

Recursive Macroeconomic Theory

Henrique Danyi

October 2021

8 Equilíbrio com Mercados Completos

8.1 Tempo 0 vs Troca Sequencial

- Descrever equilíbrios competitivos de economias de trocas puras com horizonte infinito e dotações estocásticas.
- Útil para análise de *risk sharing* precificação de ativos e consumo.
- 2 sistemas de mercados completos que, com ativos e momento de troca distintos, resultam na mesma alocação de consumo:
 1. Estrutura *Arrow-Debreu* com mercados completos em contingent claims datadas todas trocadas em um período 0; e
 2. Estrutura de troca sequencial com ativos de *Arrow* completos de um período.
 - Permitem *risk sharing* completo

8.2 A configuração física: preferências e dotações

- História de eventos: $s^t = [s_0, s_1, \dots, s_t]$;
- Probabilidade associada a uma história de eventos: $\pi_t(s^t)$
 - Probabilidade condicional : $\pi_t(s^t | s^\tau) \forall \tau < t$
- Trocas ocorrem depois de s_0 ser observado. Define-se, então, $\pi_0(s_0) = 1$
- Na seção xx, assume-se que $\pi_t(s_t)$ é niduzido por um processo de Markov.
- I consumidores
- Consumidor i tem dotação estocástica de um bem dependente de s_t : $y_t^i(s^t)$
- s^t é publicamente observável

- Consumidor i consome com dependência histórica: $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^\infty$ e ordena tais fluxos de consumo por:

$$U_i(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u_i[c_t^i(s^t)] \pi_t(s^t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_i(c_t^i) \quad (1)$$

onde $u_i(c_t^i)$ é função crescente, duas vezes diferenciável, e estritamente côncava no consumo e satisfaz a condição de Inada: $\lim_{c \downarrow 0} u_i'(c) = +\infty$

- Condição de factibilidade: $\sum_i c_t^i(s^t) \leq \sum_i y_t^i(s^t)$

8.3 Arranjos de troca alternativos

- Processo estocástico de 2 eventos: $s_t \in S = \{0, 1\}$
- Estrutura de *Arrow-Debreu*: mercados se encontram no tempo 0 para trocar direitos sobre consumo em todos os períodos $t > 0$, i.e., $\forall s^t \ t \geq 1$;
- Estrutura de Trocas Sequenciais: em cada período, a economia transaciona direitos contingentes para um eríodo a frente.
- Ambas apoiam alocações idênticas de equilíbrio que depende apenas da realização da dotação agregada e de parâmetros independentes de tempo descrevendo a distribuição inicial de riqueza.

8.4 Problema de Pareto

- Eficiência é referência.
- Planejador que resolve problema de Pareto (com pesos de Pareto não negativos) sujeito à condição de factibilidade:

$$W = \sum_{i=1}^I \lambda_i U_i(c^i) \quad (2)$$

$$CPO : \quad \beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \pi_t(s^t) = \lambda_i^{-1} \theta_t(s^t) \quad (3)$$

$$\implies \quad \frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_1'(c_t^1(s^t))} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \quad (4)$$

$$\implies \quad c_t^i(s^t) = u_i'^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} u_1'(c_t^1(s^t))\right) \quad (5)$$

$$\implies \quad \sum_i u_i'^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} u_1'(c_t^1(s^t))\right) = \sum_i y_t^i(s^t) \quad (6)$$

Logo, $\forall i$, $c_t^i(s^t)$ depende apenas da realização da dotação agregada (e não da história específica s^t , ou da distribuição *cross-section* das dotações realizadas em t).

8.5 Transações no tempo 0: ativos de Arrow-Debreu

- Consumidores podem realizar trocas de direitos de consumo no período t contingente à história s^t ao preço $q_t^0(s^t)$
- Objetivo: Equação (1)
- Restrição Orçamentária: $\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t)$

$$CPO : \quad \frac{\partial U_i(c^i)}{\partial c_t^i(s^t)} = \mu_i q_t^0(s^t) \quad \forall i, t, s^t \quad (7)$$

$$\implies \quad \beta^t u'_i[c_t^i(s^t)] \pi_t(s^t) = \mu_i q_t^0(s^t) \quad \forall i, t, s^t \quad (8)$$

$$\implies \quad \frac{u'_i[c_t^i(s^t)]}{u'_j[c_t^j(s^t)]} = \frac{\mu_i}{\mu_j} \quad (9)$$

- Um equilíbrio competitivo é uma alocação factível ($c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$) e um sistema de preços ($\{q_t^0(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$) que, dado o sistema de preços, a dita alocação soluciona cada problema dos consumidores.
 - A alocação de equilíbrio soluciona a condição de factibilidade, a restrição orçamentária e a equação (9).

$$\text{Equação 9} \implies \quad c_t^i(s^t) = u_i'^{-1} u_1' [c_t^1(s^t)]^{\frac{\mu_i}{\mu_1}} \quad (10)$$

$$\text{CF} \implies \quad \sum_i u_i'^{-1} u_1' [c_t^1(s^t)]^{\frac{\mu_i}{\mu_1}} = \sum_i y_t^i(s^t) \quad (11)$$

Logo, $c_t^j(s^t)$ depende apenas da dotação agregada corrente e da fração $\{\frac{\mu_j}{\mu_1}\}_{j=2}^I$. Tendo a alocação de equilíbrio, tem-se a função de precificação de equilíbrio, dada pela equação (8).

- Uma alocação de equilíbrio competitivo é uma alocação Pareto ótima particular que define $\lambda_i = \mu_i^{-1}$. Adicionalmente, os preços-sombra do problema de Pareto ($\theta_t(s^t)$) equivalem a $q_t^0(s^t)$ para os bens a serem entregues em t sob a história s^t . Estes resultados segues o Primeiro e Segundo Teoremas do Bem-Estar.
- Um sintoma da estrutura transaccional de uma vez por todas e com liquidação central é que cada consumidor se depara com uma RO que restringe trocas em todos os períodos e histórias.
- Algoritmo de Neigishi para computacionar um equilíbrio:
 1. Defina um valor positivo para algum μ_i . Advinhe os demais μ_j . Solucione para a alocação de equilíbrio;
 2. Solucione para $q_t^0(s^t)$ para algum consumidor i ;
 3. Para $i = 1, \dots, I$, verifique a RO. Para os i 's que o custo de consumo exceder o valor da dotação, aumente μ_i e para os que a desigualdade está invertida, reduza μ_i .
 4. Itere os passos 1-3 até a convergência.

8.6 Algoritmo computacional mais simples

- Especificar as preferências permite evitar a iteração dos pesos de Pareto como no algoritmo de Neigishi.

8.7 Primer em Precificação de Ativos

xx

8.8 Transações Sequenciais

- Ativos de Arrow: em cada período $t \geq 0$, apenas na história realizada s^t ocorrem trocas em um conjunto completo de direitos contingentes de consumo de um período a frente.
- A alocação de equilíbrio nesta estrutura será a mesma que a encontrada na estrutura anterior.
- Um passo crucial na construção do arranjo de trocas sequenciais e a identificação de uma variável que sirva de estado endógena na função valor para o consumidor no período t sob a história s^t .
- A riqueza de um consumidor em um período t após a história s^t pode ser decomposta em:
 1. Riqueza Financeira: posse de ativos de Arrow no início do período t que é contingente ao estado corrente s^t ; e
 2. Riqueza Não Financeira: Dotações futuras.
- Riqueza Financeira:

$$\Upsilon_t^i(s^t) = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau | s^t} q_\tau^t(s^\tau) [c_\tau^i(s^\tau) - y_\tau^i(s^\tau)]$$

$$RO \implies \Upsilon_0^i(s^0) = 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^I \Upsilon_t^i(s^t) = 0 \quad \forall t, s^t$$

- Deve-se prevenir esquemas de Ponzi com a restrição mais fraca possível \implies Limites Naturais de Dívida: o pagamento da dívida contingente do consumidor deve ser factível em todo estado possível. Representação do Limite Natural de Dívida no período t sob a história s^t :

$$A_t^i(s^t) = \sum_{\tau=t}^{\infty} s_\tau^t(s^\tau) y_\tau^i(s^\tau) \quad (12)$$

este é o valor máximo que um agente i consegue pagar assumindo que seu consumo é zero sempre. A condição de ausência de esquema de Ponzi é então que o consumidor i no período $t - 1$ e história s^{t-1} não pode prometer pagar mais que $A_t^i(s^t)$ condicional à realização de s_t no próximo período.

- Denote por $\tilde{a}_t^i(s^t)$ como os direitos a consumo no período t além da dotação $y_t^i(s^t)$ que o consumidor i traz ao período t na história s^t e $\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t)$ como o kernel de precificação interpretado como o preço de uma unidade de consumo no período $t+1$ sob a realização s_{t+1} em $t+1$ quando a história em t é s^t .

$$\begin{aligned}
RO : & \quad \tilde{c}_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} \tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t) \leq y_t^i(s^t) + \tilde{a}_t^i(s^t) \\
NP : & \quad -\tilde{a}_{t+1}^i(s^{t+1}) \leq A_{t+1}^i(s^{t+1}) \\
\implies L^i = & \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left\{ \beta^t u_i(\tilde{c}_t^i(s^t)) \pi_t(s^t) + \eta_t^i(s^t) [y_t^i(s^t) + \tilde{a}_t^i(s^t) - \tilde{c}_t^i(s^t) - \right. \\
& \quad \left. \sum_{s_{t+1}} \tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \tilde{Q}_t(s_{t+1}, s^t)] + \sum_{s_{t+1}} \nu_t^i(s^t; s_{t+1}) [A_{t+1}^i(s^{t+1}) + \tilde{a}_{t+1}^i(s^{t+1})] \right\} \\
\implies CPO [\tilde{c}_t^i(s^t)] : & \quad \beta^t u_i'(\tilde{c}_t^i(s^t)) \pi_t(s^t) - \eta_t^i(s^t) = 0 \\
\implies CPO [\tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)] : & \quad -\eta_t^i(s^t) \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t) + \nu_t^i(s^t; s_{t+1}) + \eta_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) = 0
\end{aligned}$$

O limite natural de dívida não é *binding* no equilíbrio pois se houvesse qualquer história s^{t+1} que levasse a tal limite, o consumo seria igual a zero dali em diante e como $\lim_{c \downarrow 0} u_i'(c) = +\infty$, isso significaria que as utilidades marginais seriam infinitas, o que torna evidente a existência de alternativas acessíveis que resultam em maior utilidade esperada ao postergar consumo após tal restrição. Logo, $\nu_t^i(s^t; s_{t+1}) = 0$.

$$\nu_t^i(s^t; s_{t+1}) = 0 \implies \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t) = \beta \frac{u_i'(\tilde{c}_{t+1}^i(s^{t+1}))}{u_i'(\tilde{c}_t^i(s^t))} \pi_t(s^{t+1}|s^t) \quad \forall s_{t+1}, t, s^t \quad (13)$$

- Um equilíbrio competitivo com transações sequenciais de ativos de Arrow de um período tem uma distribuição de riqueza inicial $\vec{q}(s^0)$, uma coleção de limites de empréstimo $\{A_t^i(s^t)\}$ satisfazendo a equação (12) $\forall i, t, s^t$, uma alocação factível $\{\tilde{c}^i\}_{i=1}^I$, e kernels de preço $\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t)$ tais que:
 1. dados os kernels de preço, a distribuição de riqueza inicial e os limites de empréstimos, a alocação de consumo \tilde{c}^i e o portfólio $\{\tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)\}$ solucionam o problema do consumidor $\forall i$; e
 2. para todas as realizações $\{s^t\}_{t=0}^{\infty}$, tais alocações e portfólios satisfazem $\sum_i \tilde{c}_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t)$ e $\sum_i \tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) = 0$.
- Definindo a riqueza inicial como 0 e o kernel de preços como respeitando $q_{t+1}^0 = \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t) q_t^0(s^t)$, onde $q_t^0(s^t)$ é dado pelo equilíbrio de Arrow-Debreu, tem-se equivalência deste último com o equilíbrio de transações sequenciais.

8.9 Equilíbrio Competitivo Recursivo

- No nível de generalidade até aqui, os kernels de preços e as distribuições de riqueza na economia de transações sequenciais dependem da história s^t , o que torna funções do tempo de todos os eventos passados $\{s_\tau\}_{\tau=0}^y$. Isso dificulta a formulação de um modelo econômico que possa ser usado para confrontar observações empíricas. Especializando o processo exógeno facilita uma formulação recursiva.

8.9.1 Dotações governadas por um processo de Markov

- Cadeia de Markov com distribuição inicial $\text{Prob}(s_0 = s) = \pi_0(s)$: $\pi(s'|s) = \text{Prob}(s_{t+1} = s' | s_t = s)$
- Tal cadeia induz a sequência de medidas de probabilidade sob a história s^t pelas recursões: $\pi_t(s^t) = \pi(s_t | s_{t-1})\pi(s_{t-1} | s_{t-2}) \dots \pi(s_1 | s_0)\pi(s_0)$
- Foi assumido que as trocas ocorrem após a observação de s_0 , fato capturado pela definição de $\pi(s_0) = 1$ para o valor inicial de s_0 .
- Pela propriedade de Markov, a probabilidade condicional $\pi(s^t | s^\tau)$ para $t > \tau$ não depende da história antes de τ : $\pi(s^t | s^\tau) = \pi(s_t | s_{t-1})\pi(s_{t-1} | s_{t-2}) \dots \pi(s_{\tau+1} | s_\tau)$
- A seguir, assume-se que as dotações dos consumidores em t são funções mensuráveis de s^t invariantes no tempo, $y_t^i(s^t) = y^i(s_t) \forall i$.

8.9.2 Resultados de equilíbrio que herdam a propriedade de Markov

$$y_t^i(s^t) = y^i(s_t) \implies c_t^i(s^t) = \bar{c}^i(s_t) \forall i \quad (14)$$

$$\text{eqs (13) \& (14)} \implies \tilde{Q}_t(s_{t+1} | s^t) = \beta \frac{u'_i(\bar{c}_{t+1}^i(s^{t+1}))}{u'_i(\bar{c}_t^i(s^t))} \pi_t(s^{t+1} | s^t) = Q(s_{t+1} | s_t) \quad (15)$$

$$\text{eq (14) + AD} \implies \text{Independência histórica de preços \textbf{relativos} de AD} \quad (16)$$

- Tem-se que os níveis de riqueza e os limites naturais das dívidas são independentes da história:

$$A_t^i(s^t) = \bar{A}^i(s_t)$$

$$\Upsilon_t^i(s^t) = \bar{\Upsilon}^i(s_t)$$

A independência temporal da riqueza implica que o equilíbrio competitivo é o *first-best outcome* em que nenhum risco idiossincrático é carregado por consumidores individuais (*risk sharing*). Cada consumidor entra em todo período com uma riqueza independente das realizações passadas de sua dotação (seguro total contra idiossincrasias). Logo, a riqueza é função apenas do estado atual s_t (pois determina a dotação atual, o kernel de preços atual e contém todas as informações necessárias para a predição das realizações futuras dos processos de dotação e de preços) e tal riqueza será apenas o suficiente para continuar a estratégia de transações que segura contra idiossincrasias futuras. Mas choques agregados não podem ser diversificados a ponto de eliminados.

8.9.3 Formulação recursiva da otimização e equilíbrio

- Como $Q(s'|s)$ e $y^i(s)$ dependem apenas de s , há incentivo para uma formulação recursiva.
- O estado do consumidor i em t é sua riqueza a_t^i e a realização corrente s_t . Buscam-se *policy functions* cuja decisão ótima de consumo é:

$$c_t^i = h^i(a_t^i, s_t) \quad (17)$$

$$a_{t+1}(s_{t+1}) = g^i(a_t^i, s_t, s_{t+1}) \quad (18)$$

- Equação de Bellman (chapéu equivale a um período a frente):

$$v^i(a, s) = \max_{c, \hat{a}(s')} \left\{ u_i(c) + \beta \sum_{s'} v^i[\hat{a}(s'), s'] \pi(s'|s) \right\} \quad (19)$$

$$s.t. \quad c + \sum_{s'} \hat{a}(s') Q(s'|s) \leq y^i(s) + a \quad (20)$$

$$c \geq 0 \quad (21)$$

$$-\hat{a}(s') \leq \hat{A}^i(s'), \quad \forall s' \quad (22)$$

A solução depende implicitamente de $Q(\cdot|\cdot)$

8.10 Kernel de preços passo j

xx

8.11 Estrutura a Termo de *yields* em ativos livres de risco

xx

8.12 Versão recursiva do problema de Pareto

8.13 Apêndices

- Taxas de desconto heterogêneas implicam em alocações de equilíbrio em que consumidores menos pacientes escolhem consumir quase nada conforme o tempo se aproxima de infinito. O consumidor mais paciente eventualmente consome tudo.
- Crenças heterogêneas implicam que conforme o tempo passa, alocações atribuem menos àqueles com crenças menos corretas.
- Mercados incompletos destroem as consequências anteriores e implicam na possibilidade de ocorrência de muitas coisas.

10 Equivalência de Ricardo

11 Políticas Fiscais em um Modelo de Growth

13 Asset Pricing Theory

13.1 Introdução

- No capítulo 8, foi mostrado como um sistema de preços de equilíbrio para um modelo de uma economia com mercados completos pode ser usado para determinar o preço de qualquer ativo redundante. Tal abordagem permitiu a precificação de qualquer ativo cujo *payoff* pudesse ser sintetizado como uma função mensurável do estado da economia.
- Outra abordagem frequentemente utilizada (que não requer mercados completos) é a **Teoria de Precificação de Ativos** que impõe menos detalhes à economia (e menos mercados) e ainda assim deriva restrições intertemporalmente testáveis sobre preços, retornos e alocações de consumo. Ela usa apenas equações de Euler para um consumidor maximizador e oferece (um subconjunto de) restrições rigorosas sem especificar um modelo de equilíbrio geral completo. Essas restrições, porém, são difíceis de serem reconciliadas aos dados (um exemplo é o *equity premium puzzle*).

13.2 Equações de Euler

- Seguindo Hansen e Singleton (1983), modelo de um agente com riqueza $A_t > 0$ que maximiza utilidade esperada por sua vida $\mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})$ e existem dois ativos capazes de realocar riqueza para financiar consumo futuro: títulos (com juro bruto livre de risco R_t) e ações.
- Ao denotar por L_t o *payout* bruto dos títulos do agente entre t e $t + 1$, cujo valor presente em t é $\frac{L_t}{R_t}$, sabe-se que L_t é negativo se o agente emite título para se financiar.
- Denote por N_t a posse de ações do agente entre t e $t + 1$.
- Limites de Empréstimos: $L_t \geq -b_L$ e $N_t \geq -b_N$.
- Uma ação dá direito ao fluxo estocástico de dividendos y_t .
- RO: $c_t + R_t^{-1}L_t + p_t N_t \leq A_t$
- Riqueza do próximo período: $A_{t+1} = L_t + (p_{t+1} + y_{t+1})N_t$
- O único fator de incerteza fundamental exógena é y_t .
- As CPOs com relação aos controles L_t e N_t resulta nas equações de Euler:

$$[L_t] \quad u'(c_t)R_t^{-1} = \mathbb{E}_t \beta u'(c_{t+1}) \quad (23)$$

$$[N_t] \quad u'(c_t)p_t = \mathbb{E}_t \beta (y_{t+1} + p_{t+1}u'(c_{t+1})) \quad (24)$$

- Condições de Transversalidade (se fossem positivas, há sobre-acúmulo de ativos, que pode financiar mais consumo, e se negativo, o mercado impediria o sobre-acúmulo de dívidas associado à violação dos limites de empréstimos):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \beta^k u'(c_{t+k}) R_{t+k}^{-1} L_{t+k} = 0 \quad (25)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \beta^k u'(c_{t+k}) p_{t+k} N_{t+k} = 0 \quad (26)$$

13.3 Teorias Martingais de Consumo e Preços de Ações

1. Suponha que $R_t = R > 1 \forall t$:

$$(23) \implies \mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) = (\beta R)^{-1} u'(c_t) \quad (27)$$

tem-se o resultado de Robert Hall (1978) de que as utilidades marginais de consumo seguem um processo de Markov de primeira ordem linear univariado, de modo que nenhuma outra variável no conjunto de informação é capaz de ajudar na predição da utilidade marginal do período seguinte uma vez que a utilidade marginal do período atual é incluída (nenhuma outra Granger causa a $u'(c_{t+1})$).

2. Mercados de ações eficientes são tipicamente construídos de modo que o preço de uma ação segue um martingal. Seguindo a equação (24) deve ser imposta de um número de restrições para que isso seja verdade.

$$(24) \implies \mathbb{E}_t \beta (y_{t+1} + p_{t+1}) \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = p_t$$

$$(28) \ \& \ \mathbb{E}_t xz = \mathbb{E}_t x \mathbb{E}_t z + cov_t(x, z) \implies \beta \mathbb{E}_t (y_{t+1} + p_{t+1}) \mathbb{E}_t \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} +$$

$$\beta cov[(y_{t+1} + p_{t+1}), \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}] = p_t$$

Impondo $\mathbb{E}_t \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ como constante e $cov[(y_{t+1} + p_{t+1}), \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}] = 0$, tem-se a teoria martingal de preços de ações. Ainda assim, essas condições só valem sob condições muito especiais, e.g., quando o agente é neutro ao risco (utilidade linear em c_t), tem-se:

$$\implies \mathbb{E}_t \beta (y_{t+1} + p_{t+1}) = p_t \quad (28)$$

$$\implies p_t = \mathbb{E}_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t+j} + \epsilon_t \left(\frac{1}{\beta}\right)^t \quad (29)$$

isto é, o preço da ação segue um processo de Markov de primeira ordem univariado e, da segunda equação, tem-se que o preço é a soma dos dividendos futuros esperados e um termo de bolha.

13.4 Medida Martingal Equivalente

- Ajustes sobre risco e dividendos que convertem um preço de ativo em martingal. Seguindo as configurações do capítulo 8, assume-se que s_t evolui como uma cadeia de Markov com probabilidades de transição $\pi(s_{t+1}|s_t)$ e o fluxo de dividendos é $\{d(s_t)\}_{t=0}^{\infty}$.
- *Cum-dividend*: detentor da ação ao final do período t tem direito ao dividendo do período t . Representação:

$$a(s_t) = d(s_t) + \beta \sum_{s_{t+1}} \frac{u'(c_{t+1}^i(s_{t+1}))}{u'(c_t^i(s_t))} a(s_{t+1}) \pi(s_{t+1}|s_t) \quad (30)$$

$$a(s_t) = d(s_t) + R_t^{-1} \sum_{s_{t+1}} a(s_{t+1}) \pi(s_{t+1}|s_t) \quad (31)$$

$$a(s_t) = d(s_t) + R_t^{-1} \tilde{\mathbb{E}}_t a(s_{t+1}) \quad (32)$$

- Medida martingal equivalente xx

$$\begin{aligned}
&\implies a_T(s_T) = d(s_T) \\
&\implies a_{T-1}(s_{T-1}) = R_{T-1}^{-1} \tilde{\mathbb{E}}_{T-1} a_T(s_T) \\
&\quad \vdots \\
&\implies a_t(s_t) = R_t^{-1} \tilde{\mathbb{E}}_t R_{t+1}^{-1} R_{t+2}^{-1} \dots R_{T-1}^{-1} a_T(s_T) \\
&\implies \tilde{a}_{t,t+j} = \frac{a_{t+j}}{R_t R_{t+1} \dots R_{t+j-1}} \\
&\implies \tilde{\mathbb{E}}_t \tilde{a}_{t,t+j} = a_t(s_t) = \tilde{a}_{t,t} \\
&\implies \tilde{\mathbb{E}}[a(s_{t+1}) | s_t] = R_t [a(s_t) - d(s_t)]
\end{aligned}$$

tem-se precificação neutra ao risco. O preço do ativo é um martingal relativo à medida martingal equivalente. Usando as características de opções e solucionando para o caso contínuo, chega-se ao modelo de Black-Scholes (1973).

13.5 Precificação de Ativos de Equilíbrio

- Modelo de precificação de ativos de Lucas: economia com grande número de agentes idênticos que maximizam utilidade esperada para a vida cujo único bem durável é um conjunto de "árvores" idênticas para cada pessoa. No começo de cada período t , cada árvore gera y_t dividendos (ou frutos) governados por um processo de Markov (e sendo k próprio estado, i.e., $y_t = s_t$). O fruto não é durável, mas árvore é perfeitamente durável. A pdf invariante no tempo é $F(s', s)$
- RO, valor da riqueza no próximo período e CTs continuam iguais a antes.
- Em equilíbrio, os preços dos ativos liquidam os mercados, i.e., soma dos títulos igual a zero e soma de ações equivale a todas as ações disponíveis (normaliza-se uma ação por árvore).
- Solução de consumo de equilíbrio junto a equações de Euler resulta em preços de equilíbrio.

13.6 Preços de Ações sem bolhas

$$u'(y_t)p_t = \mathbb{E}_t \beta(y_{t+1} + p_{t+1})u'(y_{t+1}) \quad (33)$$

$$\implies u'(y_t)p_t = \mathbb{E}_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u'(y_{t+j})y_{t+j} + \mathbb{E}_t \lim_{k \rightarrow \infty} \beta^k u'(y_{t+k})p_{t+k} \quad (34)$$

- Como, por *market clearing* os agentes devem estar dispostos a manter suas dotações de árvores para sempre, o último termo da equação (34) deve ser igual a 0 (se positivo, todos querem vender, se negativo, todos querem comprar).

$$\implies p_t = \mathbb{E}_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(y_{t+j})}{u'(y_t)} y_{t+j} \quad (35)$$

que é generalização de (29). Outro jeito de desconsiderar bolhas é pela condição de transversalidade sobre as ações junto ao *market clearing*.

13.7 Computando Preços de Ações

Exemplos

13.8 Estrutura a Termo da Taxa de Juros

- Precificando títulos com maturidades distintas.
- Mantém árvore de Lucas com dividendo Markov $y_t = s_t$ e transição $F(s', s)$.
- R_{jt} é o juro livre de risco bruto entre t e $t + j$. Logo, em t , R_{tj}^{-1} é o preço de uma unidade de consumo com certeza em $t + j$.
- Exemplo de RO e riqueza no próximo período com 2 títulos, de um período e de 2 períodos:

$$\begin{aligned}c_t + R_{1t}^{-1}L_{1t} + R_{2t}^{-1}L_{2t} + p_t N_t &\leq A_t \\ A_{t+1} &= L_{1t} + R_{1t+1}^{-1}L_{2t} + (p_{t+1} + y_{t+1})N_t\end{aligned}$$

Note que existe risco de variação de valor do título, pois apesar de se conhecer R_{jt} em t , não se conhece R_{jt+1} , R_{jt+2} , \dots , R_{jt+j-1} .

- Construindo o problema de maneira recursiva, usando a CPO e a condição de Benveniste-Scheinkman, tem-se que a expressão geral de R_{jt}^{-1} é:

$$R_{jt}^{-1} = \beta^j \mathbb{E}_t \left[\frac{u'(s_{t+j})}{u'(s_t)} \right] \quad (36)$$

para construir a estrutura a termo, basta usar a medida de *yield to maturity*:

$$\tilde{R}_{jt} = R_{jt}^{\frac{1}{j}} = \beta^{-1} \{u'(s_t) [\mathbb{E}_t u'(s_{t+j})]^{-1}\}^{\frac{1}{j}} \quad (37)$$

13.9 Preços Contingentes a Estados

Usar abordagem de Lucas combinada com estrutura do capítulo 8 analisada em tempo contínuo para analisar temas específicos, incluindo o Teorema de Modigliani-Miller.

13.10 Dívida do Governo

17 Seguro Próprio

17.1 Introdução

- Problema da Poupança: consumidor deseja maximizar valor presente de soma das utilidades esperadas (cujas funções de utilidade são côncavas), mas é impossibilitado de acessar todos os mercados de seguro e quase todos os mercados de ativos, conseguindo apenas comprar quantias não negativas de um ativo livre de risco. A ausência de oportunidades de seguro induz a usar variações de suas posses de ativos no tempo para adquirir seguro próprio.

17.2 O ambiente do consumidor

- Preferências:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (38)$$

$$(39)$$

$u(c)$ é estritamente crescente, estritamente côncava e duas vezes diferenciável.

- Dotação: $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$. Em cada período a dotação assume um valor de um número finito de possibilidades indexado por $s \in S$. Particularmente, o conjunto de possibilidade de dotações é $\bar{y}_1 < \bar{y}_2 < \dots < \bar{y}_S$.
- Elementos da sequência de dotações são i.i.d. com $Prob(y = y_s) = \Pi_s \geq 0 \wedge \sum_{s \in S} \Pi_s = 1$.
- O agente pode manter quantias não negativas de um único ativo livre de risco que tem retorno líquido r , onde $(1+r)\beta = 1$. Defina como $a_t \geq 0$ a posse de ativos do agente no início de t , incluindo a realização do processo de renda. Assume-se $a_0 = y_0$.
- RO: $a_{t+1} = (1+r)(a_t - c_t) + y_{t+1}$
- Equação de Bellman para agente com $a > 0$:

$$V(a) = \max_c \left\{ u(c) + \sum_{s=1}^S \beta \Pi_s V[(1+r)(a-c) + \bar{y}_s] \right\}$$

s.t. $0 \leq c \leq a$

- **Seguro próprio ocorre quando o agente usa poupança para se segurar a flutuações na renda. Realizações de renda baixas são respondidas com redução de poupança. Realizações altas por aumento de poupança. Estamos interessados nas propriedades de LP de um esquema ótimo de seguro próprio. O consumo vai se estabilizar em algum \bar{c} ? Ou haverá pobreza? Veremos que, na verdade, o consumo divergirá ao infinito.**

17.3 Dotação não-estocástica

- Sem incerteza, a pergunta sobre seguro é irrelevante. Porém, convém estudar o comportamento ótimo de um agente com fluxo de renda instável com RO.
- **Restrições de Empréstimos:**

1. **Natural, sob ativos de Arrow de um período: consumo é completamente suavizado**

- Dívida (ou posição de ativos do consumidor antes da realização da dotação em t : b_t)
- RO: $c_t + b_t \leq \beta b_{t+1} + y_t$
- Restrição (encontrada solucionando RO para frente impondo $c_t = 0$ (máximo que consegue pagar)): $b_t \leq \sum_{j=0}^{\infty} y_{t+j} = \bar{b}_t$
- Solucionando RO para frente e impondo a condição inicial $b_0 = 0$ e a condição terminal $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^{T+1} b_{T+1} = 0$: $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t$
- Maximizar utilidade esperada sujeito à restrição acima impõe: $u'(c_t) > u'(c_{t+1})$, com igualdade se $b_{t+1} < \bar{b}_{t+1}$, $\forall t \geq 0$.
- É possível solucionar tal CPO com $c_t = \bar{c} \forall t \geq 0$, onde $\frac{\bar{c}}{1-\beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t$
- Sob igualdade, a dívida satisfaz: $b_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t+j} - \frac{\bar{c}}{1-\beta}$

2. **Sem empréstimo: $a_{t+1} \geq y_{t+1}$: consumo é sequência crescente monotônica com pulos em períodos em que a restrição é ativa.**

- Restrição: $b_t = (1+r)^{-1} b_{t+1} \leq 0$
- Trabalha-se com c_t e $a_t = -b_t + y_t$
- CPO: $u'(c_t) > u'(c_{t+1})$, com igualdade se $c_t < a_t$, $\forall t \geq 0$.
- Logo,
 - (a) $c_{t-1} = c_t$; ou
 - (b) $c_{t-1} < c_t \wedge c_{t-1} = a_{t-1} \implies a_t = y_t$
 restrição de não empréstimo só é ativa quando se deseja adiantar consumo (o que só ocorre se a dotação estiver crescendo).
- Solucionando RO a frente:

$$\text{restrição inativa em } t-1 \implies \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j c_{t+j} = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t+j}$$

$$\text{restrição ativa em } t-1 \implies \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j c_{t+j} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t+j}$$

- Se a restrição for ativa em uma quantidade finita de períodos, o consumo é estável a partir do último destes.
- No geral, a série de tempo do consumo será uma função discreta no tempo que pula em períodos \bar{t} .

17.4 Preferências quadráticas

xx

17.5 Processo estocástico de dotação: caso i.i.d.

- CPO para equação de Bellman: $u'(c) \geq \sum_{s=1}^S \beta(1+r)\Pi_s V'[(1+r)(a-c) + \bar{y}_s]$
- Condição de Benveniste-Scheinkman: $u'(c) = V'(a) \implies V'(a) \geq \sum_{s=1}^S \beta(1+r)\Pi_s V'(a_s)$
- Ativos divergem para infinito e consumo diverge para infinito.

17.6 Processo estocástico de dotação: caso geral

- CPO para equação de Bellman: $u'(c) \geq \mathbb{E}[u'(c_{t+1})|I_t]$
- Consumo converge para infinito.
- Resultados sob incerteza são muito distintos comparados aos sem incerteza.

17.7 Intuição

- Adicionar um pequeno componente i.i.d. a qualquer dotação constante induz em um consumo ótimo mudando de constante para um processo estocástico que vai ao infinito.
- Não é razoável atribuir este resultado a uma aversão ao risco que leva a poupança infinita e assim ao consumo infinito.
- Ljungqvist e Sargent atribuem este resultado à concavidade de u (aversão ao risco) e à **hipótese de que a utilidade marginal do consumo deve permanecer positiva para qualquer nível arbitrariamente alto de consumo**. Neste caso, tem-se utilidade marginal estritamente convexa e, com isto, um dado declínio absoluto no consumo não é apenas mais custoso em utilidade que um ganho associado a um aumento absoluto idêntico no consumo, mas tal declínio também está associado a um aumento maior na utilidade marginal (quando comparada à redução da utilidade marginal associada a um aumento absoluto de consumo). Ao equalizar utilidades marginais no tempo, surge este efeito de crescimento no consumo ao infinito

17.8 Oferta de trabalho endógena

xx

17.9 Considerações Finais

- No próximo capítulo, generaliza-se o problema da poupança para um contínuo de agentes. Para garantir um equilíbrio estacionário, espera-se que a taxa de juros seja inferior a β^{-1} , portanto tratando $(1 + r)$ como objeto de equilíbrio. Este resultado implica que em uma economia de produção com capital físico e mercados incompletos, o produto marginal do capital será inferior àquele que seria exercido em um mundo com mercados completo, portanto, haverá sobre-acumulação de capital, o que elimina o desejo de acumular uma quantidade infinita de ativos caso a taxa de juros fosse igual a β^{-1} .
- No capítulo 21, a condição $(1 + r)\beta = 1$ é mantida. A hipótese lá será de que um planejador central tem acesso a empréstimos livre de risco fora da economia e objetiva maximizar o bem estar dos agentes sujeito a problemas de informação e/ou imposição. Mantém-se ausência de incerteza agregada, de modo que sem os problemas citados, o ótimo social seria a redistribuição em cada período sem qualquer troca intertemporal com o mundo de fora. Mas se os agentes são livres para partir com suas dotações, otimalidade demanda ao planejador a garantia de uma quantidade constante de consumo no limite que domina fracamente todas as realizações de dotações dos indivíduos sob autarquia. Sob informação assimétrica (caso o planejador só consiga extrair a verdade com promessas de utilidades futuras), o resultado é diametricamente oposto ao do problema da poupança encontrado neste capítulo; o consumo converge para seu limite inferior.

18 Modelos de Mercados Incompletos

18.1 Introdução

- Configuração com impedimentos a troca de riscos (em comparação ao caso de mercados completos). A falta de oportunidades torna as alocações de equilíbrio dependentes à história (por meio da dependência da posse de ativos).
- Grande número de agentes idênticos *ex ante*, mas heterogêneos *ex post* que transacionam um único ativo.
- Há incerteza no nível individual, mas não no agregado.
- Única opção à família é seguro próprio aos choques adversos.
- Esta classe de modelos foi inventada por Bewley, parcialmente para estudar um conjunto de questões da teoria monetária. No final do capítulo, questões monetária também são discutidas.
- O capítulo fecha com uma descrição de Krusell e Smith (1998) que estendeu o domínio de tais modelos para incluir uma variável de estado agregada estocástica que varia no tempo.

18.2 Um problema de poupança

- s_t evolui como cadeia de Markov de m estados cuja matriz de transição \mathcal{P} sobre \bar{s}_i 's é invariante. Assume-se por vezes que $m = 2$, e $s_t = \{0, 1\}$.
- Renda do trabalho: ws_t .
- Posse de um único ativo limitada a $\mathcal{A} = [0 < \bar{a}_1 < \bar{a}_2 < \dots < \bar{a}_n]$.
- Para dados (w, r, a_0, s_0) , a família escolhe uma *policy function* para $\{c_t, a_t + 1\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ sujeito a $c_t + a_{t+1} = (1+r)a_t + ws_t \wedge a_{t+1} \in \mathcal{A}$, **com** $\beta(1+r) < 1$
- Equação de Bellman: $\forall i \in [1, \dots, m], \forall h \in [1, \dots, n]$

$$v(\bar{a}_h, \bar{s}_i) = \max_{a' \in \mathcal{A}} \{u[(1+r)a\bar{a}_h + w\bar{s}_i - a'] + \beta \sum_{j=1}^m \mathcal{P}(i, j)v(a', \bar{s}_j)\} \quad (40)$$

- As *policy functions* determinam o comportamento ótimo e definem a distribuição riqueza-emprego da economia conjuntamente com a matriz de transição.

18.3 Unificação e análise posterior

- Limite de dívida: $a_{t+1} \geq -\phi$
- Supõe-se temporariamente que $a_{t+1} \in [-\phi, +\infty]$.
- $\beta = \frac{1}{1+r} \in (0, 1)$
- $w = \psi(r)$

18.4 O problema de poupança não estocástico quando $\beta(1+r) < 1$

- O caso $\beta(1+r) = 1$ foi estudado no capítulo 17.
- Assuma que $s_t = s \forall t$
- Problema das famílias:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t) + \theta_t [(1+r)a_t + ws - c_t - a_{t+1}]\} \quad (41)$$

$$CPO : u'(c_t) \geq \beta(1+r)u'(c_{t+1}), \text{ com } = \text{ se } a_{t+1} > -phi \quad (42)$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_{t+1} > -\phi &\implies u'(c_{t+1}) = \frac{1}{\beta(1+r)}u'(c_t) \\ \beta(1+r) < 1 &\implies u'(c_{t+1}) > u'(c_t) \\ &\implies c_{t+1} < c_t \end{aligned}$$

quando o consumidor não está com a restrição de limite de dívida ativa, a sequência de consumo é monótona decrescente. Se o consumo for limitado inferiormente, seja pela condição de Inada (concavidade) ou por uma restrição de não negatividade, o consumo convergirá conforme $t \rightarrow \infty$. Uma vez que convirja, a família estará no limite da dívida (restrição passa a ser ativa), pois exauriu a riqueza acima de $-\phi$ adiantando consumo. Logo, pode-se computar o E.E. com a restrição ativa, dado que a família ficará eventualmente presa nesta. Defina $a_{t+1} = a_t = -\phi$. Pela RO, $c_t = \bar{c} = ws - r\phi$. Nota-se que a família gostaria de adiantar consumo, mas não consegue.

Solucionando a RO de maneira *forward*, $a_0 = (1+r)^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} (1+r)^{-t} (c_t - ws)$. Esta equação em conjunto com a equação de igualdade da RO define a trajetória do consumo até a data T (data fixada para definir o momento em que o limite da dívida se torna ativo. A partir daí, a equação da RO sob a restrição ativa define a trajetória do consumo.

- Se é imposto que o consumo é Não negativo, a RO sob a restrição ativa define implicitamente que $\phi \leq \frac{ws}{r}$. Pode-se definir um limite *ad hoc* sobre o limite da dívida com desigualdade estrita.

- Se $\beta(1+r) = 1$,

$$\begin{aligned} a_{t+1} > -\phi &\implies u'(c_{t+1}) = \frac{1}{\beta(1+r)} u'(c_t) \\ \beta(1+r) = 1 &\implies u'(c_{t+1}) = u'(c_t) \\ &\implies c_{t+1} = c_t \end{aligned}$$

pela RO:

$$\begin{aligned} c_t &= ws - ra \\ a_{t+1} &= a_t = a_0 \end{aligned}$$

isto é, sob $\beta(1+r) = 1$, todo a_0 é E.E.

- Defina como \bar{a} o nível de E.E. dos ativos. Então,

$$\bar{a} = \begin{cases} -\phi, & \text{se } r < \rho \\ a_0, & \text{se } r = \rho \end{cases} \quad (43)$$

18.5 Limites de dívida: natural e *ad hoc*

- Volta-se ao caso estocástico para se tratar da questão dos limites de dívida.
- Impor $c_t \geq 0$ chega no que Aiyagari chama de limite natural da dívida. Logo, pela RO solucionada *forward*:

$$c_t \geq 0 \implies a_t \geq -\frac{1}{1+r} \sum_{j=0}^{\infty} ws_{t+j} (1+r)^{-j} \quad (44)$$

Porém, esta equação deve ser suplementada, pois note que o lado direito é uma variável aleatória desconhecida em t . Uma possibilidade seria substituí-la pelo seu valor esperado, mas tal formulação é incompatível com a noção de empréstimo livre de risco (de que o consumidor pode repagar). Para tal equação valer com quase-certeza, substitui-se $s \equiv \bar{s}_1$, o que implica que $a_t \geq -\frac{\bar{s}_1 w}{r}$; este é o limite natural da dívida. Pode-se também definir o limite da dívida como $a_t \geq -\phi = \min\{b, \frac{\bar{s}_1 w}{r}\}$, onde $b > 0$ é arbitrário, estabelecendo um limite *ad hoc* para possibilitar limites mais rigorosos.

18.6 Ativos Médios como função de r

xx

18.7 Exemplos Computados

xx

18.14 Poupança Precaucional

- O excesso de capital de EE nos modelos de economia de produção com choques de renda de trabalho idiossincráticos podem ser interpretados como uma poupança precaucional, i.e., poupança extraordinária causada pelo fato de que a renda futura é aleatória ao invés de determinada.
- Poupança precaucional ocorre em resposta a riscos está associada à convexidade da função utilidade. A intuição pode ser obtida da equação de Euler.

$$u'[(1+r)a_0 + w_0 - a_1] = \beta(1+r)\mathbb{E}_0 u'[(1+r)a_1 + w_1]$$

Definindo como a_1^n e a_1^s a escolha ótima de poupança nas economias não-estocástica e estocástica respectivamente, elas satisfazem:

$$u'[(1+r)a_0 + w_0 - a_1^n] = \beta(1+r)u'[(1+r)a_1^n + \bar{w}_1] \quad (45)$$

$$u'[(1+r)a_0 + w_0 - a_1^s] = \beta(1+r)\mathbb{E}_0 u'[(1+r)a_1^s + w_1] > \beta(1+r)u'[(1+r)a_1^s \bar{w}_1] \quad (46)$$

$$\implies a_1^s > a_1^n \quad (47)$$

- Para haver poupança precaucional, utilidade deve ser convexa (demonstração em Carroll Kimball (1996)).
- Caso haja condições para poupança precaucional e a utilidade marginal do consumo seja sempre positiva, a função de consumo se torna aproximadamente linear para níveis grandes de ativos.

18.16 Conclusão

In chapters 21 and 22, we study a class of models for similar environments that, like the models of this chapter, make consumption allocations history dependent. But the spirit of the models in chapters 21 and 22 differs from those in this chapter in requiring that the trading structure be more firmly motivated by the environment. In particular, the models in chapters 21 and 22 posit a particular reason that complete markets do not exist, coming from enforcement or information problems, and then study how risk sharing among people can best be arranged.

21 Incentivos e Seguros

21.1 Seguro com Contratos Recursivos

- Planejador social que desenha um contrato eficiente para ofertar seguro na presença de restrições de incentivo.
-
- Tema técnico: como memória pode ser codificada recursivamente e como problemas de incentivo podem ser geridos com contratos que se lembram e prometem.

21.2 Ambiente Básico

$$\mathbb{E}_{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

- Fluxo de renda estocástico iid $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, com $Prob(y_t | \bar{y}_s) = \Pi_s$, onde $s \in \vec{S} \equiv \{1, 2, \dots, S\}$ e $\bar{y}_{s+1} > \bar{y}_s$.
- História de dotações: $h_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_0)$
- Sob mercados completos, haveria risksharing perfeito e todos consumiriam a dotação agregada per capita em cada período.
- Introduzindo restrições de incentivo, esta alocação é inatingível.
- Introduz-se um planejador que é a única pessoa que consegue tomar emprestado à taxa de juros livre de risco $R = \beta^{-1}$. Famílias não emprestam entre si, apenas com o planejador. O planejador está comprometido em honrar suas promessas. 3 possibilidades de restrição de incentivos:
 1. Modelo de comprometimento unilateral: tanto o planejador quanto a família observa a história das dotações da família em cada período. Apesar de o planejador poder se comprometer a honrar um contrato, famílias não conseguem e estão livres para não honrar um arranjo com o planejador e viver em autarquia perpétua. As famílias devem ser induzidas a preferir a aderência pela estrutura do contrato.
 2. Famílias *podem* se comprometer e entrar em contratos duradouros e *binding* com o planejador, mas tem informação privada sobre suas próprias rendas. O planejador não consegue acessar informação sobre a renda ou o consumo das famílias. Trocas entre as famílias e o planejador devem ser baseadas em relatos feitos pela própria família sobre realizações da renda. Um contrato com compatibilidade de incentivo induz uma família a reportar sua renda honestamente.
 3. Mesmo ambiente que (2), mas as famílias tem acesso a uma tecnologia de registro que não pode ser observada pelo planejador. Famílias podem registrar quantidades não-negativas de bens a um retorno bruto livre de risco idêntico ao que o planejador consegue

no mercado de crédito externo. Como o planejador pode emprestar e tomar emprestado à taxa R fora da vila, a tecnologia de registro não altera a restrição de recursos agregada da economia, mas afeta o conjunto de contratos incentivo-compatíveis entre o planejador e as famílias.

As alocações eficientes sob os três ambientes tem trajetórias de consumo dramaticamente distintas.

21.3 Comprometimento Unilateral

O primeiro problema de incentivo é falta de comprometimento. O planejador está comprometido a honrar suas promessas, mas os aldeões são livres para não honrar seus contratos com o planejador a qualquer momento. O planejador estrutura um contrato de modo que o aldeão queira honrá-lo a qualquer momento e em qualquer contingência. Trata-se de um contrato auto-aplicável.

21.3.1 Contrato Auto-Áplicável

- Um contrato é uma sequência de funções $c_t = f_t(h_t)$, onde $h_t = (y_t, \dots, t_0)$. A sequência de funções $\{f_t\}$ atribui um fluxo de consumo dependente da história à família. O contrato especifica que em cada período, o aldeão contribui sua dotação em cada período ao planejador que, então, retorna o consumo ao mesmo. Deste arranjo, o planejador ganha um valor presente *ex ante* de:

$$P_{-1} = \mathbb{E}_{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (y_t - f_t(h_t)). \quad (48)$$

Ou seja, o planejador atribui ao aldeão um valor presente de $v = \mathbb{E}_{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f_t(h_t)$

- O contrato deve ser auto-aplicável. O valor presente *ex ante* de viver em autarquia é

$$v_{aut} = \mathbb{E}_{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(y_t) = \frac{1}{1-\beta} \sum_{s=1}^S \Pi_s u(\bar{y}_s).$$

Então, em um período t , já tendo observado sua dotação, uma família pode garantir $u(y_t) + \beta v_{aut}$. Logo, o contrato deve satisfazer:

$$\text{Restrição de Participação: } u[f_t(h_t)] + \beta \mathbb{E}_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} u[f_{t+j}(h_{t+j})] \geq u(y_t) + \beta v_{aut} \quad (49)$$

21.3.2 Formulação recursiva e solução

O número de restrições imposto pela equação 49 cresce exponencialmente com t . Porém, existe um modo de descrever um subconjunto interessante de contratos dependentes a história. Particularmente, considere a representação recursiva de um contrato em termos de uma variável de estado

x_t abaixo:

$$\begin{aligned} c_t &= g(x_t, y_t) \\ x_{t+1} &= l(x_t, y_t) \end{aligned}$$

Iterando a função $l(\cdot)$ iniciando em (x_0, y_0) , tem-se que:

$$x_t = m_t(x_0; y_{t-1}, \dots, y_0),$$

de modo que x_t resume as histórias das dotações até $t - 1$, i.e., é um variável "backward-looking".

A variável de estado apropriada é um valor futuro esperado descontado prometido $v_t = \mathbb{E}_{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})$.

Para formular o contrato recursivo, assume-se que o planejador chega no período t antes de y_t ser realizado com um valor previamente prometido v_t . Ele entrega v_t deixando c_t e o valor de continuação v_{t+1} responderem a y_t . tem termos de $v_t(h_{t-1})$, a RP se torna:

$$v_t(h_{t-1}) = u(f_t(h_t)) + \beta v_{t+1}(h_t) \geq u(y_t) + \beta v_{aut}. \quad (50)$$

Neste sentido, trabalhando com notação recursiva, o planejador dá um valor prescrito v ao entregar um consumo corrente dependente ao estado e um valor prometido começando amanhã v' , ambos dependendo da dotação corrente y e da promessa pré-existente v . Logo, o planejador escolhe c e v' para prover o valor prometido v e maximizar seus lucros 48.

Em cada período a família deve ser induzida a entregar a dotação corrente ao planejador que possivelmente entrega parte desta a outros aldeões e investe o restante. Em troca, o planejador entrega um fluxo de consumo dependente ao estado à família. Seja v a utilidade futura esperada descontada previamente prometida ao aldeão e seja $P(v)$ ser o valor presente esperado do fluxo de lucros $\{y_t - c_t\}$ para o planejador que entrefa o valor prometido v de maneira ótima. Então,

$$P(v) = \max_{\{c_s, w_s\}} \sum_{s=1}^S \Pi_s [(\bar{y}_s - c_s) + \beta P(w_s)] \quad (51)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{s=1}^S \Pi_s [u(c_s) + \beta w_s] \geq v \quad (52)$$

$$u(c_s) + \beta w_s \geq u(\bar{y}_s) + \beta v_{aut}, \quad s = 1, \dots, S \quad (53)$$

$$c_s \in [c_{min}, c_{max}] \quad (54)$$

$$w_s \in [v_{aut}, \bar{v}] \quad (55)$$