Questão 1

Alternativa a)

Para determinarmos a unidade da constante α temos que encontrar a unidade da resistividade.
Sabemos que podemos calcular a resistência de um material através da fórmula

$$R = \frac{\rho\, L}{A},$$

portanto

$$[\rho] = \frac{[A][R]}{[L]} = \frac{\text{metros}^2 \times \Omega}{\text{metros}} = \Omega.\, m$$

Assim, dado que

$$\rho(r) = \alpha\, r \rightarrow$$

$$\rightarrow [\alpha] = \frac{[\rho]}{\text{metros}} \rightarrow \boxed{[\alpha] = \Omega}.$$

Alternativa b)

Como nosso problema tem simetria esférica, temos que

$$dR = \frac{\rho}{A} dr,$$

sendo A a área de uma esférica de raio $a < r < b$. Integrando a equação acima, ficamos com

$$R = \int_a^b \frac{\rho}{4\pi r^2} dr = \frac{\alpha}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \rightarrow \boxed{R = \frac{\alpha}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Alternativa c)

A diferença de potencial aplicada gerará um campo elétrico radialmente para fora, que, consequentemente, gerará uma fluxo de cargas também radialmente para fora (uma densidade de corrente $\vec{J}$).

Para o cálculo da corrente elétrica I, vamos abrir mão da Lei de Ohm

$$\Delta V = R\,I \rightarrow I = \frac{V}{R},$$

usando a resistência calculada no item anterior, ficamos com

$$\boxed{I = \frac{4\pi\,V}{\alpha\ln(b/a)}}.$$

Para o cálculo da densidade de corrente, partiremos da definição de corrente elétrica dada por

$$I = \oint_{\text{sup}} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA,$$

sendo $\vec{J} = J(r)\hat{r}$, $\hat{n} = \hat{r}$ e integrando em uma superfície esférica de raio r ao qual a densidade de corrente é constante, ficamos com

$$\frac{4\pi\,V}{\alpha\ln(b/a)} = J(r)\,4\pi\,r^2 \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{J}(r) = \frac{V}{\alpha\ln(b/a)}\,\frac{\hat{r}}{r^2}}$$

Questão 2

Alternativa a)

Partiremos da fórmula

$$d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \times \vec{B} = I\, B\, d\vec{\ell} \times \hat{z}$$

Segmento OP:

Para esse segmento, localizado no eixo x, temos que $d\vec{\ell} = \hat{x}\, dx$, então a força magnética será dada por

$$d\vec{F}_{OP} = I\, B\, dx(\hat{x} \times \hat{z}) = -I\, B\, dx\, \hat{y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{OP} = -I\, B \int dx\, \hat{y} \rightarrow \boxed{\vec{F}_{OP} = -I\, B\, R\, \hat{y}}$$

Segmento QO:

Para esse segmento, localizado no eixo y, temos que $d\vec{\ell} = -\hat{y}\, dy$, então a força magnética será dada por

$$d\vec{F}_{QO} = -I\, B\, dy(\hat{y} \times \hat{z}) = -I\, B\, dy\, \hat{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{QO} = -I\, B \int dy\, \hat{x} \rightarrow \boxed{\vec{F}_{QO} = -I\, B\, R\, \hat{x}}$$

Alternativa b)

Para o segmento circular PQ, teremos que usar coordenadas polares, uma vez que $d\vec{\ell} = R\, d\theta\, \hat{\theta}$. Lembrando que, em coordenadas polares, o versor radial é dado por

$$\hat{r} = \cos\theta\, \hat{x} + \sin\theta\, \hat{y}$$

e o versor polar por

$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}.$$

Logo, a força magnética será dada por

$$d\vec{F}_{PQ} = I\,B\,R\,d\theta\,\left(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}\right) \times \hat{z} = I\,B\,(\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{x}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{PQ} = I\,B\int_0^{\pi/2} (\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{x})\,R\,d\theta \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_{PQ} = I\,B\,R\,\left(\hat{x} + \hat{y}\right)}$$

Alternativa c)

O torque na espira pode ser calculado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

sendo $\vec{\mu}$ o momento magnético da espira dado por $\vec{\mu} = I\,\vec{A}$, com $\vec{A} = \frac{\pi R^2}{4}\,\hat{z}$ (orientação dada pela regra da mão direita).
Com isso, ficamos com o torque

$$\vec{\tau} = I\frac{\pi R^2}{4}B\hat{z} \times \hat{z} \rightarrow \boxed{\vec{\tau} = 0}$$

Questão 3

Item (i)

Alternativa a)

Para calcularmos o campo magnético dentro da bobina toroidal, iremos usar a Lei de Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}}$
Por simetria (checada pela regra da mão direita), temos que o campo magnético é circular na direção horária, que iremos definir como $\hat{b}$, ou seja, $\vec{B} = B\hat{b}$. Por isso, escolheremos uma amperiana que seja um circuito na mesma direção, ou seja, $d\vec{\ell} = d\ell\,\hat{b}$.

A Lei de Ampère fica então

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B\,d\ell = B \oint d\ell = B\,2\pi R = \mu_0\,N\,I.$$

Logo, o módulo do campo será dado por

$$\boxed{B = \frac{\mu_0\,N\,I}{2\pi R}}$$

Alternativa b)

Quando introduzimos um material magnético, o campo magnético é intensificado pela constante K_m. Logo, da relação obtida no ítem anterior, temos que

$$B_{\text{Fe}} = \frac{\mu_0 K_m N}{2\pi R} I_{Fe} = 1400\frac{\mu_0 N}{2\pi R} I_{Fe}$$

Portanto,

$$\frac{B_{Fe}}{B} = \frac{1400\,\frac{\mu_0 N}{2\pi R}\,I_{Fe}}{\frac{\mu_0\,N\,I_{ar}}{2\pi R}} = 1400\frac{I_{Fe}}{I_{ar}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{I_{ar}}{I_{Fe}} = 1400}$$

Item (ii)

Para calcular o campo magnético dos trechos no ponto P iremos usar a fórmula de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}' \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

onde $\vec{r} = \vec{r}_P = \vec{0}$ é o ponto ao qual queremos calcular.

Fio reto à direita do ponto P:

Para esse segmento teremos $\vec{r}' = x' \, \hat{x}$ e $d\vec{\ell}' = dx' \, \hat{x}$, logo o produto vetorial entre $d\vec{\ell}' \times \left(\vec{0} - \vec{r}'\right) = 0$, uma vez que os vetores são colineares. Portanto

$$\vec{B}_{\text{fio 1}} = 0$$

Fio reto à esquerda do ponto P:

Para esse segmento teremos $\vec{r}' = -x' \, \hat{x}$ e $d\vec{\ell}' = dx' \, \hat{x}$, logo o produto vetorial entre $d\vec{\ell}' \times \left(\vec{0} - \vec{r}'\right) = 0$, uma vez que os vetores são colineares. Portanto

$$\vec{B}_{\text{fio 2}} = 0$$

Segmento circular menor:

Para esse segmento teremos $\vec{r}' = (a \cos\theta' \, \hat{x} + a \sin\theta' \, \hat{y})$ e $d\vec{\ell}' = a \, d\theta' \, \hat{\theta}$, onde temos que $\hat{\theta} = -\sin\theta' \, \hat{x} + \cos\theta' \, \hat{y}$.
Portanto

$$d\vec{\ell}' \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right) = -a^2\, d\theta' \left(-\sin\theta'\,\hat{x} + \cos\theta'\,\hat{y}\right) \times \left(\cos\theta'\,\hat{x} + \sin\theta'\,\hat{y}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow d\vec{\ell}' \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right) = a^2\, d\theta'\,\hat{z}.$$

Assim, ficamos com

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2\, d\theta'}{a^3}\,\hat{z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B}_{\text{circ1}} = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2\, d\theta'}{a^3}\,\hat{z}$$

$$\vec{B}_{\text{circ1}} = \frac{\mu_0}{4}\frac{I}{a}\,\hat{z}$$

Segmento circular maior:

Para esse segmento teremos $\vec{r}' = (2a\cos\theta'\,\hat{x} + 2a\sin\theta'\,\hat{y})$ e $d\vec{\ell}' = -2a\, d\theta'\,\hat{\theta}$, onde temos que $\hat{\theta} = -\sin\theta'\,\hat{x} + \cos\theta'\,\hat{y}$.
Portanto

$$d\vec{\ell}' \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right) = 4a^2\, d\theta' \left(-\sin\theta'\,\hat{x} + \cos\theta'\,\hat{y}\right) \times \left(\cos\theta'\,\hat{x} + \sin\theta'\,\hat{y}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow d\vec{\ell}' \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right) = -4a^2\, d\theta'\,\hat{z}.$$

Assim, ficamos com

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{4a^2\, d\theta'}{8a^3}\,\hat{z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B}_{\text{circ2}} = -\int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{8\pi}\frac{d\theta'}{a}\,\hat{z}$$

$$\vec{B}_{\text{circ2}} = -\frac{\mu_0}{8}\frac{I}{a}\,\hat{z}$$

Portanto, o campo magnético total no ponto P será a soma dos campos calculados

$$\boxed{\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{a}\hat{z}}$$

Questão 4

Antes de resolvermos as alternativas, vamos usar da simetria cilíndrica do problema para encontrar a expressão do campo magnético. Por Lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \, I_{\text{eng}},$$

sendo I_{eng} a corrente englobada pela amperiana.
Da simetria cilíndrica, tiramos que $\vec{B} = B\hat{\theta}$ e $d\vec{\ell} = d\ell \, \hat{\theta}$. Portanto, obtemos que

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_o I_{\text{eng}}}{2\pi \, r}\hat{\theta}$$

Alternativa a)

Para $0 < r < a$ temos que

$$I_{\text{eng}} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int J \, dA = J \int dA = \left(\frac{I}{\pi a^2}\right)\pi r^2.$$

Portanto

$$\boxed{\vec{B}(0 < r < a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\hat{\theta}}$$

Alternativa b)

Para $a < r < b$ temos que a corrente englobada é a corrente total $I_{\text{eng}} = I$.

$$\boxed{\vec{B}(a < r < b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

Alternativa c)

O circuito quadrado engloba o condutor com corrente I para cima e a casca cilíndrica com corrente I para baixo. Portanto, a integral ao longo do quadrado é dada por

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}} = \mu_0 (I - I) \; \rightarrow$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

Questão 5

Alternativa a)

Para calcularmos $J(r)$ como função de $J(a)$, primeiramente vamos partir da definição de corrente elétrica

$$I = \oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA,$$

sendo $\vec{J} = J(r)\hat{r}$, $\hat{n} = \hat{r}$ e $J(r)$ sendo constante em uma superfície cilíndrica, ficamos com $I = J\, A$.
Por conservação de carga, a corrente I através de uma superfície

cilíndrica de raio a, dada por $I = J(a)\,2\pi a L$, é a mesma corrente através de uma superfície cilíndrica de raio a, dada por $I = J(r)\,2\pi r L$, portanto

$$\boxed{\vec{J}(r) = J(a)\frac{a}{r}\hat{r}}$$

Alternativa b)

Para calcular o campo elétrico no interior da casca cilíndrica, basta usarmos a Lei de Ohm microscópica

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{J(a)}{\sigma}\frac{a}{r}\hat{r}}$$

Alternativa c)

Para o cálculo da resistência, uma vez que temos o campo elétrico, podemos calcular a diferença de potencial

$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b E(r)dr = -\frac{J(a)a}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{J(a)a}{\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Portanto, temos que a rresistência será calculada pela Lei de Ohm

$$|V| = R\,I = R\,J(a)\,2\pi\,a\,L \;\rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi\sigma L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Alternativa d)

Uma vez que

$$J(a) = \frac{I}{2\pi\, a\, L}$$

e $I = V/R$, temos que

$$J(a) = \frac{V}{R}\frac{1}{2\pi\, a\, L} \;\rightarrow$$

$$\boxed{J(a) = \frac{V\sigma}{a\ln(b/a)}}$$

Questão 6

Alternativa a)

O campo magnético no ponto P devido apenas ao fio retilínio (aqui, dito ter comprimento $2L$, centrado em $x=0$)é dado por

$$d\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

sendo $d\vec{\ell}' = \hat{x}\, dx'$, $\vec{r} = \hat{y}\, a$ e $\vec{r}' = \hat{x}\, x'$.
Portanto,

$$d\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\hat{x}\, dx' \times (\hat{y}\, a - \hat{x}\, x')}{\left[a^2 + (x')^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{\left[a^2 + (x')^2\right]^{3/2}}\hat{z} \rightarrow$$

$$\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dx'}{\left[a^2 + (x')^2\right]^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{1}{a^2} \frac{x'}{\sqrt{a^2 + (x')^2}} \Big|_{-L}^{+L} \hat{z} \rightarrow$$

$$\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}} \hat{z}.$$

Tomando o limite de $L \rightarrow \infty$ temos que $\sqrt{a^2 + L^2} \approx L$, portanto

$$\boxed{\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}}$$

Alternativa b)

No caso da espira circular centrada em P, temos que $d\vec{\ell}' = a\, d\theta'\, \hat{\theta}$ e $\vec{r}' = a \cos\theta' \hat{x} + a(1 + \sin\theta')\hat{y}$. Portanto

$$d\vec{B}_{\text{espira}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a d\theta' \hat{\theta} \times (-a\cos\theta' \hat{x} - a \sin\theta' \hat{y})}{a^3} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} (-\sin\theta' \hat{x} + \cos\theta' \hat{y}) \times (\cos\theta' \hat{x} + \sin\theta' \hat{y})\, d\theta' =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} d\theta' \hat{z} \rightarrow$$

$$\vec{B}_{\text{espira}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} d\theta'\, \hat{z} \rightarrow \boxed{\vec{B}_{\text{espira}} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}}$$

Alternativa c)

O campo magnético total no ponto P então será a soma dos dois campos calculados acima

$$\boxed{\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2a} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) \hat{z}}$$

Questão 7

Alternativa a)

Usaremos

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Fio horizontal

$$\vec{F}_h = I \int \left(dx\,\hat{x}\right) \times (C\,\hat{x}) = I\,C \int_0^a dx\,\left(\hat{x} \times \hat{x}\right) = 0$$

Fio vertical

$$\vec{F}_v = I \int \left(dy\,\hat{y}\right) \times (C\,\hat{x}) = I\,C \int_a^0 dy\,\left(\hat{y} \times \hat{x}\right) = I\,C\,a\hat{z}$$

Alternativa b)

$$\vec{F} = I \int (a\,d\theta\,\hat{\theta}) \times (C\hat{x}) = I\,a\,C \int_0^{\pi/2} d\theta(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) \times \hat{x} =$$

$$= I\,a\,C \int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta\,(-\hat{z}) = -I\,a\,C\,\hat{z}$$

Alternativa c)

Para calculo do torque, vamos utilizar a formula

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I\,\vec{A} \times (C\hat{x}) = I\,A\,C\,(-\hat{z}) \times \hat{x} = -I\,a^2\,C\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\hat{y}$$

Questão 8

Alternativa a)

Na questão 3 calculamos o campo magnético dentro de um toroide, e vimos que é dado por

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\theta},$$

apenas para valores de r que estejam dentro do toroide.
Porém o exercício pede para calcularmos em coordenadas cartesianas. Para isso, sabemos que as coordenadas polares (r, θ) se relacionam com (x, y) por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Então, para $(x, y) = (0, y) \to r = y,\ \theta = \pi/2$ e portanto

$$\boxed{\vec{B(y)} = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi y}\hat{x}}$$

para $b < y < b + 2a$.

Alternativa b)

Para o núcleo de aço teremos

$$B_{\text{aço}} = \frac{\mu N_{\text{aço}} I}{2\pi r},$$

logo, para $B_{\text{aço}} = B_{\text{ar}} \ \to$

$$\frac{N_{\text{aço}}}{N_{\text{ar}}} = \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1}{80}$$

Questão 9

Alternativa a)

Uma vez que a corrente elétrica é definida por

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

e pela simetria do problema, a densidade de corrente $\vec{J}$ deve fluir radialmente para fora, dado uma superfície esférica de raio r, t.q., $a < r < b$, temos que

$$I = \iint (J(r)\hat{r}) \cdot (dA\,\hat{r}) = J(r) \iint dA = J(r)\,4\pi r^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}}$$

Alternativa b)

Uma vez calculado a densidade de corrente, podemos calcular o campo elétrico visto que $\vec{E} = \rho\vec{J}$. Com isso, a diferença de potencial entre a e b é calculada por

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \left(\frac{I\rho}{4\pi r^2}\hat{r}\right) \cdot (dr\,\hat{r}) = -\frac{I\rho}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V = |V(b) - V(a)| = \frac{I\rho}{4\pi}\frac{b-a}{ab}}$$

Alternativa c)

A resistência elétrica entre os condutores é dado pela Lei de Ohm $V = RI \ \rightarrow$

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\frac{b-a}{ab}\,.$$

Para $b \rightarrow \infty$

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\frac{b(1-a/b)}{ab} = \frac{\rho}{4\pi}\frac{1-a/b}{a}$$

$$\boxed{R_{b\rightarrow\infty} = \frac{\rho}{4\pi a}}$$

Questão 10

Alternativa a)

Para o lado 1 temos: $d\vec{\ell} = dx\,\hat{x}$ e $\vec{B}(b) = \frac{C}{b}\,\hat{z}$ e portanto

$$\vec{F}_1 = I\int_{a_2}^{a_1}\left(dx\,\hat{x}\right)\times\left(\frac{C}{b}\,\hat{z}\right) = \frac{IC}{b}\left(\int_{a_2}^{a_1}dx\right)(-\hat{y}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_1 = \frac{ICa}{b}\,\hat{y}}$$

Para o lado 3 teremos $\vec{B}(a+b) = \frac{C}{a+b}\,\hat{z}$

$$\vec{F}_3 = I\int_{a_1}^{a_2}(dx\,\hat{x})\times\left(\frac{C}{a+b}\right)\hat{z} = \frac{IC}{a+b}\left(\int_{a_1}^{a_2}dx\right)(-\hat{y}) \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = -\frac{ICa}{a+b}\,\hat{y}}$$

Alternativa b)

Para o lado 2 temos: $d\vec{\ell} = dy\,\hat{y}$ e portanto

$$\vec{F}_2 = I\int_a^{a+b} (dy\,\hat{y}) \times \left(\frac{C}{y}\,\hat{z}\right) = IC\int_a^{a+b} \frac{dy}{y}\hat{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_2 = IC\,\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\hat{x}}$$

Para o lado 4, apenas trocaremos os limites de integração

$$\vec{F}_4 = I\int_{a+b}^{a} (dy\,\hat{y}) \times \left(\frac{C}{y}\,\hat{z}\right) = IC\int_{a+b}^{a} \frac{dy}{y}\hat{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_4 = -IC\,\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\hat{x}}$$

Alternativa c)

A força total sobre a espira é dado por

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = IC\,a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right)\hat{y} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \vec{F} = IC\frac{a^2}{b(a+b)}\hat{y}$$

Questão 11

Alternativa a)

Como os resistores estão conectados em paralelo, temos

$$I = I_1 + I_2$$

e

$$V_1 = V_2 \;\rightarrow\; R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Portanto, com essas suas equações, conseguimos resolver para I_1 e I_2 e obtemos

$$\boxed{I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I}$$

Alternativa b)

Para o cálculo do campo magnético, usaremos a fórmula de Biot-Savart

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

onde estamos interessados no ponto $\vec{r} = 0$.
A contribuição dos campos devido aos fios retilínios é nula, uma vez que os vetores $d\vec{\ell} \parallel \vec{r}'$.

- Contribuição do resistor R_2: $d\vec{\ell} = a\, d\theta\, \hat{\theta}$ e $\vec{r}' = a\hat{r}$. Portanto

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{a\, d\theta\, \hat{\theta} \times (-a\, \hat{r})}{a^3} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi\, a} d\theta\, \hat{z} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi a} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta\, \hat{z} \;\rightarrow\; \boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4a} \hat{z}}$$

- Contribuição do resistor R_1: $d\vec{\ell} = a\, d\theta\, (-\hat{\theta})$ e $\vec{r}' = a\hat{r}$. Portanto

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{a\, d\theta\, (-\hat{\theta}) \times (-a\, \hat{r})}{a^3} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi\, a} d\theta\, (-\hat{z}) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}\int_{\pi}^{2\pi} d\theta\,\hat{z} \rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{4a}\hat{z}}$$

- O campo magnético total no centro do sistema então é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4a}(I_2 - I_1)\hat{z}$$

que, usando os valores das correntes encontrado no primeiro item:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4a}\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)\hat{z}}$$

Questão 12

Item (i)

Como já foi visto em aula, para calcular o campo magnético dentro de um solenóide, fazemos uma espira retangular em que parte dela esta dentro do solenoide e orientada na direção z e comprimento h. Assim, ficamos com

$$\vec{B} = B\,\hat{z} \text{ e } d\vec{\ell} = d\ell\hat{z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\int d\ell = Bh = \mu_0 I_{\text{eng}},$$

sendo $I_{\text{eng}} = nhI$ com n sendo a densidade de espiras do solenóide. Portanto, dentro de um solenóide temos

$$\boxed{\vec{B}_{\text{dentro}} = \mu_0 nI\,\hat{z}}$$

Fora de um solenóide o campo magnético é zero

$$\boxed{\vec{B}_{\text{fora}} = 0}$$

Item (ii)

O solenóide menor de raio a produz um campo na sentido negativo de z , logo

$$\vec{B}_{\text{menor}} = -\mu_0 n_1 I\,\hat{z} \text{ para } 0 < r < a,$$

enquanto o solenóide maior de raio b produz um campo no sentido positivo de z, logo

$$\vec{B}_{\text{maior}} = \mu_0 n_2 I\,\hat{z}, \text{ para } 0 < r < b$$

Alternativa a)

Para a região $0 < r < a$ temos campo magnético de ambos os solenóides, portanto

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 (n_2 - n_1)\, I\,\hat{z}}$$

Alternativa b)

Para a região $a < r < b$ só temos campo magnético do solenóide maior, portanto

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n_2\, I\,\hat{z}}$$

Alternativa c)

Para a região $r > b$, estamos fora de ambos os solenóides, portanto não há campo magnético

$$\boxed{\vec{B} = 0}$$

Questão 13

Alternativa a)

Para calcular a corrente usamos

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} == \iint (Cr\,\hat{r}) \cdot (r\,dr\,d\theta\,\hat{r}) = C \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \to$$

$$\boxed{I = \frac{2\pi}{3} C R^3}$$

Alternativa b)

Usando Lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}},$$

com $\vec{B} = B\,\hat{\theta}$ e $d\vec{\ell} = d\ell\,\hat{\theta}$. Para o cálculo da corrente englobada

$$I_{\text{eng}} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 2\pi C \int_0^r (r')^2 dr' = \frac{2\pi C}{3} r^3 \ \to$$

$$\to \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \mu_0 \frac{2\pi C}{3} r^3 \ \to$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 C}{3} r^2\,\hat{\theta}}$$

Alternativa c)

Usaremos também a Lei de Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}} \;\rightarrow B(r)2\pi r = \mu_0 I \;\rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

Questão 14

Alternativa a)

Para calcular a força usamos $d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$

- Lado 1: $d\vec{\ell} = dx\,\hat{x}$

$$\vec{F}_1 = I\int_{a_2}^{a_1} (dx\,\hat{x}) \times \left(\frac{C}{b}\,\hat{z}\right) = \frac{IC}{b}\int_{a_2}^{a_1} dx\,(-\hat{y}) =$$

$$= \frac{IC}{b}(-a)(-\hat{y}) \;\rightarrow \boxed{\vec{F}_1 = \frac{ICa}{b}\hat{y}}$$

- Lado 2: $d\vec{\ell} = dy\,\hat{y}$

$$\vec{F}_2 = I\int_{a}^{a+b} (dy\,\hat{y}) \times \left(\frac{C}{y}\,\hat{z}\right) = IC\int_{a}^{a+b} \frac{dy}{y}\,\hat{x} \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = IC\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\hat{x}}$$

Alternativa b)

Para o lado 3 temos $d\vec{\ell} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$, mas como o filamento 3 descreve uma reta com coeficiente angular negativo igual 1 então $y = -x + \beta$, sendo β um coeficiente linear. Portanto $dx = -dy$.

$$d\vec{F}_3 = I \int dy(-\hat{x} + \hat{y}) \times \frac{C}{y} \hat{z} = IC \int_{a+b}^{a} \frac{dy}{y} (\hat{x} + \hat{y}) \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = -IC \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)(\hat{x} + \hat{y})}$$

Alternativa c)

O momento de dipolo é dado por $\mu = I\,\vec{A}$, sendo a direção da área dado pela regra da mão direita. Assim

$$\boxed{\mu = -\frac{Ia^2}{2}\hat{z}}$$

A força resultante é dado pela soma das forças obtidas. Logo,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = IC\left[\frac{a}{b} - \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\right]\hat{y}}$$

Questão 15

Alternativa a)

Usaremos Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Para ambos os filamentos retilínios teremos que $d\vec{\ell} \parallel (\vec{r} - \vec{r}')$, logo o produto vetorial será nulo e consequentemente as suas contribuições ao campo magnético no ponto O

Alternativa b)

Para o filamento circular teremos: $d\vec{\ell} = R\,d\theta(-\hat{\theta})$ e $(\vec{r} - \vec{r}') = -R\hat{r}$. Portanto

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-R\,d\theta\,\hat{\theta}) \times (-R\,\hat{r})}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta(-\hat{z}), \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta\,\hat{z} \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{3\mu_0 I}{8R}\,\hat{z}}$$

Alternativa c)

Pela Lei de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}}$. Porém, como podemos observar pela figura, o circuito C engloba a mesma corrente entrando e saindo e, portanto, a corrente englobada é nula. Logo

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

Questão 16

Alternativa a)

A corrente elétrica flui na direção radial, a densidade de corrente é calculada por

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}, \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{J}(r) = \frac{I_0}{A}\hat{r}, \rightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \frac{I_0}{\pi L\,r}\hat{r}}$$

Alternativa b)

Para calcular o campo elétrico, já que temos a densidade de corrente, usamos a Lei de Ohm microscópica

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{\sigma}\frac{I_0}{\pi L}\frac{\hat{r}}{r}}$$

Alternativa c)

Para calcular a resistência, vamos calcular primeiro o módulo da diferença de potencial. Temos que

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{\sigma}\frac{I_0}{\pi L}\int_a^b \frac{\hat{r}}{r}dr\,\hat{r} = -\frac{1}{\sigma}\frac{I_0}{\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Usando a Lei de Ohm macroscópica $|V_b - V_a| = R\,I_0, \rightarrow$

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Questão 17

Alternativa a)

A condutividade possui dimensão de inverso de resistência multiplicada por inverso de unidade de comprimento. Portanto, no SI, A deve ter dimensão de

$$\boxed{[A] = \Omega^{-1}}$$

Alternativa b)

Para o cálculo da resistência, usamos

$$dR = \frac{1}{\sigma(r)} \frac{dr}{4\pi r^2} \rightarrow$$

$$R = \int_a^{2a} \frac{r}{A} \frac{1}{4\pi} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi A} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} \rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{\ln 2}{4\pi A}}$$

Alternativa c)

Para calcular a densidade de corrente, temos que $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}, \rightarrow$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi AV}{\ln 2} J(r) 4\pi r^2 \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{J}(r) = \frac{AV}{\ln 2} \frac{\hat{r}}{r^2}}$$

Questão 18

Alternativa a)

Temos que $d\vec{\ell} = dx\,\hat{x}$ e $(\vec{r} - \vec{r}') = y\hat{y} - x\hat{x}$ então

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{-c}^{c} dx\,\hat{x} \times \frac{y\hat{y} - x\hat{x}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi y} \frac{1}{\sqrt{c^2 + y^2}} \hat{z}}$$

Alternativa b)

Tomando $c \to \infty$ obtemos

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}\hat{z}}$$

A força magnética por unidade de comprimento é dada por
$d\vec{F} = (J\,dy)\vec{L} \times \vec{B}, \to$

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\hat{y}}$$

Questão 19

Alternativa a)

As forças magnéticas vão ser calculadas por $d\vec{F}_i = I\,d\vec{\ell}_i \times \vec{B}_i$ onde temos

- $i = 1$: $d\vec{\ell}_1 = dx\,\hat{x}$ e $\vec{B}_1 = B_0\left(1 - \frac{x}{a}\right)\hat{x}$. Portanto temos que

$$\boxed{\vec{F}_1 = 0}$$

- $i = 2$: $d\vec{\ell}_2 = dy\,\hat{y}$ e $\vec{B}_2 = B_0\left[\hat{x} + \left(1 - \frac{y}{a}\right)\hat{y}\right]\hat{x}$. Portanto temos que

$$\boxed{\vec{F}_2 = aI\,B_0\hat{z}}$$

- $i = 3$: $d\vec{\ell}_3 = dx\,\hat{x}$ e $\vec{B}_3 = B_0\left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)\hat{x} + \hat{y}\right]\hat{x}$. Portanto temos que

$$\boxed{\vec{F}_3 = aI\,B_0\hat{z}}$$

- $i = 4$: $d\vec{\ell}_4 = dy\,\hat{y}$ e $\vec{B}_4 = B_0\left(1 - \frac{y}{a}\right)\hat{y}$. Portanto temos que

$$\boxed{\vec{F}_4 = 0}$$

- Força resultante:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = 2aI\,B_0\hat{z}}$$

Alternativa b)

O torque só irá atuar no elemento de circuito (3). Portanto

$$d\vec{\tau}_3 = (x\hat{x}) \times (IB_0dx\,\hat{z}), \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\tau}_3 = -\frac{a^2IB_0}{2}\hat{y}}$$

Questão 20

Alternativa a)

Por Lei de Ampère, entre $0 < r < a$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}}, \rightarrow B(r)\,2\pi r = \mu_0 J\,\pi r^2, \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J}{2}r\hat{\theta}}$$

Por Lei de Ampére, entre $a < r < b$ teremos que a corrente englobada será $I_{\text{eng}} = J\,\pi a^2$ e portanto

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{eng}}, \rightarrow B(r)\,2\pi r = \mu_0 J\,\pi a^2, \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{r} \hat{\theta}}$$

Alternativa b)

Para $r > b$, a corrente englobada é dada por $I_{\text{eng}} = J\,\pi a^2 - 2K\pi b$ e portanto

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2r} \left(Ja^2 - 2Kb\right) \hat{\theta}}$$

Alternativa c)

Como o campo magnético é nulo para $r > b$ temos que

$$\frac{\mu_0}{2r} \left(Ja^2 - 2Kb\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$\boxed{\frac{J}{K} = \frac{2b}{a^2}}$$