1) LS 8.4) Estrutura a Termo da Taxa de Juros

$$y_{t+1} = \lambda_{t+1} y_t$$

λ_{t+1} têm matriz de transição dada por: $P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 1-p_{22} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = 0.98 \\ \bar{\lambda}_2 = 1.03 \end{cases} \qquad \pi_0 = 0.5 \qquad \beta = 0.96 \qquad \gamma = 2$$

Preferência: $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

$$\Rightarrow \max_{c_t} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t(\lambda^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)$$

$$\text{s.t.} \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(\lambda^t)\, c_t(\lambda^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(\lambda^t)\, y_t(\lambda^t)$$

$$\Leftrightarrow \max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \pi_t(\lambda^t) + \mu_i \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) \left[y_t(\lambda^t) - c_t(\lambda^t) \right] \right\}$$

C.P.O.: $\beta^t c_t(\lambda^t)^{-\gamma} \pi_t(\lambda^t) = \mu_i q_t^0(\lambda^t)$

$$\Rightarrow c_0(\lambda^0)^{-\gamma} \pi_0(\lambda^0) = \mu_i q_0^0(\lambda^0)$$

$$\Rightarrow \beta^t \left(\frac{c_t(\lambda^t)}{c_0(\lambda^0)} \right)^{-\gamma} \pi(\lambda^t | \lambda^0) = q_t^0(\lambda^t | \lambda^0)$$

Agente representativo + Factibilidade $\Rightarrow$ $c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t)$ alocação de equilíbrio

$$\Rightarrow q_t^0(\lambda^t | \lambda^0) = \beta^t \left[\frac{y_t(\lambda^t)}{y_0(\lambda^0)} \right]^{-\gamma} \pi(\lambda^t | \lambda_0)$$

$$\left(\begin{aligned} & y_{t+1} = \lambda_{t+1} y_t \\ \Rightarrow\ & y_t = \lambda_t\, y_{t-1} \\ \Rightarrow\ & y_{t+1} = \lambda_{t+1} \lambda_t\, y_{t-1} \\ \Rightarrow\ & y_t = y_0 \prod_{i=0}^{t-1} \lambda_{t-i} \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow q_t^0(\lambda^t | \lambda^0) = \beta^t \left(\prod_{i=0}^{t-1} \lambda_{t-i} \right)^{-\gamma} \pi(\lambda^t | \lambda_0)$$ Propriedade de Markov

$$\Rightarrow q_t^0(\lambda^t | \lambda^0) = \beta^t \left(\prod_{i=0}^{t-1} \lambda_{t-i} \right) \prod_{j=0}^{t-1} \pi(\lambda_{t-j} | \lambda_{t-j-1})$$ preços de equilíbrio

Intuição: economia com indivíduo único; não existe distinção entre risco agregado e risco idiossincrático; não é possível haver risk-sharing; consumo flutua em 1 pra 1 com a renda. Ainda assim, é possível definir preços de eq. do mercado de contratos contingentes.

Itens (a) e (b).

c) Distribuição em $t=0$: $\vec{\pi}_0 = [0.5 \quad 0.5]$

Distribuição em $t=1$: $\vec{\pi}_1 = [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix} = [0.475 \quad 0.525]$

Distribuição no E.E.: $\bar{\pi}_{t+1} = \bar{\pi}_t \Rightarrow [\bar{\pi} \quad 1-\bar{\pi}] = [\bar{\pi} \quad 1-\bar{\pi}] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [\bar{\pi} \quad 1-\bar{\pi}] = [0.65\bar{\pi} + 0.15 \quad -0.65\bar{\pi} + 0.85] \Rightarrow \bar{\pi} =$

Distribuição no E.E.: $\bar{\pi} = [3/7 \quad 4/7]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\lambda_t] = [3/7 \quad 4/7] \begin{bmatrix} 98/100 \\ 103/100 \end{bmatrix} = 353/350$

d) Temos os preços de todos os ativos contingentes. Para construir um ativo artificial que paga 1 unidade de consumo com certeza no período j, basta adquirir 1 unidade de cada ativo contingente englobando toda a história possível até j.

Logo, $p_0^j = \sum_{\lambda^t} q_0^j(\lambda^t) = \sum_{\lambda^t} \beta^j (\lambda_t \lambda_{t-1} \ldots \lambda_0)^{-\gamma} \pi(\lambda_t | \lambda_{t-1}) \pi(\lambda_{t-1} | \lambda_{t-2}) \ldots \pi(\lambda_1 | \lambda_0)$

↳ soma de 2^j componentes

Caso $j=0$: $p_0^0 = q_0^0(\lambda_0) = 1$

Caso $j=1$: $p_0^1 = \sum_{\lambda^1} \beta \left(y(\lambda^1) / y_0(\lambda^0) \right)^{-\gamma} \pi(\lambda^1 | \lambda^0)$

$= \beta \sum_{\lambda^1} y(\lambda^1)^{-\gamma} \pi(\lambda^1 | 0.98)$

$= 0.96 \{ (1.03)^{-2} \, 0.2 + (0.98)^{-2} \, 0.8 \} \cong 0.981$

Caso $j=2$: $p_0^2 = \beta^2 \beta \sum_{\lambda} y(\lambda^2)^{-\gamma} \pi(\lambda^2 | \lambda^1) \pi(\lambda^1 | 0.98)$

$= 0.9216 \{ (1.03 \times 1.03)^{-2} \, p_{12} p_{22} + (1.03 \times 0.92)(p_{12} p_{21} + p_{11} p_{12}) + (0.92)^{-2} \, p_{11}^2 \} \cong 0.951$

e) $p_0^j(\lambda_j = 0.98)$

Caso $j=0$: $p_0^0 = 1$

Caso $j=1$: $p_0^1(\lambda^1 = \bar{\lambda}_1) = 0.96\{(0.98)^{-2}\ p_{11}\} \cong 0.8$

Caso $j=2$: $p_0^2(\lambda^2 = \bar{\lambda}_1) = 0.96^2\{(1.03 \times 0.98)^{-2}\ p_{12}\,p_{21} + (0.98)^{-4}\ p_{11}^{\,2}\} \cong 0.67$

f) $p_0^j(\lambda^j = 1.03)$

Caso $j=0$: $p_0^0 = 0$, λ_0 é dado e $\neq \bar{\lambda}_2 = 1.03$

Caso $j=1$: $p_0^1(\lambda^1 = \bar{\lambda}_2) = 0.96\{1.03^{-2}\ p_{12}\} \cong 0.181$

Caso $j=2$: $p_0^2(\lambda^2 = \bar{\lambda}_2) = 0.96^2\{(1.03)^{-4}\ p_{12}\,p_{22} + (0.98 \times 1.03)^{-2}\ p_{11}\,p_{12}\} \cong 0.284$

g) Como esperado, $p_0^j = p_0^j(\lambda^j = \bar{\lambda}_1) + p_0^j(\lambda^j = \bar{\lambda}_2)$. Cada um dos ativos em (e) e (f) garante 1 unidade de consumo nos 2 possíveis estados para j. Combinados, eles replicam sinteticamente a característica do ativo em (d). Logo, a soma dos preços dos primeiros deve igualar o preço do segundo.

1) LS - 8.10 (Cantos)

Consumidor	Preferências	Dotação
Tipo 1	$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1$	$y_t^1 = \mu > 0$
Tipo 2	$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^2)$	$y_t^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 0 \text{ é par} \\ \alpha & \text{se } t \geq 0 \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\alpha = \mu(1 + \beta^{-1})$

Obs.: Utilidade do Tipo 1 não é estritamente côncava!

(i) Problema do tipo 2:

$$\max_{c_t^2} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^2)$$

$$\text{s.t.} \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t)\, c_t^2(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s_t)\, y_t^2(s_t)$$

C.P.O.: $\beta^t / c_t^2 = \lambda_i^2\, q_t^0(s^t)$

Normalização: $q_0^0(\lambda_0) = 1$

$$\Rightarrow \lambda_i^2 = 1/c_0^2 \quad \Rightarrow \quad q_0^t(s^t) = \beta^t \left(\frac{c_t^2}{c_0^2}\right)^{-1}$$

($\lambda_2^i > 0 \Rightarrow$ RO vale em igualdade)

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t)\, c_t^2(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s_t)\, y_t^2(s_t)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{\cancel{c_t^2}}{\cancel{c_0^2}}\right)^{-1} \cancel{c_t^2}(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^2}{\cancel{c_0^2}}\right)^{-1} y_t^2(s_t)$$

Soma de PG ∞

Sabemos como y_t^2 se comporta, vamos "quebrar" o somatório em períodos ímpares e pares:

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \left(c_{2t+1}^2\right)^{-1} \mu(1+\beta^{-1}) + \cancel{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} \left(c_{2t}^2\right)^{-1}}(0)$$

Sabemos, porém, mais sobre este problema. Utilidades como esta suavizam consumo no tempo, não gostam de volatilidade.

$\Rightarrow c_t^2 = \bar{c}^2 \;\; \forall t$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \left(\bar{c}^2\right)^{-1} \mu \left(1+\beta^{-1}\right) \Rightarrow \frac{\bar{c}^2}{1-\beta} = \mu \frac{(1+\beta)}{\cancel{\beta}} \cancel{\beta} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} = \mu \frac{(1+\beta)}{1-\beta^2} \Rightarrow \bar{c}^2 = \mu \frac{\cancel{(1-\beta)(1+\beta)}}{\cancel{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow c_t^2 = \mu \quad \forall t$$

Dado o conjunto de recursos da economia, essa solução é factível.
Encontramos que ela é a desejada pelos indivíduos do tipo 2.
Precisamos verificar se ela é desejada/aceita pelos indivíduos do tipo 1.

(ii) Problema do tipo 1:

Condição de participação do mercado:

$$U^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1 \geq \frac{\mu}{1-\beta} = A$$

Qualquer alocação de c_t^1 que gere $U^1 \geq A$ é aceitável.
Para que tipo 2 consuma μ em todos os períodos, $c_t^1 = 0$ para todo t par. "Quebrando" o somatório:

$$U^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} (0) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \mu (1+\alpha) = \frac{\beta \mu (1+\alpha)}{1-\beta^2} \geq \frac{\mu}{1-\beta}$$

A alocação ideal do tipo 2 é aceita por tipo 1 se: $\frac{\beta \cancel{\mu} (1+\alpha)}{1-\beta^2} \geq \frac{\cancel{\mu}}{1-\beta} \Leftrightarrow \alpha \geq \beta^{-1}$

Portanto, se o agente do tipo 2 remunerar o tipo 1 em $\mu \beta^{-1}$ em todos os períodos ímpares, sua alocação ideal nos períodos pares é aceita. Além disso, isto lhe deixa a quantia necessária para sustentar justamente sua alocação ideal nos períodos ímpares. Logo, a alocação de equilíbrio é:

$$c_t^1 = \begin{cases} 0 & , t \geq 0 \text{ par} \\ \mu (1+\beta^{-1}) & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases} \qquad c_t^2 = \mu \quad \forall t$$

$$b_t^1 = \begin{cases} -\mu & , t \geq 0 \text{ par} \\ \mu \beta^{-1} & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases} \qquad b_t^2 = \begin{cases} \mu & , t \geq 0 \text{ par} \\ -\mu \beta^{-1} & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$$

Preços de Equilíbrio:

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \left(\frac{\mu}{\mu}\right)^{-1} = \beta^t$$

c) Riqueza = preço × dotação em V.P.

$$W^1 = \frac{\mu}{1-\beta}$$

$$W^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t}(0) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \mu(1+\beta^{-1}) = \frac{\mu}{1-\beta}$$

d, e) O desejo por suavização permanece. Com uma riqueza maior, o natural é ele desejar maior consumo 'constante'. Mas, tendo já feito os itens anteriores, sabe-se que é impossível por factibilidade. Ele não vai conseguir $c_t^2 > \mu$ nos períodos pares. Portanto, para estes períodos, vai manter a solução dos itens anteriores, consumindo o extra nos períodos ímpares.

$$c_t^1 = \begin{cases} 0 & , t \geq 0 \text{ par} \\ \mu(1+\beta^{-1}) & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases} \qquad c_t^2 = \begin{cases} \mu & , t \geq 0 \text{ par} \\ \alpha - \mu\beta^{-1} & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$b_t^1 = \begin{cases} -\mu & , \\ \mu\beta^{-1} & , \end{cases} \qquad b_t^2 = \begin{cases} \mu & , \\ -\mu\beta^{-1} & , \end{cases}$$

$$q_0^t = \begin{cases} \beta^t & , t \geq 0 \text{ par} \\ \beta^t \mu(\alpha - \mu\beta^{-1})^{-1} & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases} \qquad R_t = \begin{cases} \beta^{-t} & , t \geq 0 \text{ par} \\ (\alpha/\mu)\beta^{-t} - \beta^{1-t} & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$$

2) Preferências $U_0 = \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} \right\}$

$\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ i.i.d.

R.O. : $c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) \leq s_t y_t$

Equilíbrio: $c_t = y_t, \quad s_t = 1 \quad \forall t$

a) Variáveis de Estado: $\begin{cases} \text{individual} : s \\ \text{agregado} : y \end{cases}$

Variáveis de Controle : c

$$V(s,y) = \max_c \left\{ \frac{(c^{1+\gamma}-1)}{1-\gamma} + \beta \mathbb{E}[V(s',y')|y] \right\}$$
$$\text{s.t. } c = sy - p(s'-s)$$

C.P.O. : $[s']$ $\quad p c^{-\gamma} = \beta \mathbb{E}[V_1(s',y')|y]$

Envelope: $V_1(s,y) = c^{-\gamma}(y+p)$
$\quad V_1(s',y') = c'^{-\gamma}(y'+p')$

$$\Rightarrow 1 = \beta \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{c'}{c}\right)^{-\gamma} \left(\frac{y'+p'}{p}\right) \Bigg| y \right\}$$ Equação de Euler

b) Equilíbrio Recursivo:

① Função Valor: $V(s,y)$

② Regras de decisão do A.R. : $c=y, \; s'=1$

③ Função Preço : Equação de Euler

c) Em equilíbrio, equação de Euler:

$$1 = \beta \, \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{y'}{y}\right)^{-\gamma} \left(\frac{y' + p'}{p}\right) \Bigg| \, y \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_t = \beta \, \mathbb{E}\left\{ \frac{y_{t+1}^{1-\gamma} + y_{t+1}^{-\gamma} p_{t+1}}{y_t^{-\gamma}} \Bigg| \, y_t \right\}}$$

d) $$y_t^{-\gamma} p_t = \beta \, \mathbb{E}_t\left[y_{t+1}^{1-\gamma}\right] + \beta \, \mathbb{E}_t\left[y_{t+1}^{-\gamma}\right] L^{-1} p_t$$

$$\Rightarrow \left(1 - \beta \left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{-\gamma} L^{-1}\right) y_t^{-\gamma} p_t = \beta \, \mathbb{E}_t\left[y_{t+1}^{1-\gamma}\right]$$

$$\Rightarrow p_t = \left(\frac{1}{1 - \beta \left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{-\gamma} L^{-1}}\right) \beta \, \mathbb{E}_t\left[\frac{y_{t+1}^{1-\gamma}}{y_t^{-\gamma}}\right]$$

$$\Rightarrow p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \, \mathbb{E}\left[\frac{y_{t+j}^{1-\gamma}}{y_t^{-\gamma}}\right] + \lim_{j \to \infty} \beta^j \, \mathbb{E}\left[\left(\frac{y_{t+j}}{y_t}\right)^{-\gamma} p_{t+j}\right]$$

Em equilíbrio, $s_t = 1 \ \forall t$. Logo, $\lim_{j \to \infty} \beta^j \, \mathbb{E}\left[\left(\frac{y_{t+j}}{y_t}\right)^{-\gamma} p_{t+j}\right] = 0$, c.c., bolha, preço $\neq$ fundamento

e) $$p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \, \mathbb{E}\left[\frac{y_{t+j}^{1-\gamma}}{y_t^{-\gamma}}\right] \Rightarrow y_t^{-\gamma} p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \, \mathbb{E}\left[y_{t+j}^{1-\gamma}\right]$$

$$\Rightarrow y_t^{-\gamma} p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \exp\left\{(1-\gamma)\mu + \tfrac{1}{2}(1-\gamma)^2 \sigma^2\right\}$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{\exp\left\{(1-\gamma)\mu + (1/2)(1-\gamma)^2\sigma^2\right\} \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j}{y_t^{-\gamma}} = \frac{\beta \exp\left\{(1-\gamma)\mu + (1/2)(1-\gamma)^2\sigma^2\right\}}{(1-\beta) \, y_t^{-\gamma}}$$

f) $$p_t^* = \frac{\beta \exp\left\{(1-\gamma)10\mu + (1/2)(1-\gamma)^2\sigma^2\right\}}{(1-\beta) \, y_t^{-\gamma}}$$

Processo de renda mais produtivo (árvore gera mais dividendos), portanto rende mais, preço da árvore aumenta.

3) 2 períodos: 0, 1

2 indivíduos: $i = \{X, Z\}$

Dotações iniciais: $y_0^X = y_0^Z = 1$

2 estados da natureza para período 1: s_A, s_B $\begin{cases} y_1^X(s_A) = 1+\sigma; \; y_1^Z(s_A) = 1-\sigma \\ y_1^X(s_B) = 1-\sigma; \; y_1^Z(s_B) = 1+\sigma \end{cases}$

2 ativos contingentes: b_A paga 1 unidade de consumo em $t=1$ se s_A e 0 c.c.

b_B paga 1 unidade de consumo em $t=1$ se s_B e 0 c.c.

R.O.s: $c_0^i + q_A b_A^i + q_B b_B^i = y_0 = 1$

$c_1^i(s_A) = y_1^i(s_A) + b_A^i$

$c_1^i(s_B) = y_1^i(s_B) + b_B^i$

$\pi(s_A) = \pi(s_B) = 1/2$

$$U^i = \ln c_0^i + \beta E[\ln c_1^i] = \ln c_0^i + \beta(1/2)\{\ln(c_1^i(s_A)) + \ln(c_1^i(s_B))\}$$

a) Problema do indivíduo i:

$$\max_{c_0^i, c_1^i, b_A^i, b_B^i} \ln c_0^i + \beta/2\{\ln(c_1^i(s_A)) + \ln(c_1^i(s_B))\}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} c_0^i = 1 - q_A b_A^i - q_B b_B^i \\ c_1^i(s_A) = y_1^i(s_A) + b_A^i \\ c_1^i(s_B) = y_1^i(s_B) + b_B^i \end{cases}$$

C.P.O.: $[b_A^i]$ $\frac{1}{c_0^i} q_A = \beta/2 \; \frac{1}{c_1^i(s_A)}$

$[b_B^i]$ $\frac{1}{c_0^i} q_B = \beta/2 \; \frac{1}{c_1^i(s_B)}$

Somar restrição de $t=1$ entre indivíduos: $c_1^X(s_A) + c_1^Z(s_A) = 2 + b_A^X + b_A^Z$

$c_1^X(s_B) + c_1^Z(s_B) = 2 + b_B^X + b_B^Z$

Por factibilidade: $c_1^X(s_A) + c_1^Z(s_A) = 2$ Logo, $b_A^X + b_A^Z = 0$

$c_1^X(s_B) + c_1^Z(s_B) = 2$ $\quad b_B^X + b_B^Z = 0$

Por factibilidade, também se tem que $c_0^X + c_0^Z = 2$ (sem desperdício)

b) Da C.P.O.: $c_1^i(s_A)\, q_A = \beta/2\; c_0^i$

$c_1^i(s_B)\, q_B = \beta/2\; c_0^i$

Somando para ambos indivíduos:

$$\begin{cases} q_A\left[c_1^X(s_A) + c_1^Z(s_A)\right] = \beta/2\left[c_0^X + c_0^Z\right] \\ q_B\left[c_1^X(s_B) + c_1^Z(s_B)\right] = \beta/2\left[c_0^X + c_0^Z\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_A = \beta/2 \\ q_B = \beta/2 \end{cases}$$

c) Comprando uma unidade de cada ativo contingente, tem-se um ativo artificial que paga uma unidade de consumo em $t=1$ independente se $s = s_A \vee s_B$. Logo, tem-se um ativo sem risco. O preço deste ativo deve, por arbitragem, ser equivalente à soma dos preços dos ativos contingentes, i.e., $p = q_A + q_B = \beta$

d) Problema do agente i: $\max\limits_{c_0^i, c_1^i, b^i} \; \ln c_0^i + \beta/2\left\{\ln(c_1^i(s_A)) + \ln(c_1^i(s_B))\right\}$

$$\text{s.t.} \begin{cases} c_0^i + q b^i = 1 \\ c_1^i(s_A) = y_1^i(s_A) + b^i \\ c_1^i(s_B) = y_1^i(s_B) + b^i \end{cases}$$

C.P.O.: $[b^i]$ $\quad q/c_0^i = \beta/2\left\{1/c_1^i(s_A) + 1/c_1^i(s_B)\right\}$

Factibilidade: $c_0^X + c_0^Z = 2$

$c_1^X(s_A) + c_1^Z(s_A) = 2$

$c_1^X(s_B) + c_1^Z(s_B) = 2$

$\Rightarrow \quad b^X + b^Z = 0$

e) Note que $b^X = -b^Z$. Porém, como as preferências dos indivíduos são idênticas, se X deseja $b^X < 0$, Z deseja $b^Z < 0$ e vice-versa. Logo, em equilíbrio, $b^X = b^Z = 0$. (não conseguem dividir risco idiossincrático).

f) Da (e): $c_0^i = y_0^i$, $c_1^i(s_A) = y_1^i(s_A)$, $c_1^i(s_B) = y_1^i(s_B)$ $\forall i = X, Z$. Na equação de Euler: $q = (\beta/2)\left\{\frac{1}{1+\sigma} + \frac{1}{1-\sigma}\right\}$ $\Rightarrow q = \frac{\beta}{1-\sigma^2}$. Comparando q com $p = \beta$ (da (c)), nota-se a diferença no preço do ativo livre de risco entre mercados completos e incompletos: $\sigma \in (0,1) \Rightarrow q > p$.

4) a) V.C.: $c_t^{ah}, c_t^{al}, c_t^{bh}, c_t^{bl}$

$$\max_{vc} -0.5\left(\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t/2\left(1/c_t^{ah}+1/c_t^{al}\right)\right)-0.5\left(\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t/2\left(1/c_t^{bh}+1/c_t^{bl}\right)\right)-\sum_{t=0}^{\infty}\gamma_t\left(c_t^{ah}+c_t^{bh}-2\right)-\sum_{t=0}^{\infty}\mu_t\left(c_t^{al}+c_t^{bl}-2\right)$$

C.P.O.: $[c_t^{ah}]\ \beta^t/4\,(c_t^{ah})^{-2}=\gamma_t \qquad [c_t^{al}]\ \beta^t/4\,(c_t^{al})^{-2}=\mu_t$

$[c_t^{bh}]\ \beta^t/4\,(c_t^{bh})^{-2}=\gamma_t \qquad [c_t^{bl}]\ \beta^t/4\,(c_t^{bl})^{-2}=\mu_t$

R.R.: $\left.\begin{matrix} c_t^{ah}+c_t^{bh}=2 \\ c_t^{al}+c_t^{bl}=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{c_t^{ai}=c_t^{bi}=1}$ $\forall i=\{h,l\}$ alocação de equilíbrio.

b) Tome o caso do indivíduo com maior renda no período t ($\exists$ pelo menos 1 com maior renda $\forall t$).

Neste caso, a utilidade deste sob o P.C. é:

$$V_{PC}^{U}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(-1)=-\frac{1}{1-\beta}$$

Já caso ele opte por viver em autarquia:

$$V_A^U=-\frac{1}{1+\phi}-\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\beta^{t+1}}{2}\left\{\frac{1}{1+\phi}+\frac{1}{1-\phi}\right\}=-\left\{\frac{1}{1+\phi}+\frac{\beta}{1-\phi^2}\left(\frac{1}{1-\beta}\right)\right\}=-\left\{\frac{(1+\phi)^{-1}(1-\beta)+\beta(1-\phi^2)^{-1}}{1-\beta}\right\}$$

O contrato não é implementável se $V_{PC}^U<V_A^U$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\cancel{1-\beta}}<-\left\{\frac{(1+\phi)^{-1}(1-\beta)+\beta(1-\phi^2)^{-1}}{\cancel{1-\beta}}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 1>\frac{1-\beta}{1+\phi}+\frac{\beta}{1-\phi^2}\Leftrightarrow \cancel{1}-\cancel{\phi^2}-\cancel{\beta}+\beta\phi^2+\cancel{\beta}+\beta\phi<\cancel{1}+\phi-\cancel{\phi^2}-\phi^3\Leftrightarrow \beta<\frac{1-\phi^2}{1+\phi}$$

Avaliando na calibragem dada: $\beta=0.5,\ \phi=0.4 \Rightarrow \quad 0.5<\frac{0.84}{1.4}=0.6$ ✓. Logo, não é implementável.

c) Pela nova alocação sob o P.C., volta-se à utilidade sob tais condições para um indivíduo de renda alta em um período $t\geq 1$:

$$V_{PC}^{U'}=-\frac{1}{1+\varepsilon}-\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\beta^{t+1}}{2}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\frac{1}{1-\varepsilon}\right\}=-\left\{\frac{(1+\varepsilon)^{-1}(1-\beta)+\beta(1-\varepsilon^2)^{-1}}{1-\beta}\right\}$$

Condição 1 p/ implementação : $V_{pc}^{U'} \geq V_A^{U'}$

$\beta = 0.5$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{1}{1+\phi} + \frac{1}{1-\phi^2} \qquad \phi = 0.4 \Rightarrow \varepsilon \in [0.125, 0.4]$$

Condição 2 de implementação :

$\beta = 0.5$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{1}{1-\phi} + \frac{1}{1-\phi^2} \qquad \phi = 0.4 \Rightarrow \varepsilon \in [-0.75, 0.4]$$

$$\Rightarrow \varepsilon \in [0.125, 0.4]$$

$$\max_{\varepsilon} -1/2 \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t/2 \left[\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{1+\varepsilon} \right] + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t/2 \left[\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \right] \right\} \Leftrightarrow \max_{\varepsilon} -1/2 \left\{ \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \right\}$$

s.t. $\varepsilon \in [0.125, 0.4]$ s.t. $\varepsilon \in [0.125, 0.4]$

$$\Leftrightarrow \min_{\varepsilon} \frac{1}{1-\varepsilon^2} \qquad \Rightarrow \varepsilon = 0.125$$

s.t. $\varepsilon \in [0.125, 0.4]$

d) $\beta = 0.5$, $\phi = 0.45$

Condição 1: $V_{pc}^{U'} \geq V_A^{U}$ $\Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{1}{1.45} + \frac{1}{0.7975} \Rightarrow \varepsilon \in [0.0645161, 0.45]$

Condição 2: $V_{pc}^{D'} \geq V_A^{D'}$ $\Rightarrow \frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{1}{0.55} + \frac{1}{0.7975} \Rightarrow \varepsilon \in [-0.077551, 0.45]$

$\Rightarrow \varepsilon = 0.0645161$

$$\beta = \phi = 0.5 \qquad \left.\begin{array}{l} C1)\ \varepsilon \in [0, 0.5] \\ C2)\ \varepsilon \in [-0.8, 0.5] \end{array}\right\} \varepsilon = 0$$

e) Quanto mais volátil a distribuição da renda sob autarquia, menor a compensação necessária p/ que o indivíduo não abandone a sociedade (aversão ao risco).