{TL}^3}{g}} \quad (33)$$

Nessa expressão todas as grandezas eram conhecidas à época de Newton:

$$g \cong 9,8 \text{ m/s}$$

$$R_T \cong 6.400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$R_{TL} \cong 60 \times 6.400 \times 10^3 \text{ m}$$

Substituindo esses valores na expressão do período, obtemos  $T_L = 27,3 \text{ dias}$ , reproduzindo o valor anteriormente conhecido. Este resultado foi um dos primeiros a referendar a validade do **princípio da atração gravitacional** de Newton.

### 3. Outro problema da Lua: sua queda em direção à Terra.

#### Proposição IV. Teorema IV. (livro III):

*"A Lua gravita em direção à Terra e é continuamente desviada do movimento retilíneo e retida em sua órbita pela força da gravidade."*

Podemos calcular a aceleração da Lua em direção à Terra por dois modos diferentes. O **modo dinâmico** que nos fornece a aceleração centrípeta e o **modo gravitacional** que nos oferece a aceleração da gravidade da Lua com relação à Terra.

A igualdade de resultados obtidos por esses dois modos indicará que a **Lua está caindo continuamente em direção à Terra**.

Da expressão (30), podemos calcular a aceleração centrípeta:

$$a_c = \frac{4\pi^2 R_{TL}}{T_L^2}$$

Introduzindo nessa expressão os valores já conhecidos à época de Newton, podemos determinar o valor numérico da aceleração centrípeta calculada, **note-se bem**, pelo método dinâmico aplicado ao movimento circular uniforme que se supõe a Lua estar executando em torno da Terra:

$$a_c \cong 2,710^{-3} m/s^2$$

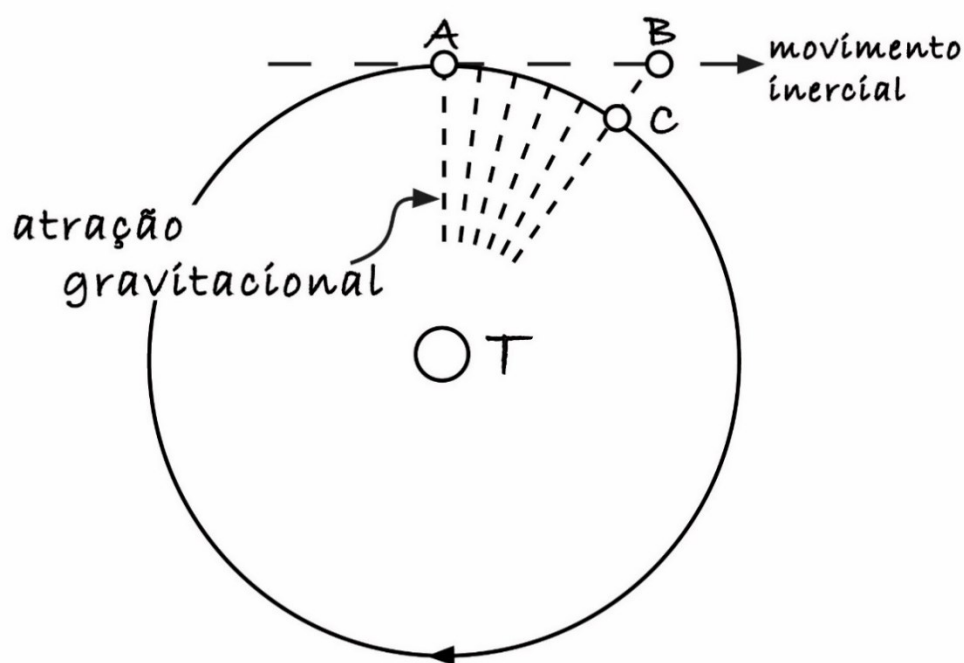


Figura 39<sup>200</sup>

Pelo modo gravitacional, podemos imaginar que a Lua esteja caindo em direção à Terra. Como a expressão para a força gravitacional de Newton afirma que esta é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os corpos em consideração, é lícito afirmar que a aceleração gravitacional também respeita essa proporcionalidade.

<sup>200</sup> COHEN, I.B. **Op. cit.**, nota 130. págs. 168.

Isso significa que a aceleração galileana experimentada por todos os corpos próximos à superfície da Terra, isto é, localizados aproximadamente à distância  $R_T$  do centro da Terra, quando em queda livre, pode ser utilizada para calcular a aceleração gravitacional da "queda" da Lua.

Exemplificando o que foi dito acima: a aceleração gravitacional de um corpo em queda à altura  $R_T$  acima da superfície terrestre terá o valor de  $g/4$ . **Verifique esse resultado.**

Como a Lua está situada a uma distância aproximada de  $60 R_T$  do centro da Terra, sua aceleração gravitacional terrestre será calculada por

$$a_{gravL} = \frac{g}{60^2} \cong 2,7 \times 10^{-3} m/s^2$$

A igualdade entre as duas acelerações determinadas pelos dois métodos acima indicados permite concluir que realmente podemos afirmar que a Lua está "**caindo**" em direção ao centro da Terra, como afirmava Newton. Esse resultado acrescenta mais um ponto favorável à hipótese newtoniana.

#### **4. O problema dos planetas.**

A resolução do movimento planetário foi outro grande triunfo conseguido por Newton.

#### **Fenômeno IV (Livro III)**

*"Supostas em repouso as estrelas fixas, os tempos periódicos dos cinco planetas primários e o do Sol em torno à Terra ou da Terra em torno ao Sol estão na razão da potência 3/2 das distâncias médias ao Sol."*

Com esse enunciado Newton incorporou a terceira lei de Kepler à sua teoria gravitacional.

Por analogia à expressão (32), podemos escrever a seguinte expressão para o caso do movimento de um planeta em órbita em torno do Sol:

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{gR_S^2} R_{PS}^3 \quad (34)$$

Mas, com  $gR_S^2 = Gm_S$ , podemos reescrever a expressão acima:

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_S} R_{PS}^3 \quad \text{ou} \quad T_p^2 = kR_{PS}^3 \quad (35)$$

onde  $k = \frac{4\pi^2}{Gm_S}$  é constante para todos os planetas em órbita em torno ao Sol.

A expressão (35) confirma que podemos deduzir a terceira lei de Kepler a partir da teoria gravitacional de Newton, **mostrando mais uma vez a compatibilidade da teoria de Newton com as leis empíricas obtidas por Kepler.**

### 5. Como fica $g$ constante na teoria gravitacional de Newton?

Sabemos que com a explicação do movimento dos projéteis desenvolvida por Galileu, foi atribuída uma aceleração constante  $g$  de queda dos corpos. Ao mesmo tempo, a teoria gravitacional de Newton estabelece que a aceleração gravitacional de Newton varia com o inverso do quadrado da distância. Não deixa de haver aqui uma certa incompatibilidade entre as duas explicações.

Porém, podemos verificar numericamente que os resultados concordam entre si.

$$F_{grav} = \frac{m_T m_C}{R_{TC}^2} = m_C g$$

Portanto,  $g = \frac{Gm_T}{R_{TC}^2}$ , onde  $R_{TC} = 6.400 \text{ km} + h$ , e  $h$  é a altura do corpo com relação à superfície terrestre. Como  $h$  é muito menor que  $6400 \text{ km}$ , podemos dizer que  $g$  é praticamente constante, concordando com o resultado de Galileu.

**Testemunhamos com esse tipo de procedimento o nascimento da mecânica.**

## 6. Newton procura explicar o fenômeno das marés.

Já comentamos, através de uma citação, que Kepler supunha que a Lua exercia alguma ação sobre as águas dos oceanos, embora não possuísse uma concepção gravitacional.

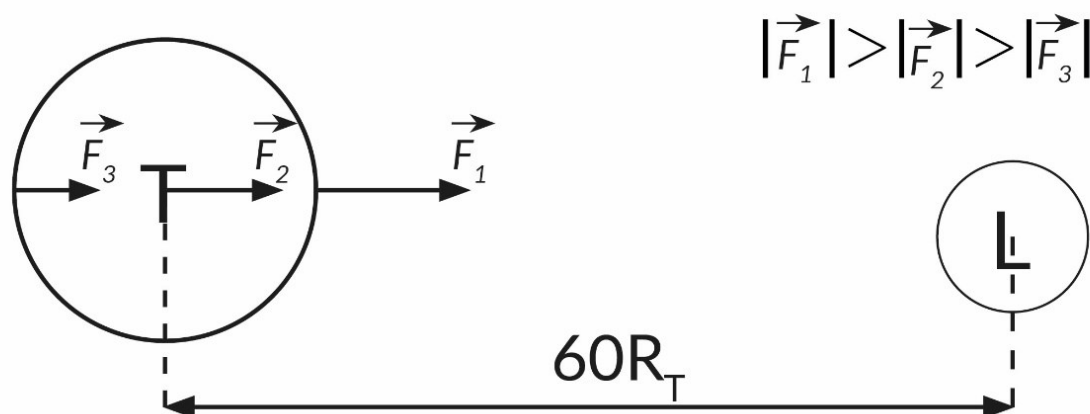
Galileu procurou explicar o fenômeno das marés. Ele imaginava que uma possível combinação dos dois movimentos terrestres, ou seja, o movimento orbital da Terra em torno ao Sol e sua rotação diária em torno de seu próprio eixo, poderiam provocar sacudidas na Terra de tal forma que as águas do mar ora se ergueriam ora baixariam. Ele não aceitava hipóteses, como a de Kepler, que atribuíam ao Sol ou à Lua esse fenômeno. Stephen Mason, comentando esta posição, diz que Galileu:

*"Rechaçou a ideia de que o Sol e a Lua provocavam as marés, pois isso implicava que os corpos celestes eram superiores à Terra e influíam sobre os acontecimentos terrestres, doutrina à qual ele era muito contrário. Contudo, sua teoria exigia a existência de uma maré diária e não duas, como se observa. Além do mais, contradizia o princípio de inércia segundo o qual os corpos da Terra deveriam compartilhar seus movimentos." <sup>201</sup>*

Coube a Newton formular uma primeira explicação científica convincente do fenômeno das marés, atribuindo seu efeito principalmente à atração gravitacional da Lua sobre os mares. Newton também atribuiu ao Sol tal papel se bem que de magnitude bem menor que aquele desempenhado pela Lua.

---

<sup>201</sup> MASON, Stephen F. **op. cit.**, nota 178, pág 52.



**Figura 42**

Como podemos perceber pela **Figura 42**, o modelo de Newton para as marés era bastante simples.

No lado da Terra voltado para a Lua a força gravitacional desta sobre as águas do mar é aproximadamente inversamente proporcional ao quadrado de  $59R_T$ , maior que a força exercida sobre a parte sólida da Terra que poderia ser considerada proporcional ao inverso do quadrado de  $60R_T$ . É como se as águas do mar fossem puxadas para fora da Terra.

Do lado contrário da Terra com relação à Lua, a força gravitacional desta sobre as águas do mar é aproximadamente inversamente proporcional ao quadrado de  $61R_T$ , menor do que a força gravitacional da parte sólida da Terra. O efeito aproximado é o da Terra "afastar-se" das águas e estas ficam mais elevadas nessa parte da superfície terrestre.

A explicação contida no modelo de Newton previa assim duas marés simultâneas nos lados opostos da Terra, o que se verifica na realidade. Além do mais, devido à rotação da Terra em torno de seu eixo tais fenômenos voltam a se repetir 12 horas depois.

É preciso observar também que, devido à rotação da Terra e a efeitos do atrito viscoso da água com a superfície da Terra e com ela própria, os máximos das marés

nunca ocorrem exatamente sobre a reta que une os centros da Terra e da Lua, isto é, ocorrem algumas horas após a passagem da Lua através do meridiano local.

Newton também concluía com seu modelo que as maiores marés ocorriam durante a Lua cheia e a Lua nova. Procure explicar este fenômeno.

### **10.8. À guisa de conclusão sobre os "Principia".**

Vimos nesta breve análise da construção do **princípio da gravitação universal** que Newton realizou uma síntese múltipla da física de sua época.

Em primeiro lugar, Newton utilizou suas leis do movimento acopladas às duas primeiras leis de Kepler para dar significado físico à força de atração central, generalizando a aplicabilidade da segunda lei de Kepler, incluindo até o movimento retilíneo uniforme.

Em segundo lugar, Newton conseguiu deduzir a terceira lei de Kepler de sua hipótese gravitacional.

Em terceiro lugar, oferece uma explicação física para a constância da aceleração gravitacional nas proximidades da superfície da Terra, como prevista pelos trabalhos de Galileu.

Em quarto lugar, Newton sintetiza num mesmo princípio universal fenômenos terrestres (a queda de corpos) e fenômenos celestes (a "queda" da Lua).

Analisamos também como o próprio Newton conseguiu ser bem sucedido na aplicação de sua teoria gravitacional para resolver uma série de problemas que perturbavam os físicos contemporâneos.

## Capítulo 11 - Triunfos da mecânica newtoniana depois de Newton.

Certamente a construção do **princípio da gravitação universal** e sua articulação efetuada pelo próprio Newton, por meio da solução dada ao movimento da Lua em torno da terra, da interpretação da "queda" da Lua em direção à Terra, da obtenção das leis de Kepler e da explicação das marés, por exemplo, já seriam suficientes para constatar a importância do empreendimento newtoniano e a genialidade de seu autor. Essa constatação será evidenciada se acrescentarmos a análise de alguns eventos que ampliam ainda mais o alcance do princípio de gravitação estabelecido por Newton. Tais sucessos atravessaram os três séculos que se sucederam à publicação dos **Principia**.

### 11.1. Determinação de G.

Todos os exemplos de aplicação do princípio da gravitação universal de Newton, acima apresentados, não necessitavam do conhecimento numérico da **constante gravitacional G**<sup>202</sup>.

Newton tinha plena consciência da quase impossibilidade de determinar o valor numérico preciso dessa constante dada a enorme dificuldade em medir forças gravitacionais diretamente, a não ser no caso de interação de corpos próximos à superfície da Terra quando a força gravitacional se confunde com o próprio peso. Mesmo assim, neste caso de interação com a Terra, a massa desta não é conhecida<sup>203</sup>.

---

<sup>202</sup> Deve-se notar que as **constantes universais** desempenham um papel fundamental na construção do conhecimento em Física. A constante gravitacional de Newton  $G$  coloca-se ao lado de outras constantes universais, tais como a velocidade da luz  $c$ , fortemente vinculada à teoria da relatividade de Einstein, e a constante de ação de Planck  $h$ , básica para compreensão da mecânica quântica.

<sup>203</sup> OREAR, J, no seu livro didático **Fundamentos da Física** (Livros Técnicos Científicos Ed., Rio de Janeiro, 1981, pág.58), afirma que Newton teria calculado aproximadamente um valor numérico para  $G$ , supondo a densidade média da Terra  $\rho = 5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Este número diferiria em cerca de 10% do valor real da densidade. Daí, Newton teria calculado a massa da Terra por meio do produto dessa densidade pelo volume da Terra, ou seja,  $M_T = \rho \left( \frac{4}{3} \pi R_T^3 \right)$ . Substituindo o valor encontrado na expressão  $G = \frac{gT_T^2}{M_T}$ , Newton teria obtido o seguinte valor para a constante universal da gravitação:  $G =$

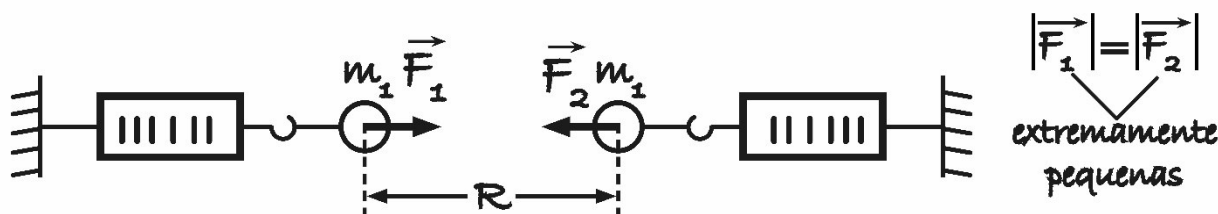


Para obter o valor de  $G$  seria necessário conhecer a intensidade da força gravitacional entre dois corpos quaisquer manipuláveis, e aí surgia outro problema: as forças de interação gravitacional são extremamente fracas.

Assim, a determinação do valor de  $G$  dependia do conhecimento dos valores de:

- i. força gravitacional entre os corpos
- ii. massas dos corpos
- iii. distância entre os dois corpos.

O problema se concentrava, portanto, na determinação da força gravitacional. Uma possibilidade seria utilizar um dispositivo como o reproduzido na **Figura 43**.



**Figura 43.** Um possível esquema para medir forças gravitacionais

Apenas no final do século XVIII, entre os anos 1797 e 1798, portanto mais de um século depois da publicação dos **Principia**, o exímio físico inglês Henry Cavendish (1731-1810), que realizou também importantes experimentos em eletricidade. Ele conseguiu medir a constante gravitacional  $G$ , com grande precisão.

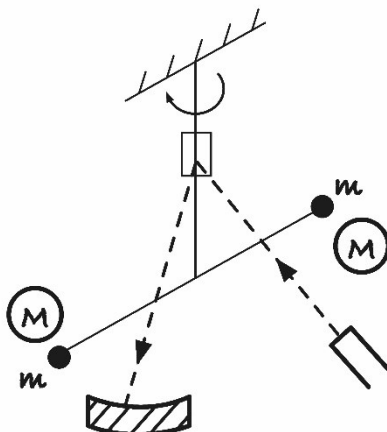
Porém, como ele conseguiu medir a força gravitacional?

Cavendish utilizou um aparato experimental muito sensível, que consistia basicamente de uma balança de torção construída com um fio de fibra de quartzo do

---

$7,35 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , que seria 10% maior que o valor atual dessa constante. No entanto, Orear não indica a fonte desse cálculo de Newton.

qual é suspensa uma barra contendo duas esferas de massa conhecida  $m$ , como mostra a **Figura 44**.



**Figura 42.** Esquema do aparato experimental de Cavendish

Aproximando à mesma distância de cada das esferas de massa  $m$ , outras duas esferas de massa conhecida  $M$ , as forças gravitacionais entre as mesmas provocam um torque que torce o fio de um certo ângulo. Para facilitar a medida desse ângulo, adapta-se um pequeno espelho ao pêndulo sobre o qual se faz incidir um feixe luminoso que é projetado sobre um anteparo provido de uma escala. Como o pêndulo havia sido calibrado previamente, a medida precisa desse desvio angular permite a determinação torque e, conseqüentemente, da força gravitacional.

Cavendish obteve com esse procedimento o valor da constante gravitacional  $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ . As determinações contemporâneas dessa constante aproximam-se bastante desse valor.

Conhecendo-se o valor da **constante gravitacional** ampliou-se o espectro de aplicação do princípio universal da gravitação de Newton, como veremos a seguir.

### 11.2. Determinação dg massa da Terra.

Um valor aproximado da massa da Terra foi determinado pela primeira vez, em 1774, pelo astrônomo inglês Nevil Maskelyne (1732-1811). Ele mediu o desvio de um

fio de prumo, com relação à vertical, dos dois lados de uma montanha de granito bastante íngreme. Depois determinou a massa da montanha a partir de uma estimativa de seu volume e da densidade do granito. Finalmente, determinou a massa da Terra comparando a atração terrestre sobre os fios de prumo com a da montanha<sup>204</sup>.

Em 1798, de posse do valor da constante gravitacional  $G$ , obtido com o procedimento descrito na seção anterior, Henry Cavendish pode finalmente determinar um valor mais preciso para a massa da Terra. Sendo a força gravitacional entre a Terra e um corpo de massa  $m$  próximo à sua superfície, como estudamos anteriormente, dada por  $F_{grav} = G \frac{mm_T}{R_T^2}$ , podemos obter a massa da Terra:

$$m_T = \frac{F_{grav}R_T^2}{Gm} \quad (36)$$

A força gravitacional, nas proximidades da superfície da Terra, também pode ser determinada por:

$$F_{grav} = mg \quad (37)$$

Substituindo (37) em (36), obtém a expressão para a massa da Terra:

$$m_T = \frac{gR_T^2}{G} \quad (38)$$

Utilizando os valores  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e  $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ , obtemos a massa da Terra,  $m_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

### 11.3. Determinação da massa do Sol.

Podemos também calcular a massa do Sol utilizando a terceira lei de Kepler que, no caso de um planeta em órbita em torno do Sol, pode ser expressa por:

---

<sup>204</sup> MASON, Stephen F. **Historia de las ciencias**. Vol. 3, Alianza Editorial, Madrid, 1985, págs. 45/46.

$$T_p^2 = kR_{PS}^3, \quad \text{onde} \quad k = \frac{4\pi^2}{Gm_s}$$

$$\text{Portanto, } m_s = \frac{4\pi^2}{Gk}$$

A constante  $k$  pode ser determinada a partir do movimento orbital da Terra em torno do Sol, onde:  $T_T = 1 \text{ ano} = 3,16 \times 10^7 \text{ seg}$  e  $R_{PS} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$ . Daí, substituindo o valor de  $k$  na expressão acima, obtemos para a massa do Sol o valor:

$$m_s \cong 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

#### 11.4. Descoberta de novos planetas.

Os mesmos seis planetas conhecidos desde a mais longínqua antiguidade, inclusive pelos filósofos gregos, e que inspiraram os sonhos pitagóricos de Kepler, continuavam a ser os únicos conhecidos à época de Newton e durante o século seguinte à publicação dos **Principia**. Não era, e não é, difícil detectar planetas que não são visíveis a olho nu.

Por isso, apenas em 1781, o planeta Urano foi descoberto, pelo astrônomo amador alemão, William Hersche, que viveu entre 1738 e 1822. Thomas Kuhn afirma que cerca de duas dezenas de observações desse planeta, registradas entre 1690 e 1781, foram inicialmente consideradas como devidas a uma estrela. A sua aparente imobilidade em observações efetuadas em noites sucessivas levava a essa identificação. Nesse ano de 1781 e nos anos seguintes, observações realizadas com telescópios de reflexão gigantes permitiram a Herschel anunciar a descoberta de um novo cometa! Meses depois, dado o insucesso de ajustar as observações à órbita de um cometa, Herschel chegou à conclusão de que um étimo planeta fora descoberto.

Assim, até os corpos celestes estudados há muito tempo começavam a ser vistos de forma diferente no final do século XVIII. Thomas Kuhn analisa esse tipo de acontecimento com estas palavras:

*"A própria facilidade e rapidez com que os astrônomos viam novas coisas ao olhar para objetos antigos com velhos instrumentos pode fazer com que nos sintamos tentados a afirmar que, após Copérnico, os astrônomos passaram a viver num mundo diferente"* <sup>205</sup>

Podemos nos perguntar por que demorou tanto tempo para que fossem descobertos novos planetas.

Um dos motivos foi aquele destacado por Thomas Kuhn. Apenas com a mudança da visão de mundo, provocada pela revolução científica que se iniciara Copérnico mas que tem na síntese newtoniana o seu grande triunfo, é que astrônomos começaram a procurar mudanças no novo céu, começaram a busca de novos planetas e asteroides.

Porém, havia também outros motivos. Durante muito tempo, todos os cálculos realizados envolviam diversas aproximações, procedimento típico de qualquer área da física clássica e contemporânea. Por exemplo, consideravam-se muitas vezes as órbitas planetárias como se fossem circulares quando rigorosamente não eram, distribuição homogênea de matéria ou densidade constante, etc.

Uma outra aproximação comum, nos cálculos que eram efetuados, era a não consideração de interação entre de dois corpos. Isto é, não se consideravam as forças gravitacionais devidas às interações com outros planetas do sistema solar quanto era estudada e interação da terra com o Sol, por exemplo.

Aos poucos, durante o século XVIII e XIX, foram sendo desenvolvidos artifícios matemáticos que permitiam resolver problemas de interação entre diversos corpos. Esses artifícios receberam o nome de **cálculo de perturbações**. Foi exatamente pelo conhecimento de perturbações na órbita de determinados planetas que outros foram descobertos.

---

<sup>205</sup> KUHN, T. S., op. Cit., nota 3, pág. 192.

Essa foi uma das razões da demora em se descobrir os novos planetas do sistema solar. A outra estava relacionada com a necessidade de melhores equipamentos de observação. Tema, aliás, muito presente na contemporaneidade da astrofísica.

Apresento, como exemplo de utilização desse método, a descoberta do planeta Netuno. Uma série de irregularidades observadas na órbita de Urano, quando comparadas com as previsões teóricas baseadas na teoria gravitacional de Newton, não explicadas pelas interações com os demais planetas conhecidos, levaram os matemáticos e astrônomos a procurar "responsabilizar" eventual candidato a planeta localizado além da órbita de Urano. Havia também alguns físicos que duvidavam quanto à possibilidade de aplicação da lei de Newton para distâncias tão afastadas do Sol.

Em 1845, o astrônomo e matemático inglês John Adams (1819-1892) e, em 1846, o matemático e astrônomo francês J. J. Leverrier (1811-1877), comparando a órbita do planeta Urano com resultados teóricos baseados em seus cálculos, previram a existência de um novo planeta, indicando a posição desse novo corpo celeste. Em 23 de setembro desse mesmo ano, o astrônomo alemão J. G. Galle (1812-1910), do Observatório de Berlin, apontando seu telescópio para a direção que havia sido sugerida por Leverrie, descobriu o novo planeta a cerca de 1° da posição predita. Nascia assim o planeta Netuno. Foi mais um grande triunfo da lei da gravitação universal de Newton.

No começo do século XX, os astrônomos norte-americanos William Henry Pickering (1858-1938) e Percival Lowell (1855-1916) realizaram observações mais refinadas, e novas perturbações foram detectadas nas órbitas dos planetas recém descobertos o que os levou à hipótese da existência de mais um planeta. Assim, em 1930, o planeta Plutão foi descoberto pelo astrônomo norte-americano Clyde Tombaugh (1906-1997).

Moysés Nussenzweig faz o seguinte comentário sobre a descoberta dos planetas:

*"Os raios das órbitas dos planetas, que Kepler também havia querido deduzir, dependem das condições de sua formação, e talvez estejam*

*ligados ao problema matemática extremamente difícil e ainda não resolvido da estabilidade do Sistema Solar.*”<sup>206</sup>

### **11.5. Uma viagem para além do sistema solar.**

As observações cada vez mais cuidadosas do espaço sideral não pararam mais. Por exemplo, descobriram-se estrelas duplas, par de estreias que giram uma em relação à outra: como o par Sirius e Sirius B, descoberto em 1862. Para esses pares de estrelas também é aplicável o princípio da gravitação universal. Lembrando que Sirius está a uma distância aproximada de 8,7 anos luz da Terra. ampliou-se enormemente o alcance de aplicação da teoria newtoniana.

Se Aristóteles estivesse vivo teria oportunidade de verificar quão diferente da sua é a descrição do universo após o advento da física newtoniana. Nem as estrelas fixas são fixas! Descobriu-se que as estrelas também estão em movimento, em particular o nosso sistema solar, O Sol tem uma velocidade orbital de aproximadamente 230 km/seg.

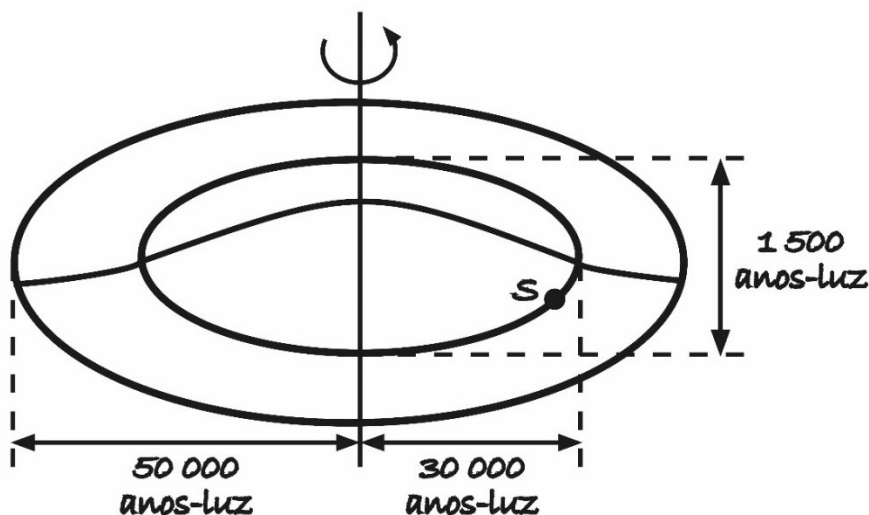
Até a segunda década do XX, os astrônomos acreditavam que a Via Láctea fosse um sistema relativamente pequeno, situando-se o Sol próximo de seu centro. O astrônomo norte-americano Harlow Shapley (1885-1972), em 1917, estabeleceu as primeiras medidas razoavelmente seguras do tamanho da Via Láctea. Ele determinou que o Sol devia situar-se a cerca de trinta mil anos-luz do centro da Via Láctea. Estabeleceu também uma estimativa de cem mil anos-luz para o diâmetro da galáxia. Suas observações levaram-no à conclusão de que havia outros corpos que pareciam estar em órbita junto com a Via Láctea. Em 1924, o astrônomo norte-americano Edwin

---

<sup>206</sup> NUSSENZWEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica. 1 - Mecânica.** Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 1988. pág. 335. Esse volume da coleção de livros de Física básica de Moysés Nussenzweig é uma raridade entre manuais universitários: ele apresenta várias passagens da construção do conhecimento em física baseado em argumentos históricos. Recomendo fortemente a leitura do capítulo 10 desse livro, particularmente as seções 10.6, 10,7 e 10,8, págs. 312 a 338.

Hubble (1889-1953) provou que esses corpos eram outras galáxias que se afastavam rapidamente de nosso sistema solar.

A **Figura 45** apresenta um esboço da forma da nossa galáxia, com suas dimensões aproximadas e a localização do Sol, de acordo com aquilo que havia sido determinado por Shapley.



**Figura 45** Esboço das dimensões da Via Láctea

Com essas dimensões e conhecendo a velocidade do Sol em torno do eixo galáctico, foi possível estimar a massa de nossa galáxia, levando-se em consideração toda a massa que está localizada a distâncias menores que a distância do a esse eixo. Lembramos que, aplicando um dos teoremas de Newton, podemos desprezar o efeito gravitacional do restante da massa da galáxia situada além do Sol.

Pela equação (31), página 195, podemos calcular a força centrípeta que atua sobre o Sol devido a essa massa galáctica:

$$F_c = m_s \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

onde  $R=30.000$  anos-luz e  $T = 2 \times 10^8$  anos (ou seja, 200 milhões de anos!).

A força gravitacional é expressa da seguinte forma:

$$F_{grav} = G \frac{m_s m_G}{R^2}$$



Da igualdade entre essas duas expressões, obtemos a expressão da massa da galáxia:

$$m_G = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

com a qual calculamos o valor numérico da massa da Via Láctea:  $m_G \cong 10^{43} kg$ .

Como outras medidas levavam a uma avaliação da massa da galáxia de cerca da metade desse valor, pensou-se que a determinação através da expressão gravitacional estivesse equivocada. Porém, pelo que tudo indicava seta não era a realidade, pois aparentemente ela estaria medindo algo mais do que a matéria visível. Dessa forma, foi se formando a hipótese, cada vez mais forte, da existência da matéria escura, que seria uma massa não observável do universo, imaginada inicialmente talvez composta de poeira interestelar, buracos negros e outras massas não identificadas.

Como vemos a massa dá muito pano para manga, como podemos perceber da seguinte citação.

*"Só 5% da massa do universo é composta pelo tipo de material de que os seres humanos são formados – **matéria bariônica** (moléculas, átomos, prótons, elétrons e assim por diante), Cerca de 35% têm a forma ainda desconhecida de **matéria escura fria**, que (assim como a matéria bariônica) pode ser atraída pela gravidade e formar halos em volta das galáxias, assim como poderia também formar "galáxias", "estrelas" e "planetas" de matéria escura, que não emitem luz. Os restantes 60% da massa do universo têm a forma também desconhecida de **energia escura** (segundo a denominação dada pelos cosmólogos), que está presente em todo o universo e possui enorme tensão".*<sup>207</sup>

---

<sup>207</sup> THORNE, Kip S. **As dobras do espaço-tempo e o mundo quântico**. In: HAWKING, Stephen W. *at all*. O futuro do espaço-tempo. Companhia das São Paulo, 2005, pág. 156.

## Capítulo 12. Mais alguns tópicos gravitacionais.

Teríamos muito mais a estudar sobre o tema da gravitação. Muito mais aplicações poderiam ser aqui introduzidas. Porém, dado o objetivo desta introdução ao tema da Gravitação, que é o de apresentar a evolução do tema relacionado com o estudo dos graves e dos corpos celestes desde as primeiras incursões, dos antigos gregos, que levaram ao estudo de porque os corpos caem acelerados e sobre o enigmático movimento constante dos corpos celestes, até o advento do princípio da gravitação universal de Newton, creio que estamos chegando ao final provisório deste gravitar histórico/cultural em torno da gravitação. Mas antes do fecho há ainda algumas coisas a acrescentar. Assim, vamos analisar algumas outras questões relacionadas com a teoria da gravitação.

### 12.1. Campo gravitacional.

Até aqui nós tratamos a interação gravitacional entre dois corpos quaisquer como uma **ação à distância** de um corpo sobre o outro. Esse foi o procedimento adotado por Newton e que foi criticado, entre outros motivos, pelo fato de que tal ação pressupunha a existência de um meio que possibilitasse tal interação. Aliás, no seu livro **Óptica**, Newton, nas questões que estão no apêndice desse livro, lança a hipótese da existência de uma espécie de matéria etérea que poderia desempenhar o papel de meio para propagação da gravidade, da luz, do calor, etc. É o precursor do éter luminífero de Maxwell.

Para contornar esse problema podemos utilizar uma outra conceituação útil para estudar a interação gravitacional. É o conceito de **campo**. Podemos considerar que a presença de qualquer massa numa determinada região do espaço modifica-o pela presença de um **campo gravitacional**. Praticamente evidencia-se a presença do campo gravitacional pela medida da sua ação sobre qualquer outro corpo nele situado.

Por exemplo, diz-se que a Terra provoca um campo gravitacional no espaço ao seu redor pois qualquer corpo situado nas suas proximidades sofre a ação de uma aceleração  $g$ . A grandeza  $g$  recebe o nome de **intensidade do campo gravitacional**.

A intensidade do campo gravitacional é dada pela razão entre a força gravitacional local e a massa do corpo.

Como a intensidade do campo gravitacional terrestre não varia com o tempo diz-se que o campo gravitacional constitui um **campo estacionário**.

Na física trabalhamos com outros tipos de campos: campo elétrico e campo magnético, por exemplo. Albert Einstein (1879-1955) sonhava com uma teoria que unificasse as várias espécies de campo conhecidas. Morreu sem ver realizado tal sonho que ainda parece muito distante de ser concretizado, embora ainda continue uma preocupação de muitos físicos contemporâneos.

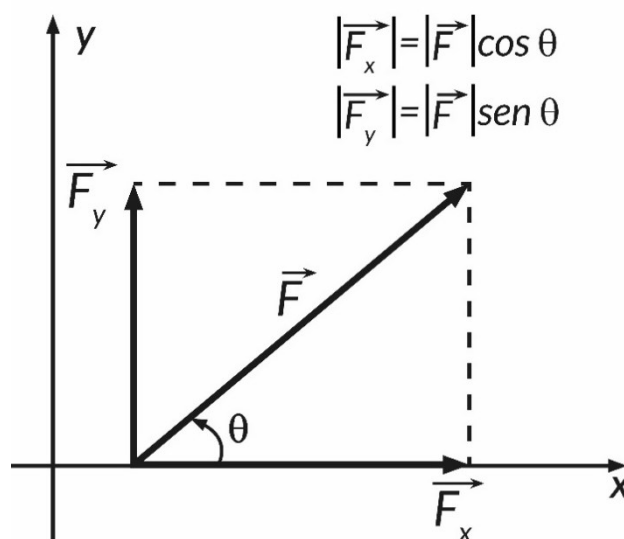
## 12.2. A velocidade de escape da Terra

Vamos definir algumas grandezas físicas úteis para efetuar alguns cálculos gravitacionais.

**Trabalho:** se uma partícula é deslocada de uma distância  $x$  sob a ação de uma força constante  $F$  que atua na direção do movimento dizemos que a força  $F$  exerce um trabalho que é calculado pelo produto da **força**  $\vec{F}$  pelo deslocamento  $x$ . Isto é:

$$W = Fx \quad (39)$$

Se a força  $\vec{F}$  faz um ângulo  $\theta$  com a direção do movimento, apenas a componente da força nessa direção realiza trabalho. Essa componente é calculada pela expressão  $F\cos\theta$ .



**Figura 46**

O trabalho de uma força é igual ao produto da componente da força na direção do deslocamento pela distância percorrida.

O trabalho da força  $F$  será determinado por

$$W = F_x \cos \theta \quad (40)$$

Se considerarmos a força e o deslocamento como grandezas vetoriais é fácil perceber que o trabalho da força  $F$  pode ser representado pelo produto escalar entre  $\vec{F}$  e  $\vec{x}$ , ou seja

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} \quad (41)$$

Se a força  $\vec{F}$  for variável podemos calcular o trabalho por ela realizado num elemento infinitesimal  $dx$  por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

e o trabalho ao longo de uma dada trajetória será dado por:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (42)$$

No caso do campo gravitacional o trabalho para elevar corpo da superfície da terra até uma altura  $h$  pode ser expresso por

$$W = mgh$$

considerando  $g$  constante.

Se na expressão (41) utilizarmos a segunda lei de Newton expressa por

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

o trabalho da força  $F$  será dado por

$$F dx = m dv \frac{dx}{dt} = m v dv$$

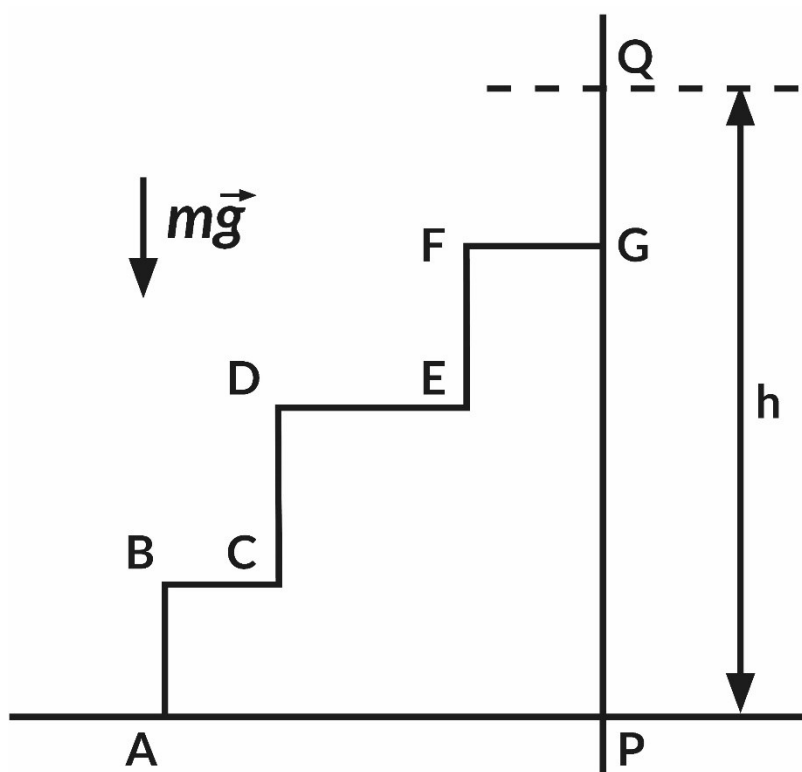
e finalmente

$$W = \int_1^2 F dx = \int_1^2 m v dv = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_1^2$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (43)$$

Ou seja: o **trabalho** realizado sobre uma partícula por uma determinada força, ou resultante de forças, é igual à variação de sua energia cinética.

A conclusão acima é aplicada no caso de forças conservativas, ou seja, aquelas em que o trabalho realizado independe do particular caminho seguido pelo corpo para ir de um ponto a outro de sua trajetória. Por exemplo, podemos verificar que para elevar um corpo de uma certa altura  $h$ , o trabalho  $mgh$  realizado pela força gravitacional não depende do caminho utilizado para chegar até essa altura. Isso é ilustrado de modo simplificado na **Figura 47**.



**Figura 47**

O trabalho necessário para ir até a altura  $h$  indo pelo caminho vertical representado pelo segmento  $\overline{PQ}$  é igual ao trabalho realizado através do caminho de "degraus"  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ , ...,  $\overline{GQ}$ , etc. Isso é assim porque, pela aplicação da definição, representada pela expressão (41), o trabalho é nulo nos trechos horizontais  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$ , etc, pois a força gravitacional nos mesmos é ortogonal ao caminho percorrido.

Assim, como  $\overline{PQ} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GQ} = h$ , chegamos o resultado que queríamos. Desta forma, a força gravitacional realiza um trabalho que independe do caminho e só depende dos pontos inicial e final considerados.

Por outro lado, a força gravitacional em qualquer corpo de massa  $m_c$  em função da distância  $x$  ao centro da Terra é expressa por:

$$F = G \frac{m_T m_c}{x^2} \quad (44)$$

Utilizando novamente a expressão (42), podemos calcular o trabalho necessário para levar um corpo de massa  $m_c$  desde a superfície da Terra,  $R_T$ , uma distância qualquer,  $R$ :

$$W = \int_{R_T}^R G \frac{m_T m_c}{x^2} dx = G m_T m_c \int_{R_T}^R \frac{dx}{x^2} = G m_T m_c \left[ -\frac{1}{x} \right]_{R_T}^R$$

$$W = G m_T m_c \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R} \right) \quad (45)$$

Agora se quisermos que o corpo de massa  $m_c$  se afaste da Terra sem mais retornar, devemos calcular o trabalho necessário para levá-lo até o infinito, isto é, devemos substituir  $R$  por  $\infty$ . Assim o trabalho necessário para fazer um corpo escapar da gravidade terrestre será dado por

$$W_{grav}^{esc} = G \frac{m_T m_c}{R_T} \quad (46)$$

Então, como a força gravitacional é conservativa o trabalho realizado por essa força também é numericamente igual à variação da energia cinética. Neste caso, imaginando que o corpo parta com uma velocidade inicial  $v_e$  da superfície da Terra e que tenda para um ponto no infinito aproximando-se com velocidade zero, a variação de sua energia cinética será dada por:

$$E_C = \frac{1}{2} m v_e^2 \quad (47)$$

Igualando as duas expressões (46) e (47), podemos obter o valor mínimo da velocidade que deve ser fornecida a um corpo na superfície da Terra a fim de que se liberte da gravidade terrestre:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = G \frac{m_T m_C}{R_T}$$

Daí, obtemos a velocidade  $v_e$ :

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}} \quad (48)$$

Essa velocidade é convencionalmente denominada **velocidade de escape**. Substituindo os valores conhecidos das grandezas que aparecem na expressão (48), obtemos o valor numérico da velocidade de escape

$$v_e \cong 11,2 \text{ km/s}$$

George Gamow (1904-1968), importante físico do século XX e autor de inúmeros trabalhos de divulgação científica, escreveu um interessante comentário a respeito da velocidade de escape e da atmosfera, que não foi levada em consideração nos cálculos apresentados acima:

*"Assim, para comunicarmos a esse objeto um total de energia suficiente para que ele ultrapasse o limite das forças gravitacionais terrestres, devemos satisfazer a seguinte condição:  $[v_e \geq \sqrt{2G_T m_T / R_T}]$  (...) A situação complica-se, é lógico, por causa da presença da atmosfera terrestre. Se alguém disparasse um projétil de artilharia com a necessária velocidade de escape a partir da superfície terrestre, como foi descrito em **A viagem ao redor da Lua**, uma fantasia do famoso escritor Julio Verne, a cápsula jamais teria chegado ao seu destino. Ao contrário da descrição feita por Julio Verne, tal projétil ter-se-ia fundido logo de saída com o calor desenvolvido pelo atrito com o ar, e os detritos teriam caído, pois teriam perdido toda energia. É aqui que aparecem as vantagens de um*



*foguete sobre um projétil de artilharia. Um foguete parte da plataforma de lançamento vagarosamente e vai ganhando velocidade gradativamente enquanto vai subindo. Desse modo, ele atravessa as camadas mais densas da atmosfera terrestre com velocidades para as quais o calor gerado por atrito ainda não tem grande importância, e somente atinge sua velocidade máxima numa altitude em que o ar é suficientemente rarefeito para não causar nenhuma resistência significativa ao vôo.*<sup>208</sup>

### 12.3. Dois modos diferentes de medir massa?

Estudamos nos capítulos anteriores que há dois modos distintos de calcular a aceleração de qualquer corpo em queda livre ou a aceleração responsável pela manutenção de um corpo em órbita em torno de outro: o modo dinâmico e o modo gravitacional.

O **modo dinâmico** permite que calculemos a aceleração que é responsável por alterar a inércia, ou movimento uniforme, que um determinado corpo teria na ausência de força a ele aplicada. Assim, pela 2ª lei de Newton teríamos uma força atuando na direção da aceleração e a razão entre a força aplicada e a decorrente aceleração seria a massa do corpo, que vamos representar, neste modo, por  $m_i$ . Assim,

$$m_i = \frac{F}{a} \quad (49)$$

O **modo gravitacional** permite que se calcule a aceleração gravitacional, ou melhor, a intensidade do campo gravitacional, que provoca um semelhante ao acima descrito. Assim, novamente pela 2ª lei de Newton, teríamos uma força gravitacional atuando na direção dessa aceleração e a nova razão entre a força gravitacional e o seu

---

<sup>208</sup> GAMOW, George. **Gravidade**. Editora Universidade de Brasília, 1965, págs. 83/84. Original inglês de 1961).

decorrente efeito de aceleração nos daria uma outra massa do corpo, que vamos representar por  $m_g$ . Assim:

$$m_g = \frac{F_g}{g} \quad (50)$$

É claro que no caso, por exemplo, de um corpo em queda livre teremos  $a = g$ .

Portanto, chegamos à definição de duas massas: **a massa inercial,  $m_i$ , e a massa gravitacional,  $m_g$** . Embora Newton já houvesse mostrado preocupação com essa possível diferenciação entre as massas, essas denominações só surgiram com os trabalhos de Einstein, publicados após 1914. Veremos um pouco mais adiante algumas das contribuições de Albert Einstein para o estabelecimento de mais um gravitacional baseado nessa diferenciação.

Como será que elas se relacionam?

Quem percebeu isso pela primeira vez?

Qual a utilidade física de tal diferenciação?

Vamos procurar responder a essas questões na sequência.

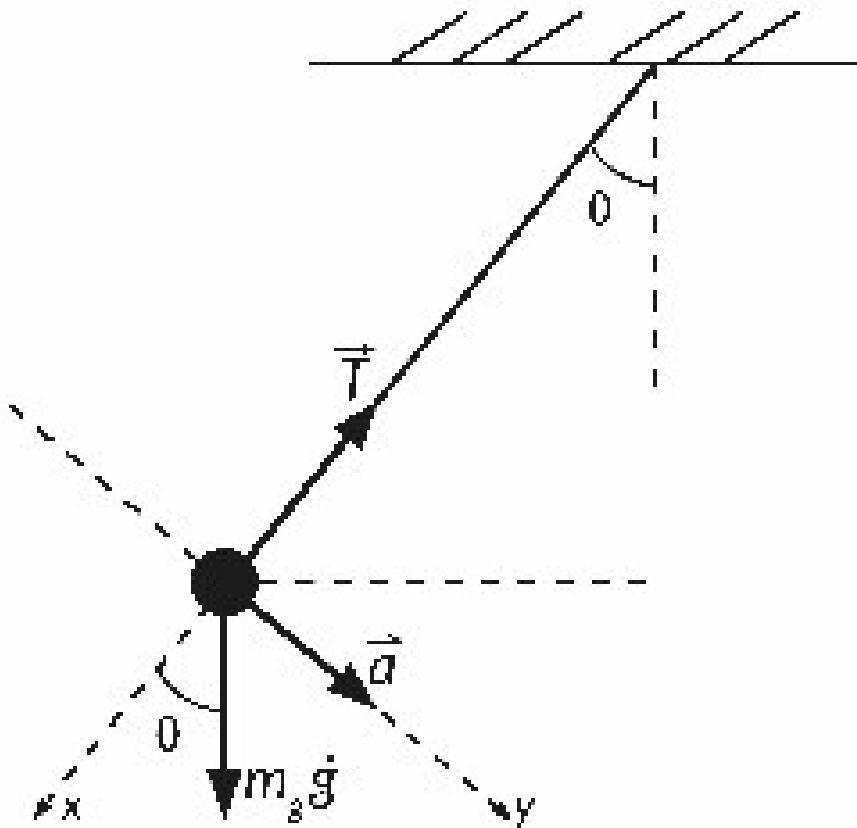
#### 12.4. Newton e as duas massas

Sabemos que o período de um pêndulo simples de comprimento  $l$  pode ser calculado através da expressão

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Vamos recalcular esse mesmo período levando em consideração a diferenciação entre as duas massas, como descritas no item anterior.

Consideremos pêndulo simples como esquematizado na **Figura 48**. Consideremos um sistema de eixos ortogonais com o *eixo y* na direção do fio e o *eixo x* ortogonal coincidindo com a direção da aceleração tangencial do pêndulo. O vetor  $m_g$  representa a força gravitacional (peso) expressa com a massa gravitacional.



**Figura 48**

O vetor  $\vec{T}$  representa a tensão no fio que sustenta a massa do pêndulo. Esta sofre uma aceleração que, com a 2ª lei de Newton nos permite escrever a força  $m_i a$ .

Assim podemos escrever a seguinte igualdade:  $m_i a = m_g g \text{ sen } \theta$ . Como  $\text{sen } \theta = \frac{x}{l}$ , essa equação pode ser assim escrita:

$$m_i \frac{d^2 x}{dt^2} = m_g g \frac{x}{l}$$

Representando  $\frac{m_g g}{l} = k$ , essa equação é da forma  $ma = kx$  que apresenta a solução geral para o período  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i}{k}}$ . No nosso caso esse  $m$  é a massa inercial.

Assim, a solução do período do pêndulo é a seguinte:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i l}{m_g g}}$$

Desta forma, de posse dessa expressão para o pêndulo simples, podemos estudar a relação entre as massas inercial e gravitacional. Por exemplo, diferentes substâncias de mesma massa gravitacionais poderiam ser colocadas num recipiente de mesma forma na extremidade do fio  $l$  constituindo o pêndulo simples. Qualquer variação no período do pêndulo seria devida à diferença entre as massas inerciais. Como o período apresenta sempre o mesmo valor concluímos que a razão entre as massas é constante ou que  $m_g = m_i$ .

Newton descreve as substâncias que ele teria submetido a um teste semelhante ao do pêndulo acima descrito. Eis um pequeno trecho da **Proposição VI, Teorema VI**, do livro terceiro do **Principia**.

*"Há muito tempo que outros têm observado que a queda de todos os graves em direção à Terra ocorre em tempos iguais; e pode-se registrar essa igualdade dos tempos de maneira mais exata mediante os pêndulos. Tratei de examinar isso com ouro, prata, chumbo, vidro, areia, sal comum, água, madeira e trigo."*<sup>209</sup>

Ou seja, Newton mostra que corpos de diferentes substâncias sofrem a mesma ação gravitacional, isto é, os pesos são simplesmente proporcionais a quantidade de matéria. Ou seja, podemos dizer que para Newton as duas massas são totalmente equivalentes ou idênticas. Não desempenhariam nenhum papel mais sofisticado na sua elaboração da teoria gravitacional.

---

<sup>209</sup> NEWTON, Isaac, **op. cit.**, nota 194, pág. 631.

## 12.5. Einstein e as duas massas

Quando estudava o **princípio de relatividade de Galileu**, isto é, aquele que afirma que todos os fenômenos naturais são regidos pelas mesmas leis gerais quando relacionadas a dois sistemas de referência  $K$  e  $K'$ , onde  $K$  é um sistema inercial e  $K'$  desloca-se com movimento uniforme de translação com relação a  $K$ , Einstein se defrontou com algo que para ele pareceu paradoxal: o que aconteceria se o sistema  $K'$  fosse um sistema dotado de aceleração constante com relação a  $K$ ?

Para introduzir-nos nesse novo universo einsteiniano, nada melhor que seguir o pensamento do próprio Einstein através de um breve texto publicado em 1916, logo após ter ele formulado sua **teoria geral da relatividade**. Vamos a esse texto:

**“XX A igualdade da massa inercial e da massa gravitacional como  
um argumento para o postulado geral da relatividade**

*Nós imaginamos uma grande porção do espaço vazio, bem distante de estrelas e das outras massas apreciáveis, de tal forma que temos diante de nós aproximadamente as condições requeridas pela lei fundamental de Galileu. É então possível escolher um corpo-de-referência Galileano para esta parte do espaço (mundo) relativo qual pontos em repouso permanecem em repouso e pontos em movimento continuam permanentemente em movimento retilíneo e uniforme. Como vamos imaginar uma caixa semelhante a uma sala com um observador dentro que está equipado com aparelhos. Gravitação naturalmente não existe para esse observador. Ele deve prender-se com cordas no piso, caso contrário o mais leve impacta contra o piso lhe causará uma elevação em direção ao teto da sala.*

*No meio da tampa dessa caixa está fixado externamente um gancho com uma corda amarrada, e agora um “ser” (que tipo de ser não nos interessa) começa a puxar essa corda com uma força constante. A caixa juntamente*

*com o observador começa se mover "para cima" com um movimento uniformemente acelerado. No curso do tempo sua velocidade alcançará enormes valores desde que nós estejamos vendo tudo isto de outro corpo-de-referência que não está sendo puxado com uma corda,*

*Como será o homem caixa vê todo esse processo? À aceleração da caixa será transmitida para ele pela tensão do piso da caixa. Ele deve, portanto, perceber essa pressão por meio de suas pernas se ele não quiser permanecer estirado no chão da caixa. Ele está, então, de pé na caixa exatamente como qualquer um numa sala de uma casa na nossa Terra. Se ele soltar um corpo que ele tinha previamente em suas mãos, a aceleração da caixa não mais será transmitido para este corpo, e por essa razão D corpo se aproximará do piso da caixa com um movimento relativo acelerado. O observador depois se convencerá **que a aceleração do corpo em direção ao piso da caixa é sempre de mesma magnitude, qualquer que seja o corpo que ele esteja usando nessa experiência.***

*Confiando no seu conhecimento do campo gravitacional, o homem da caixa portanto chegará à conclusão de que ele e a caixa estão num campo gravitacional que é constante com relação ao tempo. Naturalmente ele ficará intrigado por um momento de porque a caixa não cai neste campo gravitacional. Justamente então, contudo, ele descobre o gancho no meio do teto da caixa e a corda que está amarrada nele, ele conseqüentemente chega à conclusão que a caixa está suspensa em repouso no campo gravitacional,*

*Devemos rir do homem e dizer que ele está equivocado em sua conclusão? Não creio que devemos se quisermos nos manter consistentes; ao contrário, devemos admitir que seu modo de compreender a situação não viola nem a razão nem leis da mecânica. Mesmo que esteja sendo acelerado com relação ao "espaço Galileano" inicialmente escolhido,*

*podemos encarar a caixa como estando em repouso. Nós temos portanto boas razões para estender o princípio de relatividade para incluir corpos de referência que estão acelerados uns em relação aos outros, e como resultado nós ganhamos um argumento poderoso para o postulado generalizado da relatividade.*

*Devemos notar cuidadosamente que a possibilidade deste modo de interpretação repousa sobre a propriedade fundamental do campo gravitacional de imprimir a todos os corpos a mesma aceleração, ou, o que dá no mesmo, na lei de igualdade das massas inercial e gravitacional. Se esta lei natural não existisse, o homem na caixa acelerada não poderia ter interpretado o comportamento dos corpos ao seu redor sobre a hipótese de um campo gravitacional, e ele não estaria justificado com base nas experiências em supor seu corpo-de-referência "em repouso".*

*Suponha que o homem na caixa fixe uma corda na parte interna do teto, e que ele prenda um corpo na extremidade livre da corda. Como resultado disso, a corda ficará esticada de tal forma que o corpo permanecerá suspenso "verticalmente" para baixo. Se perguntarmos por uma opinião sobre a causa da tensão na corda, o homem na caixa dirá: "O corpo suspenso experimenta uma força para baixo no campo gravitacional, e esta é neutralizada pela tensão na corda, o que determina a magnitude da tensão na corda é a **massa gravitacional** do corpo suspenso". Por outro lado, um observador que está situado livremente no espaço interpretará a condição da seguinte maneira: "A corda participa forçadamente do movimento acelerado da caixa, e ela transmite esse movimento para o corpo nela preso. A tensão na corda é justamente suficiente para efetuar a aceleração do corpo. O que determina a magnitude da tensão da corda é a **massa inercial** do corpo". Guiado por esse exemplo, vemos que nossa extensão do princípio de relatividade implica na **necessidade** da lei da*

*igualdade das massas inercial e gravitacional. Portanto, nós obtivemos uma interpretação física dessa lei.*

*A partir de nossas considerações da caixa acelerada notamos que uma teoria geral da relatividade deve produzir importantes resultados sobre as leis da gravitação. Na verdade, a busca sistemática da ideia de relatividade nos forneceu as leis satisfeitas pelo campo gravitacional. Antes de seguir adiante, contudo, devo alertar o leitor contra uma conceituação sugerida por estas considerações. Um campo gravitacional existe para o homem na caixa, a despeito do fato de que não havia tal campo para o sistema coordenado inicialmente escolhido. Agora podemos facilmente supor que a existência de campo gravitacional é sempre **aparente**. Poderíamos também pensar que, independentemente da espécie de campo gravitacional que pode estar presente, poderíamos sempre escolher outro corpo-de-referência tal que **nenhum** campo gravitacional exista relativo a ele. Isto é de maneira nenhuma verdade para todos os campos gravitacionais, mas apenas para aqueles que de formas bem especiais. É, por exemplo, impossível escolher um campo de referência tal que, como julgado a partir dele, o campo gravitacional da Terra (na sua totalidade) desapareça.*

*Podemos agora apreciar porque o argumento que utilizamos, no final da seção XVIII, contra o princípio geral da relatividade, não é convincente<sup>210</sup>. É certamente verdade que o observador no trem experimenta um solavanco para frente como resultado da aplicação dos freios, e que ele reconhece nisto o não-uniformidade do movimento (retardamento) do*

---

<sup>210</sup> Einstein refere-se aqui a um observador situado um trem que se desloca uniformemente e que, de repente, sofria uma desaceleração brusca devido à aplicação dos freios. Tudo indica que no referencial do trem acelerado essa condição de aceleração tinha toda a característica de um absoluto, violando assim qualquer ideia de uma generalização do princípio de relatividade.



*trem. Mas ele não é forçado por ninguém a referir esse solavanco a uma aceleração "real" (retardamento) do trem. Ele poderia também interpretar essa experiência como: "Meu corpo de referência (o trem) fica permanentemente em repouso. Com referência a ele, contudo, existe (durante o período de aplicação dos freios) um campo gravitacional que é dirigido para a frente e é variável com relação ao tempo. Sob a influência deste campo, a base da ferrovia junto com a terra move-se não-uniformemente num tal modo que sua velocidade original na direção retrógrada é continuamente reduzida."*<sup>211</sup>

## **12.6. Alguns comentários finais (?)**

Vimos na seção anterior como Einstein transforma uma aparente dádiva da natureza - a igualdade entre as massas inercial e gravitacional - num princípio físico da nova física. Isto principalmente porque Einstein generalizou tal princípio de equivalência para outras áreas da Física como, por exemplo, os fenômenos eletromagnéticos, particularmente a propagação da luz. Numa experiência imaginária com um foguete que se deslocava com movimento uniformemente acelerado num espaço livre de massas gravitacionais, Einstein imaginou um raio de luz atravessando transversalmente tal foguete passando através de placas detetoras de luz. As marcas nesses detetores mostrariam ponto de uma parábola, à semelhança do que ocorre com o movimento de um projétil num campo gravitacional. Com base nessa "experiência", Einstein previu a inclinação de raios luminosos que passem muito próximos de fortes

---

<sup>211</sup> EINSTEIN, Albert. **Relativity – the special and the general theory**. Methuen & Co., London, 12<sup>a</sup> edição, págs. 66 a 70. (Original alemão de dezembro de 1916). Observação de novembro de 2006: quando estive revendo estas **Notas de Aula**, pretendia melhorar essa seção referente a uma breve introdução à relatividade geral de Einstein, inclusive traduzindo essa minha tradução desse capítulo do livro de Einstein. Não deu tempo. Mas aproveitei a oportunidade para recomendar fortemente a leitura desse livro todo, especialmente para alunos que estão no início do seu curso de graduação. Ele está numa ótima tradução em português. EINSTEIN, Albert. **A teoria da Relatividade Especial e Geral**. Contraponto, Rio de Janeiro, 1999.

campos gravitacionais. Essa previsão foi testada pela primeira vez pelo físico inglês Eddington, durante o eclipse de 1919. Nessa ocasião a expedição astronômica inglesa verificou desvios de estrelas que se posicionavam aparentemente tangenciando a coroa solar do sol eclipsado. Tais resultados concordaram com as previsões baseadas na **teoria da relatividade geral** de Einstein, ou seja, a teoria da relatividade que inclui a gravitação.

Como resultado da inclinação de raios de luz concluímos que a luz que se propaga num meio onde exista um campo gravitacional não se propaga em linha reta. Portanto, a menor distância entre dois pontos deixa de ser representada por uma linha reta euclideana. Einstein, em função desse resultado, preferiu concluir que, ao invés de dizer que ao passar próximo de fortes campos gravitacionais a luz se curva, é o próprio espaço que é curvo devido à presença de massas gravitacionais! A menor distância entre dois pontos no espaço provido de campo gravitacional continua sendo determinada pelo caminho seguido pela luz. Esse caminho é denominado pelos matemáticos de linha geodésica

Como sumariza Gamow: o ponto de vista newtoniano nos diz que os planetas movem-se em trajetórias curvas devido à ação da massa gravitacional do Sol que produz um campo de forças que atuam sobre eles. O ponto de vista einsteiniano nos diz que os planetas movem-se através de suas “retas” geodésicas no espaço curvo (*linhas geodésicas no espaço-tempo contínuo quadri-dimensional*).

Como tudo o que foi resumidamente dito acima deixa muitas dúvidas, vamos procurar esclarecer um pouco mais seguindo o pensamento de Gamow a este respeito. Assim, reproduzo mais um longo trecho extraído da parte final do seu texto acima citado:

*“Estas considerações levam-nos à conclusão de que a luz propagando-se dentro de um campo gravitacional não o faz segundo uma linha reta, mas sofre uma curvatura no sentido do campo, e que, devido à contração das*

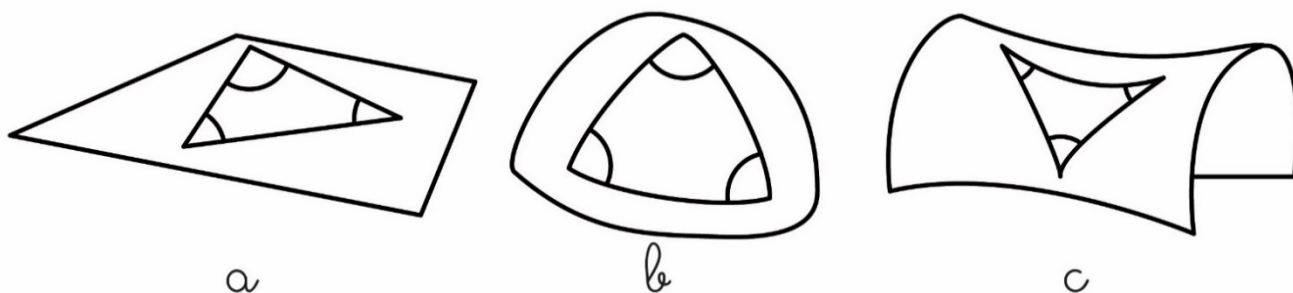
*réguas*<sup>212</sup>, a menor distância entre dois pontos não é uma linha reta, mas sim uma curva voltada também na direção do Campo gravitacional. Mas de que outra maneira poderíamos definir "linha reta" a não ser como o caminho que a luz percorre no vácuo, ou como o caminho mais curto entre pontos? A ideia de Einstein é que devemos manter a antiga definição de "linha reta" no caso do campo gravitacional, mas, em vez de dizer que os raios luminosos e que as menores distâncias se encurvam, é só dizer que o próprio espaço é que é curvo. É difícil formar uma ideia clara de um espaço tridimensional curvo, e mais difícil ainda imaginar um espaço quadridimensional encurvado, no a quarta dimensão é representada pelo tempo. O melhor é fazer analogia com bi-dimensionais, fáceis de visualizar. Todos nós estamos familiarizados com a Geometria plana de Euclides, que trata das figuras que podem ser desenhadas em uma superfície chata, ou plana. Mas se, em vez disso desenharmos figuras geométricas em uma superfície encurvada, como a superfície de uma esfera, já não valem os teoremas de Euclides. Vê-se isso claramente na figura abaixo que representa triângulos desenhados sobre uma superfície que (por motivos óbvios) é chamada superfície de sela (c).

Para um triângulo plano, a soma dos ângulos internos é sempre igual a 180°. Para um triângulo desenhado sobre a superfície de uma esfera, os três ângulos somados sempre dão mais do que 180° e o excesso depende da relação entre o tamanho do triângulo e o tamanho da esfera. Para triângulos desenhados em superfície em forma de sela, a soma desses ângulos é sempre menor do que 180°. É bem verdade que as linhas que

---

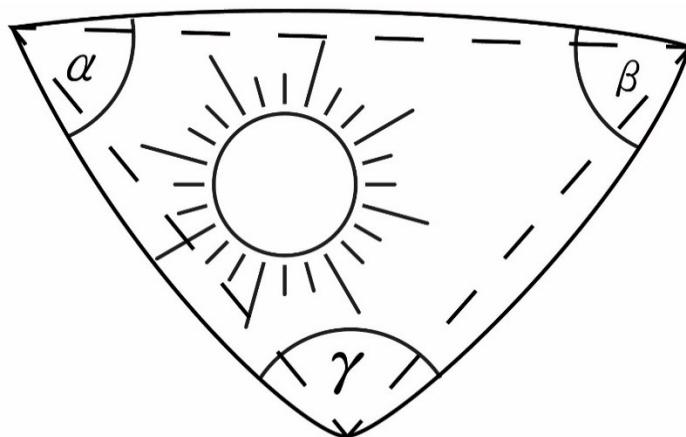
<sup>212</sup> Aqui Gamow está falando sobre uma das conclusões da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein que afirma que qualquer objeto passando por nós com uma velocidade  $v$  parecerá contraído na direção de seu movimento por um fator dado por  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  onde  $c$  é a velocidade da luz.

formam os triângulos nas superfícies esféricas e nas superfícies em forma de sela não são linhas retas do ponto de vista tridimensional, mas elas são as “mais retas”, isto é, as distâncias mais curtas entre dois pontos, desde que estejamos confinados à superfície em questão. Para evitar confusões, os matemáticos chamam essas linhas de “linhas geodésicas” ou simplesmente “geodésicas”.



**Figura 49:** (a) Triângulo em uma superfície plana; (b) sobre uma esfera; (c) sobre uma superfície na forma de sela.

Analogamente, podemos falar de linhas geodésicas ou de distâncias mais curtas entre dois pontos num espaço a três dimensões: seriam as linhas ao longo das quais luz propagaria. Medindo ângulos internos de um triângulo no espaço, diremos que o espaço é: "plano" se a soma dos ângulos for igual a  $180^\circ$ , "esférico" ou "de curvatura positiva" se a soma dos ângulos for maior do que  $180^\circ$  e "em forma de sela" ou "de curvatura negativa" se a soma dos ângulos for menor do que  $180^\circ$ . Imaginemos três astrônomos, um na Terra, outro em Vênus, outro em Marte, medindo os ângulos do triângulo formado pelos raios luminosos que se propagam entre esses planetas. Como vimos, os raios de luz que se propagam no campo gravitacional do Sol, encurvam-se no sentido da força gravitacional; teremos, então, a situação indicada na **Figura 50**; a soma dos ângulos internos do triângulo será maior do que  $180^\circ$ .



**Figura 50**

*Seria razoável dizer, nesse caso, que a luz se propaga seguindo o caminho mais curto, ou seguindo zuna linha geodésica, e que o espaço ao redor do Sol encontra-se encurvado no sentido positivo*

*(...)*

*O que acabamos de expor constitui a base da teoria geométrica da gravidade de Einstein. Essa teoria suplantou antigo ponto de vista Newtoniano, de acordo com o qual, massas de grande porte como a do Sol, produziriam no espaço ao seu redor campos de forças que fariam com que planetas se movessem segundo órbitas circulares ao invés de linhas retas. Na representação Einsteiniana, o próprio espaço torna-se curvo e os planeias movem-se segundo "as linhas mais curtas", isto é, segundo geodésicas nesse espaço curvo. Para evitar mal entendidos, deve-se acrescentar que nos referimos aqui às geodésicas do continuum espaço-tempo quadridimensional, e seria errado dizer que as próprias órbitas são geodésicas no espaço a três dimensões. (...) A interpretação einsteiniana da gravidade como sendo a curvatura do continuum espaço-tempo leva a resultados ligeiramente diferentes dos previstos pela teoria clássica de Newton, permitindo assim verificações pela observação. Por exemplo, ela*

*explicou a precessão do eixo maior da órbita de Mercúrio (precessão de 43 segundos angulares por século) e assim resolveu um problema que há muito vinha desafiando a mecânica celeste clássica.*<sup>213</sup>

Essas últimas palavras de G. Gamow confirmam a tese de T. S. Kuhn de que toda teoria científica acaba se defrontando com sua crise, isto é, com problemas que não consegue resolver, como é o caso da precessão da órbita de Mercúrio, que eventualmente provoca o surgimento de uma nova teoria revolucionária.

Assim começamos com o “lugar natural” aristotélico, passamos pelos "vórtices" cartesianos, chegamos à "gravitação universal” de Newton e terminamos no "espaço curvo" de Einstein.

---

<sup>213</sup> GAMOW, G. **Op. cit.**, nota 208, págs. 103/107.