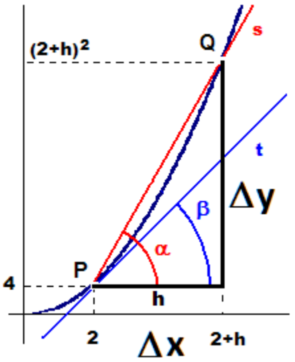
O Conceito de Derivada – Uma visão pragmática

INTRODUÇÃO

Considere a função $y = f(x) = x^2$, cujo gráfico é a parábola esboçada na figura abaixo. Acompanhe a estratégia a seguir para determinar o coeficiente angular da reta **t**, tangente à parábola no ponto **P**(2; 4).

Sendo **P** o ponto (2; 4) e **Q** o ponto de abscissa 2+h, considere a reta secante à parábola que passa pelos pontos P e Q. Como $y = x^2$, a ordenada de Q vale, naturalmente, $(2+h)^2$.



Assim, o coeficiente angular da reta secante PQ vale

$\mathbf{m_s} = \text{tg}\,\alpha = \Delta y/\Delta x$

$$\mathbf{m_s} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$\mathbf{m_s} = \frac{(4+4h+h^2)-4}{h} = 4+h$$

Assim, o coeficiente angular da reta secante PQ é $\mathbf{m_s} = 4 + h$, qualquer que seja **h**.

Observe que à medida que **h** diminui (em módulo), é fácil perceber que *mais e mais* a reta secante **s** se aproxima da reta tangente **t** (β se aproxima de α).

Quanto menor o valor de h (em módulo) mais e mais $\mathbf{m_s}$ *se aproxima de* $\mathbf{m_t}$.

Dizemos que $\mathbf{m_t}$ é o valor limite do qual se aproxima $\mathbf{m_s}$ quando *h tende a 0*... (ou seja, quando Q se aproxima de P) e escrevemos:

$$\mathbf{m_t} = \lim_{h\to 0} m_s$$

É simples perceber que, quando h se aproxima de 0, a expressão 4 + h se aproxima de mais e mais de 4. Escrevemos:

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

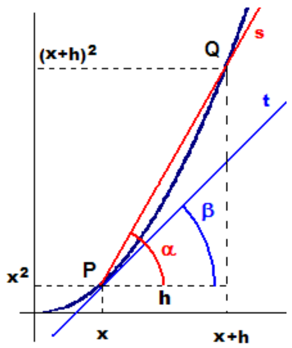
Assim, considerando que a reta **t** passa pelo ponto (2; 4) e possui coeficiente angular 4, sua equação é imediata:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-4}{x-2} = 4 \;\Rightarrow\; y - 4 = 4\,(x-2) \;\Rightarrow\; t: y = 4x - 4$$

GENERALIZANDO

Dada a mesma função $y = f(x) = x^2$, determinemos uma expressão **m**(x) que associa a cada valor de x o coeficiente angular da reta tangente à parábola no ponto de abscissa x. Vejamos:

Considere os pontos P e Q, de abscissas x e x+h, respectivamente: o coeficiente angular da reta PQ vale:



$$\mathbf{m_s} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\mathbf{m_s} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x+h$$

Observe que se h se aproxima de zero, $\mathbf{m_s}$ se aproxima de **m(x)**, o coeficiente angular da reta tangente à parábola no ponto de abscissa x. Escrevemos:

$$m(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

Então, a função m(x), que explicita o coeficiente angular da reta tangente à função $y = x^2$, no ponto de abscissa x é m(x) = 2x.

A função m(x) decorre da função f, ou seja, deriva de f(x), é conseqüência de f(x) através de um processo *limite* e por esta razão é denominada *função derivada de f* ou simplesmente *derivada de f* e é indicada por f' (f *linha*).

CONCEITO GEOMÉTRICO DE DERIVADA

A *função derivada* de uma função **f**, ou simplesmente a *derivada* de **f**, é a função designada por **f'** (f linha) que associa a cada valor de **x** o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa x, quando tal reta tangente existir... Ou seja, $f'(x) = m_t(x)$...

EXEMPLOS (1)

E1. Determine em qual de seus pontos a *parábola* $y = x^2$ admite reta tangente ao gráfico com ângulo de *45º* com o eixo Ox.

Solução

Ora, como o coeficiente angular da reta tangente à parábola no ponto de abscissa x é dado por f'(x) = m(x) = 2x, segue-se que:

tg 45º = 1 $\Rightarrow$ m(x) = 1 $\Rightarrow$ 2x = 1 $\Rightarrow$ x = 1/2 $\Rightarrow$ y = $(1/2)^2$ = 1/4

Logo, o ponto no qual a reta tangente faz 45º é (1/2;1/4).

E2. Usando a interpretação geométrica de derivada perceba que:

a) a função derivada de uma função constante f(x) = c, c real, é a função identicamente nula: f'(x) = 0 , qqs x.

b) a função derivada de uma função linear da forma y = f(x) = ax + b é constante e igual a **a**.

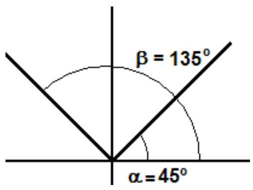
Solução

Em primeiro lugar observemos que o primeiro item é caso particular do segundo (quando *a = 0*); o gráfico das funções, em ambos os casos, é uma reta (no primeiro caso, horizontal...).

Ora, considerando que a reta tangente a uma reta, em qualquer de seus pontos é a própria reta, decorre que a *função derivada* desejada é a função constante cujo valor é igual ao coeficiente angular da reta...

Ou seja, f'(x) = 0, no primeiro caso (porque a=0) e f'(x) = a no segundo caso (porque o coeficiente angular da reta é a...)...

E3. Explicite a função derivada da função f(x) = | x |.



Solução.

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{se } x < 0 \\ x, \text{ se } x \ge 0 \end{cases}.$$

Observe f'(x) NÃO é definida para x=0, pois não é possível *equilibrar uma reta tangente ao gráfico de f em x = 0*.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, \text{se } x < 0 \,(\textit{porque } \alpha = 135° \textit{ e tg } 135° = -1) \\ +1, \text{ se } x > 0 \,(\textit{porque } \beta = 45° \textit{ e tg } 45° = +1) \end{cases}$$

Este exemplo mostra que o domínio da função f' pode não ser igual ao domínio da função f... pois neste caso, por exemplo, f não possui tangente em x = 0.

E4. Mostre que se $f(x) = x^3$, então **f'**$(x) = 3x^2$

Solução

Vejamos: o coeficiente angular da reta (*secante*) ao gráfico de **f** que passa pelos pontos de abscissas x e x+h é dado por:

$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h}$$

$$m_s = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + h(3x+h)$$

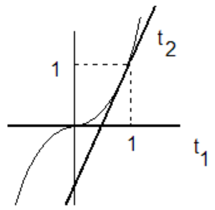
Quando h tende a zero, a expressão entre parênteses se aproxima de zero e, então, $m_t = \lim_{h\to 0} m_s = 3x^2$.

Assim, se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$.

E5. Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^3$ nos pontos de abscissa x = 0 e x = 1.

Solução

A função derivada de f é dada por **f'**$(x) = 3.x^{3-1} = 3x^2$. Logo, os coeficientes angulares das retas t_1 e t_2, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissa x = 0 e x = 1 valem:



$m_1 = f'(0) = 3.0^2 = 0$
$m_2 = f'(1) = 3.1^2 = 3$

Os pontos do gráfico são $(0;0^3) = (0;0)$ e $(1;1^3) = (1;1)$. Logo as equações de t_1 e t_2 são:

t_1: $y - 0 = 0.(x - 0) \Rightarrow t_1$: $y = 0$ (eixo x)
t_2: $y - 1 = 3.(x - 1) \Rightarrow t_2$: $y = 3x - 2$

Veja o gráfico de f. Observe que t_2 intercepta o eixo vertical em y = -1 (faça x=0 em sua equação) e intercepta o eixo horizontal em x = 2/3 (faça y = 0). Note, também, que a função cúbica $y = x^3$ possui uma *tangente* horizontal em x=0 (t_1), muito embora neste ponto (0;0) não exista um máximo ou mínimo como ocorre tipicamente nas parábolas...

E4. Mostre que se $f(x) = x^n$ $(n \geq 2)$, então **f'**$(x) = n.x^{n-1}$

Solução

Vejamos: o coeficiente angular da reta (*secante*) ao gráfico de **f** que passa pelos pontos de abscissas x e x+h é dado por:

$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$m_s = \frac{(x^n + nx^{n-1}.h + ...) - x^n}{h} = nx^{n-1} + h.\left[\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + ...\right]$$

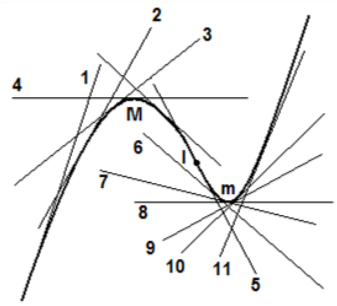
Como h multiplica a expressão entre colchetes, quando h tende a zero, temos: $m_t = \lim_{h\to 0} m_s = n.x^{n-1}$.

DESAFIO: ENTENDA...

Considere o esboço a seguir do gráfico de uma função e analise as considerações geométricas indicadas:

<u>Intervalos onde uma função é crescente ou decrescente</u>

– nos intervalos onde a função é crescente, a inclinação da reta tangente (seu ângulo), está entre 0 e 90º; como conseqüência, a tangente de tal ângulo é positiva ou nula, ou seja: **f'**$(x) \geq 0$; veja na figura, sucessivamente, as retas 1, 2, 3 e 4, bem como 8, 9, 10 e 11.



– nos intervalos onde uma função é decrescente, a inclinação da reta tangente está entre 90º e 180º; como conseqüência, a tangente é negativa ou nula, ou seja: $f'(x) \leq 0$; veja as retas 4, 5, 6, 7 e 8.

Se uma função possui função derivada definida em um intervalo: f é crescente $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ f é decrescente $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$

<u>Pontos onde a função admite Pontos Extremos</u>

– os pontos de máximo (M) e mínimo (m) correspondem a pontos onde a reta tangente é horizontal , ou seja: $f'(x) = 0$; entretanto, a recíproca não é verdadeira: a função cúbica, ou seja, $f(x) = x^3$ possui derivada igual a zero para x = 0; é um exemplo onde $f'(x) = 0$, sem que o ponto (0; 0) seja ponto de máximo ou de mínimo.

<u>Pontos de Inflexão de uma função</u>

– Observe que o coeficiente angular das retas tangentes vai diminuindo sucessivamente nas retas 1 a 5 (passando inclusive de positivo para negativo) e atinge um valor mínimo no ponto **I** (onde é negativo); a seguir, começa a crescer nas retas 6 a 11 (passando também de negativo para positivo); esta situação corresponde ao conceito de *concavidade* (estudado superficialmente em trinômios do segundo grau. na 8ª série, lembra?*)*. Há várias maneiras intuitivas (e meio esquisitas) de entender o conceito de concavidade. Aí vão algumas:
  - "*Para onde aponta o <u>buraco</u> do gráfico*": "*buraco*" para baixo, concavidade negativa; para cima, concavidade positiva. Entendeu? Pense nos trinômios $y = ax^2+bx+c$ onde sabemos que se a > 0, a concavidade é positiva ("*buraco*" para cima) e se a < 0; ("*buraco*" para baixo).
  - Se o gráfico é <u>*convexo*</u> (para quem olha de cima para baixo), a concavidade é negativa; se o gráfico é <u>*côncavo*</u> (ainda para quem olha de cima para baixo), a concavidade é positiva.

Tecnicamente, tente perceber que a concavidade de uma curva se caracteriza pelo fato da inclinação da reta tangente atingir um valor máximo ou um mínimo em suas *proximidades*: o ângulo da reta tangente cresce num determinado intervalo, atinge um máximo e começa a decrescer (ou vice-versa).

Analise, com atenção, o gráfico da função ***seno***, onde $x = k\pi$ corresponde a seus pontos de inflexão (e também suas raízes)...

OLHANDO PRÁ FRENTE…

Considerando que já sabemos determinar a função derivada da função $f(x) = x^n$ (onde n>1) é interessante verificar se já seria possível determinarmos a *derivada* de uma função polinomial...

Por exemplo, dado o polinômio $p(x) = 6x^4 + 3x^2 + 7$, como intuir uma forma de determinar sua (função) *derivada*?

Parece razoável supor que a *derivada da <u>soma de duas funções</u>* é igual à *<u>soma das derivadas das funções parcelas</u>.*

Naturalmente que isto equivaleria a dizer que quando somamos duas funções, o coeficiente angular da reta tangente a seu gráfico pode ser calculado *somando-se* os coeficientes angulares das funções parcelas (ou o que é o mesmo*: a derivada da soma é a soma das derivadas*...) [1].

E será que a derivada de *um múltiplo de uma função* é simplesmente tal múltiplo *vezes* a derivada da função?

Na verdade, tais *propriedades* são realmente verdadeiras e facilitam extremamente a determinação das *derivadas* de funções expressas a partir de outras funções mais simples, como os polinômios (adiante explicitaremos formalmente estas e outras *propriedades*).

Então, a acreditar nas duas *propriedades* mencionadas, podemos escrever:

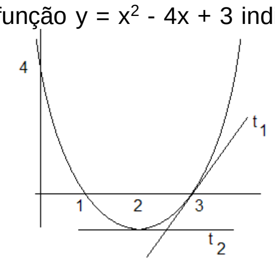
$p'(x) = (6x^4 + 3x^2 + 7)'$ $\quad p'(x) = (6x^4)' + (3x^2)' + (7)'$

$p'(x) = 6(x^4)' + 3(x^2)' + 0$ $\quad p'(x) = 6.(4.x^{4-1}) + 3.(2.x^{2-1})$

$p'(x) = 24.x^3 + 6.x$

EXEMPLOS (2)

E5. Determine a função derivada da função $y = x^2 - 4x + 3$ indicando as equações das retas tangentes a seu gráfico nos pontos de abscissas $x = 2$ e $x = 3$.



Solução

Acompanhe a discussão apenas qualitativa e gráfica que se segue:

O gráfico da função é uma parábola que intercepta o eixo dos x em 1 e 3 (suas raízes) e o eixo dos y em y = 4.

É simples perceber que como o trinômio admite um valor mínimo para x = 2 (x = -b/2a), neste ponto a reta tangente é horizontal e seu coeficiente angular é igual a zero,

Também é fácil perceber que na região próxima a x = 3, a parábola é crescente: logo, a reta tangente forma um ângulo entre 0 e 90º; então a tangente é positiva e tem pinta de ser maior do que 1, pois parece que sua inclinação é maior do que 45º.

Calculemos, então, algebricamente, a derivada da função dada:

$y' = (x^2 - 4x + 3)' = (x^2)' - (4x)' + (3)'$

$y' = (x^2 - 4x + 3)' = (x^2)' - (4x)' + (3)' = 2x^{2-1} - 4 = 2x - 4$

Como era de se esperar, para x = 2, temos $m_t = f'(2) = 0$. Veja a reta t_2 na figura:

$t_2 : y = -1$ (a ordenada do vértice da parábola, ou seja, f(2)).

Para x = 3, obtemos:

$m_t = f'(3) = 2.3 - 4 = 2$

Logo, a equação da reta t_1, tgt à parábola no ponto (3, 0) é:

$y - y_0 = m(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 0 = 3(x - 3) \;\Rightarrow\; y = 3x - 9$

E6. Dada a função $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$, determine:

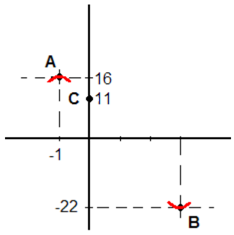
a) a função derivada;
b) os intervalos onde a função é crescente e decrescente, bem como seus máximos e mínimos;
c) Um esboço do gráfico da função.

Solução

a) $y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 11)' \;\Rightarrow\; y' = (x^3)' - (3x^2)' - (9x)' + (11)'$
$\Rightarrow y' = 3x^2 - 3(2x) - 9 \quad y' = 3x^2 - 6x - 9 \quad y' = 3(x^2 - 2x - 3)$

b) A função será crescente onde y' for positiva e decrescente onde y' for negativa. Além disso, se a função for *bem comportada*, em seus pontos de *máximo e mínimo* as retas tangentes serão horizontais. Vejamos onde y' = 0:

$y' = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \;\Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$



Daí dois importantes pontos do gráfico de f, são:

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 11 = 16.$

$x = 3 \Rightarrow y = 3^3 - 3.3^2 - 9.3 - 11 = -22$

Analisando a expressão y', observamos que y' < 0 para x entre -1 e 3 (entre suas raízes) e y' > 0 para x fora deste intervalo.

Então, *antes* do ponto A a função é crescente; entre A e B é decrescente e após o ponto B é crescente...

Mais um ponto útil do gráfico: o ponto de interseção do gráfico com o eixo y:

$x = 0 \;\Rightarrow y = 11 \Rightarrow\;$ C(0; 11)

Com as informações já disponíveis é possível um razoável esboço do gráfico.

Finalmente, sabemos que a função dada é um polinômio do terceiro grau de coeficientes reais: portanto possuirá ou 1 ou 3 raízes reais... Um desafio final: há ponto de inflexão? Qual?

E7. Mostre que se g(x) = sen x então f'(x) = cos x.

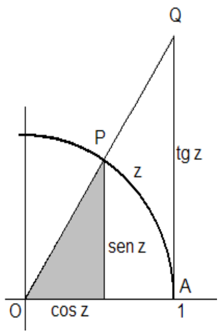
O coeficiente angular da reta secante, etc, etc é dado por:

$$m_s = \frac{sen(x+h) - senx}{h} = \frac{2.sen(h/2).\cos(x+h/2)}{h}$$

$$m_s = \frac{sen(h/2)}{h/2}.\cos(x+h/2) \qquad (1)$$

Observe que quando h se aproxima de 0 (zero), claramente *cos(x+h/2)* se aproxima de cos x (pense no fato do gráfico de cos x ser *bem comportado*); entretanto, a expressão $\frac{sen(h/2)}{h/2}$ possui um comportamento inusitado: tanto o numerador quanto o denominador se aproximam de zero à medida que <u>h</u> se aproxima de 0 !

Veja a seguir a justificativa para o fato de que o numerador e o denominador desta *fração* se aproximam de zero com <u>*idênticas velocidades*</u>, ou seja, tal expressão se aproxima de 1 quando h se aproxima de 0!



Para $z \geq 0$, observe que sen $z \leq z$ e $z \leq$ tg z (compare as áreas do setor OAP e do triângulo OAQ...).
Daí, cos $z \leq$ (sen z) /z ≤ 1. É razoável concluir, então, que quando z se aproxima de zero, o valor de $\frac{\text{sen } z}{z}$ (*espremido* entre cos z e 1), se aproxima de 1 !

Ou seja, $\lim_{z \to 0} \frac{sen\ z}{z} = 1$

Retomando a expressão anterior, temos:

$m_s = \frac{sen(h/2)}{h/2}.\cos(x+h/2)$, onde $\frac{sen(h/2)}{h/2}$ se aproxima de 1 e $\cos(x+h/2)$ se aproxima de cos x.

Logo, intuitivamente, m_s se aproxima de <u>cos x</u> , ou seja, a função derivada de g(x) = sen x é a função g'(x) = cos x.

---

[1] Será que quando h(x) = f(x) + g(x), a expressão a seguir inspiraria uma demonstração para tal *propriedade*?

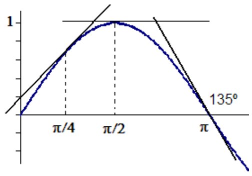
$$\frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

E8. Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de y = g(x) = sen x, para x = $\pi/4$, $\pi/2$ e π.

Solução

A função derivada de g é dada por g'(x) = cos x.

Logo, temos: g'($\pi/4$) = cos $\pi/4$ = $\sqrt{2}/2$; g'($\pi/2$) = cos $\pi/2$ = 0 e g'($\pi/4$) = cos π = -1



Logo, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico da função seno, nos pontos de abscissas $\pi/4$, $\pi/2$ e π valem, $\sqrt{2}/2$, 0 e -1.

Analise o gráfico e perceba que x = $\pi/2$ corresponde a um ponto de *máximo* e x = π corresponde a um ponto de inflexão (onde a reta tangente não é horizontal; faz 135º). Você percebe que a inclinação (coeficiente angular...) da reta tangente decresce no intervalo ($\pi/2$; π) e cresce no intervalo ($\pi/2$; π)...?

Conclua o exemplo explicitando as equações das retas tangentes solicitadas.

Propriedade Operatórias

Sejam **u** e **v** duas funções e **u'** e **v'** suas funções derivadas. Tem-se que:

a) A derivada da soma ou diferença é a soma ou diferença das derivadas, ou seja: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

b) A derivada do produto de duas funções é a soma de uma multiplicada pela derivada da outra, ou seja: $(u.v)' = u.v' + u'.v$

c) A derivada do quociente de duas funções é dada pela expressão $(u/v)' = (v.u' - u.v')/v^2$

d) A derivada de uma função elevada a um expoente $\alpha \neq 1$ é dada por: $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$

Exemplos (3)

E9. Com base nas propriedades operatórias, determine a derivada das funções indicadas:

a. $y = x^4 - 7x^3 + 2x - 5$	f. $y = \sqrt{x}$ .senx
b. $y = x^3$.sen x	g. $y = x^3/(x^2+1)$
c. $y = (x^2+1)^3$	h. $y = (x^2+1)/(x^2-1)$
d. $y = x^{2/3}$	i. y = senx / x
e. $y = \sqrt[3]{(x^3+2x+1)^2}$	

Solução

a) $y' = 4x^3 - 21x^2 + 2$

b) $y' = x^3.(\text{sen } x)' + (x^3)'.\text{ sen } x = x^3.\cos x + 3x^2.\text{ sen } x$

c) $y' = 3.(x^2+1)^{(3-1)}.(x^2+1)' = 3.(x^2+1)^2.2x = 6x.(x^2+1)^2$

d) $y' = 2/3.x^{(2/3)-1} = 2/3.x^{-1/3} = 2/(3x^{1/3})$

e) $y' = 2/3.(x^3+2x+1)^{(2/3)-1}.(x^3+2x+1)' = \dfrac{2(3x^2+2)}{3\sqrt[3]{x^3+2x+1}}$

f) $y' = \sqrt{x}.(\text{sen } x)' + (\sqrt{x})'.\text{ sen } x = \sqrt{x}.\cos x + \dfrac{\text{sen } x}{2\sqrt{x}}$

g) $y' = \dfrac{(x^2+1)'.x^3 + (x^2+1).(x^3)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x.x^3 + (x^2+1).3x^2}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{x^2.(5x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

h) $y' = \dfrac{(x^2-1).(x^2+1)' + (x^2-1)'.(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{4x^3}{(x^2-1)^2}$

i) $y' = \dfrac{x.(\text{sen } x)' + x'.\text{sen } x}{x^2} = \dfrac{x.\cos x + \text{sen } x}{x^2}$

Funções Básicas e suas *Derivadas*

Seja **u** uma função. Tem-se:

a. (sen u)' = cos u. u'	b. (cos u)' = – sen u. u'
c. $(\text{tg } u)' = \sec^2 u.u'$	d. $(e^u)' = e^u.u'$
e. (Ln u)'= u'/u	

Exemplos (4)

E10. Explicite as funções derivadas das funções indicadas:

a) $y = e^{x^2+3x-1}$	d) $y = x^3.\ e^{x^2}$
b) y = Ln(sen x)	e) y = sen(cos x)
c) $y = x.e^x$	f) $y = \text{tg}^2(x^3+1)$

Solução

a) $y' = e^{x^2+3x-1}.\ (x^2+3x+1)' = e^{x^2+3x-1}.\ (2x+3)$

b) $y' = \dfrac{(\text{sen x})'}{\text{sen x}} = \cot x$

c) $y' = x.(e^x)' + x'.e^x = x.[e^x.x'] + 1.e^x = e^x.(x + 1)$

d) $y' = x^3.\ (e^{x^2})' + (x^3)'.\ e^{x^2} = x^3.\ e^{x^2}.(x^2)' + 3x^2.e^{x^2} =$

$= x^2.e^{x^2}\ (2x^2 + 3)$

e) y' = [sen(cos x)]' = cos(cos x). [cos x]' = -sen x . cos(cos x)

f) $y' = [\text{tg}^2(x^3+1)]' = 2.\text{tg}^{2-1}(x^3+1).\sec^2(x^3+1).3x^2$

$= 6x^2.\text{tg } (x^3+1).\sec^2(x^3+1)$

Exercícios

F1. Determine uma expressão para as somas infinitas indicadas, onde |x| <1:

a) $y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + 5x^5 + ...$

b) $y = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + …$

Dica: veja que $1 + x + x^2 + x^3 + … = 1/(1-x)$, soma dos termos de uma PG com $a_1 = 1$ e q = x. Se admitirmos que sob certas condições é válido derivar ambos os lados…

F2. Explicite as funções derivadas das funções:

a) $y = (x^4 - 1).(x^4 + 1)$	b) $y = \text{sen } (x^2)$
c) $y = x^2.e^{2x}$	d) $y = e^{\text{sen } x}$
e) $y = (e^x + 1)/(e^x - 1)$	f) y = sen(cosx) + cos(sen x)
g) y = sen 2x . sen 4x	h) $y = 2^{2x+1}$
i) $y = x^{\text{senx}}$	

F3. Analise o gráfico das curvas $y = x^2$ e $y = 2^x$, investigando em quantos pontos tais curvas se intersectam, determinando as equações das retas tangentes a elas nesses pontos.