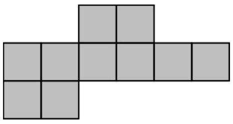
Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível J – 2020 - Respostas

3 pontos

1. A figura é formada por dez quadrados de lado 1 cm, ligados lado a lado. Qual é o perímetro da figura?



(A) 14 cm (B) 18 cm (C) 30 cm (D) 32 cm (E) 40 cm

1. Resposta: alternativa B
Cada quadrado tem perímetro 4 cm, logo a soma dos perímetros de 10 quadrados é 40 cm. Na figura, os lados que se tocam não fazem parte do perímetro, pois para cada coincidência dois lados desaparecem. Como há 11 coincidências (7 horizontais e 4 verticais), o perímetro dessa figura é 40 – 22 = 18 cm. Alternativamente, podemos contar quantos lados compõem o perímetro.

2. Quando os resultados das adições a seguir forem escritos em ordem crescente, qual soma estará no meio?

(A) $1+2345$ (B) $12+345$ (C) $123+45$ (D) $1234+5$ (E) 12345

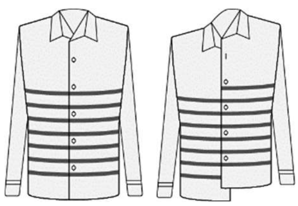
2. Resposta: alternativa D
Temos $1+2345=2346$, $12+345=357$, $123+45=168$, $1234+5=1239$.
As somas são, em ordem crescente, 168, 357, 1239, 2346 e mais o número 12345. O valor do meio é 1239.

3. Quem é a mãe da filha da mãe da mãe de Ana?

(A) A irmã de Ana. (B) A sobrinha de Ana. (C) A mãe de Ana. (D) A tia de Ana. (E) A avó de Ana.

3. Resposta: alternativa E
A mãe da mãe de Ana é a avó de Ana. Então a filha da mãe da mãe de Ana é filha da avó de Ana. A mãe da filha da avó de Ana é a avó de Ana. Logo a mãe da filha da mãe da mãe de Ana é a avó de Ana.

4. Quando Cosme usa corretamente sua nova camisa, conforme mostrado à esquerda, as listas horizontais formam sete arcos fechados ao redor de seu corpo. Nesta manhã ele abotoou sua camisa de modo errado, como mostrado à direita. Quantos arcos fechados havia ao redor do corpo de Cosme hoje de manhã?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4. Resposta: alternativa A
Com o deslocamento da lista, cada arco fechado se torna um arco aberto. O arco aberto de cima se liga com o arco aberto de baixo e o mesmo ocorre com os demais arcos, formando-se um grande arco aberto. Logo, não havia arcos fechados ao redor do corpo de Cosme.

5. Nas adições indicadas ao lado, cada letra representa um algarismo. Esses algarismos são usados para formar números de dois algarismos. Os dois números à esquerda somam 79. Qual é a soma dos quatro números à direita?

$$\begin{array}{r} \mathbf{A\,B} \\ +\,\mathbf{C\,D} \\ \hline \mathbf{7\,9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{A\,D} \\ +\,\mathbf{C\,D} \\ +\,\mathbf{A\,B} \\ +\,\mathbf{C\,B} \\ \hline ? \end{array}$$

(A) 79 (B) 158 (C) 869 (D) 1418 (E) 7969

5. Resposta: alternativa B
Vemos, na conta à esquerda, que B + D = 9 (essa soma não pode ser 19). Logo, A + C = 7. Na conta à direita, na coluna das unidades, temos D + D + B + B = 18. Na coluna das dezenas temos A + C + A + C = 14. Então, na coluna das unidades temos 8, vai 1 e na coluna das dezenas temos 4 + 1 = 5. Com o vai 1, temos 1 na coluna das centenas. O resultado da operação é 158.

6. A soma de quatro números inteiros consecutivos é 2. Qual é o menor desses números?

(A) - 3 (B) - 2 (C) - 1 (D) 0 (E) 1

6. Resposta: alternativa C
Sendo *x* o menor dos números consecutivos, temos:
$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 2 \Leftrightarrow 4x + 6 = 2 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$$

7. Os números 2020 e 1717 são ambos formados com dois números repetidos de dois algarismos. Quantos anos depois de 2020 isso acontecerá novamente?

(A) 20 (B) 101 (C) 120 (D) 121 (E) 202

7. Resposta: alternativa B
O próximo número com a propriedade descrita é 2121. Portanto, depois de 2020, o número do ano com essa propriedade acontecerá $2121 - 2020 = 101$ anos depois.

8. Maria tem dez pedaços de papel. Alguns são quadrados e os demais são triângulos. Ela corta três quadrados ao longo de uma de suas diagonais. Ela conta então o número total de vértices dos 13 pedaços que tem agora e obtém 42. Quantos triângulos ela tinha antes de fazer os cortes?

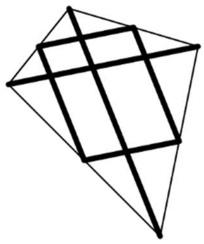
(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

8. Resposta: alternativa E

Se x é o número inicial dos triângulos e três quadrados cortados pela diagonal produzem 6 triângulos, então o número atual de triângulos é $x + 6$. O número original de quadrados é 10- x e o número atual é $10 - x - 3 = 7 - x$. Cada triângulo tem 3 vértices e cada quadrado tem 4 vértices, logo

$3(x + 6) + 4(7 - x) = 42 \Leftrightarrow 3x + 18 + 28 - 4x = 42 \Leftrightarrow -x + 46 = 42 \Leftrightarrow x = 4$. Portanto, antes de fazer o corte, Maria tinha 4 triângulos.

9. Martinho fez uma pipa com seis pedaços de uma tira fina de bambu. Dois pedaços, um de comprimento 120 cm, e outro de 80 cm, foram usados para as diagonais. Os outros quatro pedaços foram usados para conectar os pontos médios dos lados da pipa, conforme a figura. Qual era o comprimento da tira de bambu antes dos cortes?



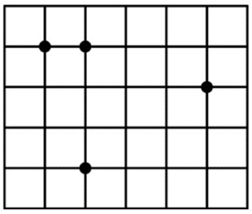
(A) 300 cm (B) 370 cm (C) 400 cm (D) 410 cm (E) 450 cm

9. Resposta: alternativa C

Em qualquer triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados tem metade do comprimento do outro lado (isso se prova com semelhança de triângulos). Assim, sobre os quatro pedaços usados para conectar os pontos médios dos lados da pipa, dois medem 60 cm e dois medem 40 cm. Logo, a tira de bambu usada para fazer a pipa media

$120 + 80 + 2 \times 60 + 2 \times 40 = 400$ cm.

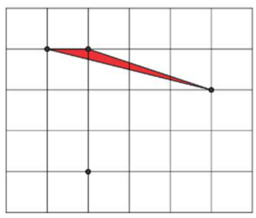
10. Quatro pontos foram marcados numa rede de quadrados de lado 1. Das possíveis regiões triangulares que podem ser obtidas com vértices em três desses pontos, uma tem a menor área. Qual é essa área?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{5}{2}$

10. Resposta: alternativa A

Para obter o triângulo de menor área devemos escolher aquele com a menor base e a menor altura possíveis. Como o menor segmento possível de obter na rede é 1, o triângulo de menor área é o indicado na figura ao lado, pois tem base 1 e altura 1 e sua área é $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.



4 pontos

11. Helena está passando 18 dias consecutivos na casa de sua avó. Sua avó lê histórias para ela nas terças-feiras, nos sábados e nos domingos, que elas chamam de *dias de história*. Como Helena gosta muito dessas leituras, em que dia ela deve chegar para garantir o maior número possível de dias de história?

(A) segunda-feira (B) terça-feira (C) sexta-feira (D) sábado (E) domingo

11. Resposta: alternativa D
A maior concentração de dias de história está na sequência de 4 dias sábado|domingo|segunda-feira|terça-feira; como 18 dias = 14 + 4 = duas semanas + 4 dias, conseguimos o máximo número de dias de história fazendo com que os quatro dias compreendam essa sequência. Sendo assim, ela deve chegar no sábado (em tempo para a avó poder ler), o que garante 12 dias de história.

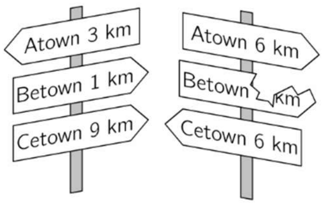
12. Os números inteiros *a*, *b*, *c* e *d* satisfazem a igualdade $ab = 2cd$. Qual dos números a seguir **NÃO** pode ser o produto $abcd$?

(A) 50 (B) 100 (C) 200 (D) 450 (E) 800

12. Resposta: alternativa B

Como $ab = 2cd$ temos $abcd = 2cdcd = 2 \cdot (cd)^2$. Portanto o produto $abcd$é o dobro do quadrado de um número inteiro. O único número que não obedece a essa regra é 100, pois $100 = 2 \cdot 50$e 50 não é quadrado de um número inteiro.

13. O caminho mais curto de Atown para Cetown passa por Betown. Indo por essa estrada de Atown para Cetown, encontramos primeiramente as placas indicativas no lado esquerdo da estrada. Mais adiante, encontramos as placas indicativas no lado direito da estrada. Qual é a distância que estava escrita na seta quebrada?



(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km

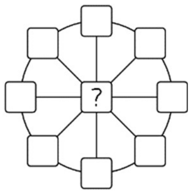
13. Resposta: alternativa B
Quando o observador olhou para as placas à esquerda, ele já tinha deixado Atown 3 km para atrás e tinha pela frente Betown a 1 km e Cetown a 9 km. Quando ele olhou as placas à direita, ele já tinha andado mais 6 – 3 = 3 km, tendo também deixado para trás Betown, a uma distância de 3 – 1 = 2 km. Logo, na placa quebrada estava escrita a distância 2 km.

14. Um triângulo isósceles tem um lado de 20 cm. Sobre os outros dois lados, sabemos que um tem comprimento igual a $\frac{2}{5}$ do comprimento do outro. Qual é o perímetro desse triângulo?

(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 60 cm (D) 90 cm (E) 120 cm

14. Resposta: alternativa B
Como o triângulo é isósceles, há dois lados com medida de 20 cm ou então dois lados com medida igual a $\frac{2}{5} \times 20 = 8$cm. Esta segunda hipótese é inaceitável, pois não pode haver um lado com medida maior do que a soma das medidas dos outros dois. Portanto, o perímetro do triângulo é $20 + 20 + 8 = 48$ cm.

15. Toninho quer numerar cada uma das nove casas da figura, de modo que a soma dos três números em cada diâmetro seja 13 e a soma dos oito números na circunferência seja 40. Toninho deve escrever qual número na casa central?



(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 10 (E) 12

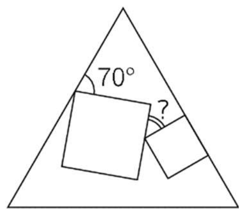
15. Resposta: alternativa A
Se a soma dos números em cada diâmetro é 13 e há quatro diâmetros, então a soma dos números nos quatro diâmetros é $4 \times 13 = 52$. Mas a soma dos números em cada diâmetro compreende os dois números escritos nas extremidades (quadradinhos) e o número central (no quadradinho com ?), logo a soma dos números nos quatro diâmetros é a soma dos oito números na circunferência mais quatro vezes o número na casa central. Logo, o número na casa central é $\frac{52-}{4} = 3$.

16. Marta escreveu um sinal de vezes entre o segundo e o terceiro algarismos do número 2020 e observou que a multiplicação 20×20 resulta um quadrado perfeito. Quantos números entre 2010 e 2099, incluindo 2020, têm essa mesma propriedade?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

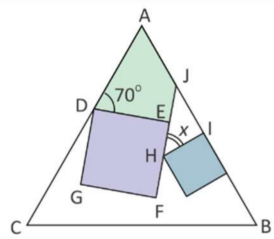
16. Resposta: alternativa C
Para que o produto $20\overline{AB}$ seja um quadrado perfeito entre 2010 e 2099, devemos ter $10 < \overline{AB} < 99$. Além disso, $20 \times \overline{AB}$ deve ser um quadrado perfeito. Como $20 = 2^2 \times 5^1$, concluímos que o número $\overline{AB}$ deve ser igual a um número quadrado perfeito x^2 multiplicado por 5 (para completar o quadrado com o fator 5).
Temos $2^2 \times 5, 3^2 \times 5$ e $4^2 \times 5$, já que $10 < \overline{AB} < 99$. Os três números com a propriedade proposta são 2020, 2045 e 2080.

17. Dois quadrados de tamanhos diferentes são desenhados no interior de um triângulo equilátero. Um dos lados de um desses quadrados cai sobre o lado do triângulo, conforme figura. Qual é a medida do ângulo assinalado com o ponto de interrogação?



(A) 25^{O} (B) 30^{O} (C) 35^{O} (D) 45^{O} (E) 50^{O}

17. Resposta: alternativa E
Prolongando o lado FE do quadrado maior, obtemos o quadrilátero AJED. Lembrando que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é 360^{O} e considerando que o triângulo ABC é equilátero, temos
$70^\circ + 60^\circ + 90^\circ + m(A\hat{J}E) = 360^\circ \Leftrightarrow m(A\hat{J}E) = 140^\circ$. No triângulo JIH, esse é um ângulo externo, de modo que $x + 90^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow x = 50^\circ$.



18. Com seu carro, Luca começou uma viagem de 520 km com 14 litros de gasolina no tanque. Seu carro faz 10 km com um litro de gasolina. Depois de andar 55 km, ele vê uma placa mostrando a distância daquele ponto a cinco postos de gasolina ao longo da estrada: 35 km, 45 km, 55 km, 75 km e 95 km. A capacidade do tanque é de 40 litros e Luca quer parar para abastecer somente uma vez. A que distância está o posto de gasolina em que ele deve parar?

(A) 35 km (B) 45 km (C) 55 km (D) 75 km (E) 95 km

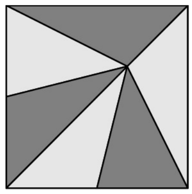
18. Resposta: alternativa D
Quando Luca vê a placa, ele ainda pode andar no máximo 140 – 55 = 85 quilômetros com a gasolina que tem. Resta viajar 520 – 55 = 465 km. Ele quer parar num posto de modo que, ao encher o tanque, ele possa acabar a viagem sem ter que colocar mais gasolina no tanque. Se ele andar *x* quilômetros até o posto, restarão 465 – *x* km para viajar. Supondo que ele encha o tanque, poderá viajar $40 \times 10 = 400$km. Portanto, $465 - x < 400 \Leftrightarrow x > 65$. Mas vimos acima que $x < 85$. Logo, ele deve parar no posto que está a 75 km de distância.

19. Seja $17x + 51y = 102$. Qual é o valor de $9x + 27y$?

(A) 54 (B) 36 (C) 34 (D) 18 (E) indeterminado

19. Resposta: alternativa A
Dividindo os termos da equação por 17 temos
$17x + 51y = 102 \Leftrightarrow x + 3y = 6$. Multiplicando por 9, temos $9x + 27y = 54$.

20. O vitral quadrado mostrado ao lado tem 81 dm^2 e é composto de seis triângulos de áreas iguais. Uma mosca está pousada exatamente no ponto onde esses seis triângulos se tocam. A que distância a mosca está da base inferior do vitral?



(A) 3 dm (B) 5 dm (C) 5,5 dm (D) 6 dm (E) 7,5 dm

20. Resposta: alternativa D
A base inferior do vitral mede $\sqrt{81} = 9$ dm e a distância da mosca a essa base é exatamente a altura do triângulo formando pelos dois triângulos cujas bases formam a base do vitral (um triângulo cinza claro e um triângulo cinza escuro). Cada dos seis triângulos tem área igual a $\frac{81}{6}$ dm^2, logo o triângulo cuja base é a base do vitral tem área $\frac{81}{6} \times 2 = 27$ dm^2. Então, se d é a distância da mosca a essa base, temos $\frac{9d}{2} = 27 \Leftrightarrow d = 6$dm.

5 pontos

21. Os algarismos de 1 a 9 são escolhidos ao acaso para formar um número de nove algarismos. Qual é a probabilidade de que esse número seja divisível por 18?

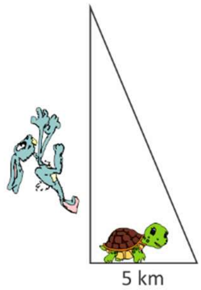
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

21. Resposta: alternativa B
Um número formado por todos os algarismos de 1 a 9 é sempre divisível por 9, pois a soma dos algarismos de 1 a 9 é 45. Para que ele seja também divisível por 2, deve terminar em algarismo par: 2, 4, 6 ou 8. Portanto, a probabilidade de que um número formado por todos os algarismos de 1 a 9 seja divisível por 18 é igual a $\frac{4 \cdot 8!}{9!} = \frac{4}{9}$.

22. Uma lebre e uma tartaruga apostam uma corrida de 5 km ao longo de uma reta. A lebre é cinco vezes mais rápida do que a tartaruga, mas ela começou mal a corrida, pois foi numa direção perpendicular à linha da corrida. Depois de um tempo, ao perceber seu erro, mudou a sua direção diretamente para o ponto de chegada. Chegou então no mesmo momento em que chegava a tartaruga. Qual é a distância entre o ponto em que a lebre mudou sua direção e o ponto de chegada?

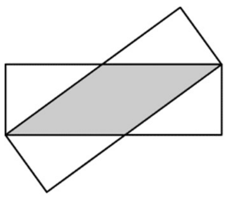
(A) 11 km (B) 12 km (C) 13 km (D) 14 km (E) 15 km

22. Resposta: alternativa C
Na figura, temos os trajetos descritos pela lebre e pela tartaruga. Como os caminhos formam um triângulo retângulo, as distâncias estão relacionadas pelo teorema de Pitágoras. A velocidade da lebre é cinco vezes a velocidade da tartaruga, logo a distância total percorrida pela lebre é 5 vezes a distância total percorrida pela tartaruga, ou seja, 25 km. Se *x* é a distância entre o ponto em que a lebre mudou de direção até o ponto de chegada, então 25 – *x* é a distância vertical percorrida. Temos:



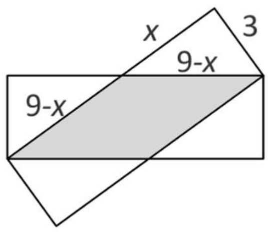
$x^2 = (25 - x)^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 625 - 50x + x^2 + 25 \Leftrightarrow 50x = 650 \Leftrightarrow x = 13$km.

23. Dois retângulos idênticos com lados de 3 cm e 9 cm se sobrepõem, conforme a figura. Qual é a área da região de sobreposição?



(A) 12 cm² (B) 13,5 cm² (C) 14 cm² (D) 15 cm² (E) 16 cm²

23. Resposta: alternativa D
Pela simetria da figura, vemos que o quadrilátero cinza é um losango e os triângulos retângulos brancos são congruentes. Sendo 3 e *x* os catetos desses triângulos, concluímos, da figura, que sua hipotenusa é 9 – *x*. Pelo teorema de Pitágoras, temos
$x^2 + 3^2 = (9 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = 81 - 18x + x^2 \Leftrightarrow x = 4$. A área de cada triângulo é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, logo a área da região cinza é a área de um retângulo menos a área de dois triângulos, i.e., $3 \times 9 - 2 \times 6 = 15$ cm².

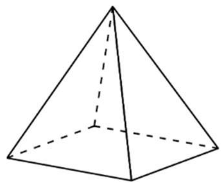


24. Sobre uma mesa há alguns quadrados e alguns triângulos. Algumas figuras são azuis e as demais são vermelhas. Algumas são grandes e as restantes são pequenas. Sabemos que os dois fatos a seguir são verdadeiros: (i) Se uma figura é grande, então é um quadrado. (ii) Se uma figura é azul, então é um triângulo. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

(A) Todas as figuras vermelhas são quadrados.
(B) Todos os quadrados são grandes.
(C) Todas as figuras pequenas são azuis.
(D) Todos os triângulos são azuis.
(E) Todas as figuras azuis são pequenas.

24. Resposta: alternativa E
Sobre a mesa há somente quadrados e triângulos e eles somente podem ser azuis ou vermelhos. A afirmação (i) significa que todas as figuras grandes são quadrados e a (ii) significa que todas as figuras azuis são triângulos. Logo, não há quadrados e triângulos grandes azuis, somente triângulos pequenos azuis. Há quadrados grandes e pequenos e triângulos pequenos vermelhos. Logo, todas as figuras azuis são pequenas.

25. Júlia numerou de 1 a 5 os vértices de uma pirâmide de base quadrada. Em seguida, ela calculou a soma dos números escritos nos vértices de cada face. Quatro dessas somas são 7, 8, 9 e 10. Qual é a soma dos números escritos nos vértices da quinta face?



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

25. Resposta: alternativa C
Seja x o número escrito no vértice da pirâmide e a, b, c e d os números escritos na base (quinta face).
Devemos ter

$x + a + b = 7$

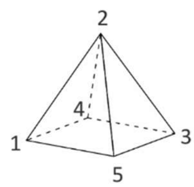
$x + b + c = 8$

$x + c + d = 9$

$x + a + d = 10$

logo $4x + a + b + b + c + c + d + a + d = 7 + 8 + 9 + 10 \Leftrightarrow 4x + 2(a + b + c + d) = 34 \Leftrightarrow a + b + c + d = \frac{34-4x}{2}$

Caso x = 1, a soma dos quatro números da base será 15, o que é impossível, pois a soma de todos os cinco números é 15. Caso x = 2 a soma dos números da base será 13. De fato 1 + 3 + 4 + 5 = 13. Os números poderão ser escritos conforme indicado na figura.



26. Um cubo é formado por 64 cubinhos iguais. Três faces desse cubo grande serão pintadas. Qual é a maior quantidade possível de cubinhos que terão exatamente uma face pintada?

(A) 27 (B) 28 (C) 32 (D) 34 (E) 40

26. Resposta: alternativa C

Há somente duas maneiras de pintar três faces de um cubo, mostradas nas figuras 1 e 2, ao lado. A cor mais escura indica os cubinhos com somente uma face pintada. Na figura 1, o número de cubinhos com exatamente uma face pintada é $9 \times 3 = 27$ e, na figura 2, o número é $8 + 2 \times 12 = 32$. Na figura 2, a face oculta que foi pintada está reproduzida em destaque, à direita. Logo, a maior quantidade possível de cubinhos com somente uma face pintada é 32.

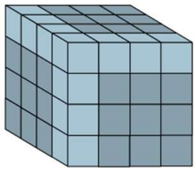


figura 1

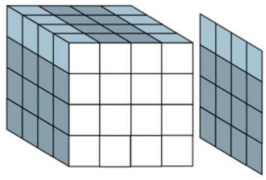


figura 2

27. Ana quer escrever um número inteiro em cada uma das casas do quadriculado ao lado, de modo que as somas dos quatro números em cada linha e dos quatro números em cada coluna sejam iguais. Ela já escreveu alguns números, conforme mostrado. Qual número ela deve escrever na casa cinza?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

27. Resposta: alternativa C

A partir da figura temos

$6 + 2 + z + 7 = y + 7 + 4 + z \Leftrightarrow y = 4$

$1 + x + y + w = x + 2 + 2 + 8 \Leftrightarrow y + w = 11$

Logo

$y + w = 4 + w = 11 \Leftrightarrow w = 7$

1		6	3
x	2	2	8
y	7	z	4
w		7	

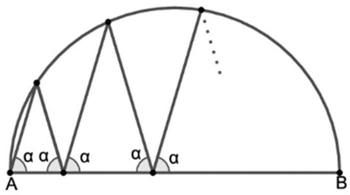
28. Alice, Bela e Cátia disputam um torneio de queda de braços. Em cada disputa, duas garotas se enfrentam e a terceira descansa. Depois de cada disputa, a vencedora disputa com a garota que tinha descansado. No total, Alice participou de 10 disputas, Bela participou de 15 e Cátia participou de 17. Quem perdeu a segunda disputa?

(A) Alice
(B) Bela
(C) Cátia
(D) Tanto Alice quanto Bela poderiam ter perdido a segunda disputa.
(E) Bela ou Cátia poderiam ter perdido a segunda disputa.

28. Resposta: alternativa A

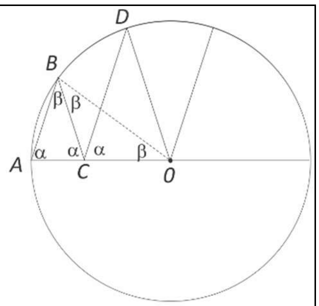
Como as disputas são entre duas pessoas, o número total de disputas foi $\frac{10 + 15 + 17}{2} = 21$. Logo Alice descansou em 21 – 10 = 11 disputas, Bela descansou em 21 – 15 = 6 disputas e Cátia descansou em 21 – 17 = 4 disputas. Pelas regras do torneio, ninguém pode descansar em duas partidas seguidas. Então Alice forçosamente descansou na primeira partida, pois do contrário não teria descansado em 11 disputas (disputas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Logo, Alice jogou na segunda partida, pois quem descansa numa partida tem que jogar na próxima. Se ela tivesse vencido a segunda partida, não descansaria na terceira, o que não é verdade, pois ela descansou na terceira partida. Logo Alice perdeu a segunda partida.

29. Uma linha em zigue-zague parte da extremidade A do diâmetro AB de um semicírculo. Cada um dos ângulos entre essa linha e o diâmetro AB tem a mesma medida α conforme a figura. Depois de quatro picos, a linha termina no ponto B. Qual é o valor de α?



(A) 60^{O} (B) 72^{O} (C) 75^{O} (D) 80^{O} (E) outro valor

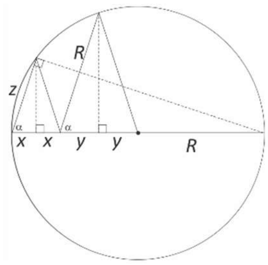
29. Resposta: alternativa B



Pela simetria vertical da figura, basta observar o triângulo ABO, no qual *AO* = *BO* são raios do semicírculo. Como esse triângulo é isósceles de base *AB*, temos $m(B\hat{A}O) = m(A\hat{B}O) = \alpha$. O triângulo *CAB*, dado, é isósceles, e os dois ângulos iguais também medem α, logo triângulo *CAB* é semelhante ao triângulo *ABO*. Se $\beta = m(B\hat{O}A)$então $\beta = m(A\hat{B}C)$. Temos $\frac{AB}{AC} = \frac{BO}{AB}$. Ocorre que nos triângulos congruentes ABO e OCD temos $\frac{BO}{AB} = \frac{DO}{OC}$. Como CO = AB, temos $\frac{AB}{AC} = \frac{BO}{CO}$.

Pelo teorema das bissetrizes internas, concluímos que *BC* é bissetriz do ângulo $A\hat{B}O$, logo $\beta = m(A\hat{B}C) = m(C\hat{B}O)$. Portanto, $\alpha = 2\beta$, de modo que a soma dos ângulos do triângulo *ABC* é $\beta + 2\beta + 2\beta = 5\beta = 180^0 \Leftrightarrow \beta = 36^0$. Logo, $\alpha = 72^{O}$.

Solução alternativa: A linha é simétrica em relação ao diâmetro vertical do semicírculo. Se *R* é o raio do semicírculo, podemos escrever, a partir dos três triângulos retângulos semelhantes visíveis na figura, que $\frac{x}{z} = \frac{y}{R} = \frac{z}{2R} = \cos\alpha$.



Temos, então, $z = 2R\cos\alpha$ e $\frac{x+y}{z+R} = \frac{\frac{R}{2}}{2R\cos\alpha + R} = \cos\alpha \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2} = (2\cos\alpha + 1)\cos\alpha \Leftrightarrow 4\cos\alpha^2 + 2\cos\alpha - 1 = 0.$

Fazendo $\cos\alpha = t$, obtemos a equação do segundo grau em t $4t^2 + 2t + 1 = 0$ com as soluções $t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Como $\cos\alpha \geq -1$temos $\cos\alpha = t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, logo $\alpha = 72^{O}$.

30. Oito números inteiros consecutivos de três dígitos têm a seguinte propriedade: cada um deles é divisível pelo seu último dígito. Qual é a soma dos dígitos do menor desses oito números?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

30. Resposta: alternativa D

Os números envolvidos são AB1, AB2, ..., AB8 ou AB2, AB3, ..., AB9, nos quais AB é um número de dois algarismos, sendo A não nulo.

Os fatos de que 1 divide AB1, 2 divide AB2, 3 divide AB3, 5 divide AB5 não trazem informações tão relevantes como os fatos de que 3 divide AB3, 4 divide AB4, 7 divide AB7 e, eventualmente, 9 divide AB9.

De 4 divide AB4, concluímos que B pode ser somente 0, 2, 4, 6 ou 8. Do fato de que 3 divide AB3, concluímos que A + B é divisível por 3, sendo A diferente de zero. Assim, AB pode ser um dos 15 números: 12, 18, 24, ..., 96.
Como 7 divide AB7, devemos procurar entre os números 127, 187, 247, ..., 967 quais divisíveis por 7. Se 7 divide AB7 então 7 divide 10AB + 7. Caso AB seja divisível por 7, então AB7 é divisível por 7. Na sequência de valores de AB acima, encontramos AB = 42 e AB = 84. De fato, 427 e 847 são divisíveis por 7. Então, precisamos ver se 428 e 848 são divisíveis por 8. Verificando, apenas 848 é divisível por 8. Como 849 não é divisível por 9, concluímos que os oito números consecutivos são 841, 842, ..., 848. Logo, a soma dos algarismos do menos desses números é 8 + 4 + 1 = 13.

Prova nível J

(Junior)

1ª e 2ª séries
Ensino Médio

Problemas de 3 pontos

Questão 1

$20 \times 19 + 20 + 19 =$

(A) 389 (B) 399 (C) 409 (D) 419 (E) 429

1. Resposta: Alternativa D

$20 \times 19 + 20 + 19 = 380 + 20 + 19 = 419$

Obs.: 19 vezes 20 mais 20 é o mesmo que 20 vezes 20, ou seja 400. Basta somar 19.

Questão 2

Um trenzinho de brinquedo leva exatamente 1 minuto e 11 segundos para dar uma volta completa no circuito. Quanto tempo levará para dar seis voltas?

(A) 6 minutos e 56 segundos
(B) 7 minutos e 6 segundos
(C) 7 minutos e 16 segundos
(D) 7 minutos e 26 segundos
(E) 7 minutos e 36 segundos

2. Resposta: Alternativa B

Seis vezes 1 minuto e 11 segundos é o mesmo que 6 minutos e 66 segundos; 66 segundos são 1 minuto e 6 segundos. Logo, para o trenzinho dar seis voltas, levará 7 minutos e 6 segundos.

Questão 3

Um barbeiro quer escrever a palavra CORTE num quadro de tal modo que o cliente, olhando no espelho, leia a palavra corretamente. Como o barbeiro deve escrever a palavra no quadro?

(A) **CORTE** (B) **CORTƎ** (Ↄ) **ƎTЯOↃ** (D) **ETЯOↃ** (E) **ƎTЯOↃ**

3. Resposta: Alternativa E

Na reflexão, há inversão de cada parte e do todo. As partes simétricas permanecem as mesmas. Então a palavra **CORTE** será vista como **ƎTЯOↃ**.

Questão 4

Quantas são as diferentes somas de pontos que você obtém quando lança três dados simultaneamente?

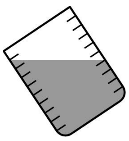
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

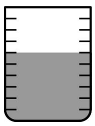
4. Resposta: Alternativa C

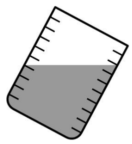
Ao lançar três dados normais, de 1 a 6 pontos cada um, as somas dos pontos são números inteiros que vão de 1 + 1 + 1 = 3 até 6 + 6 + 6 = 18, totalizando 18 – 3 + 1 = 16 resultados.

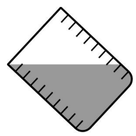
Questão 5

Cinco copos iguais contêm água. Quatro deles têm a mesma quantidade de água. Qual é o copo com quantidade diferente de água?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

5. Resposta: Alternativa A

Como os copos são iguais, os cortes planos verticais do volume ocupado pela água são as formas planas cinzentas nas figuras. Volumes de água diferentes têm secções planas com áreas diferentes. As formas planas são trapezóides de mesma altura (os diâmetros dos copos são iguais). Utilizando as escalas nos copos, vemos que as bases somam 12 em todos os copos, exceto no copo da alternativa (A), no qual a soma das bases é 13. Nesse copo há uma quantidade maior de água.

Questão 6

Um parque tem cinco portões. Mônica quer entrar por um deles e sair por outro. De quantas maneiras ela pode entrar e sair do parque?

(A) 25 (B) 20 (C) 16 (D) 15 (E) 10

6. Resposta: Alternativa B

Mônica tem cinco escolhas para entrar e quatro para sair, pois não quer voltar pelo mesmo portão. Ela pode entrar e sair de 5 × 4 = 20 maneiras.

Questão 7

Três cangurus pesam diferentes números inteiros de quilogramas. No total, pesam 97 kg. No máximo, quanto pesa o mais leve dos três?

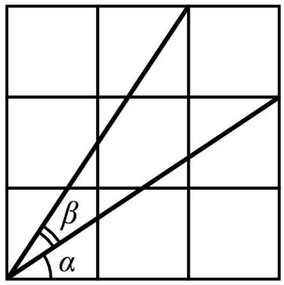
(A) 1 kg (B) 30 kg (C) 31 kg (D) 32 kg (E) 33 kg

7. Resposta: Alternativa C

Como os três pesos devem diferir o menos possível, podemos dividir 97 por 3, que resulta no quociente 32 e resto 1. O mais leve não pode pesar 32, porque neste caso os outros dois teriam que pesar no mínimo 33 e 34 e a soma excederia 97. Mas pode pesar 31, pois assim os outros dois poderiam ter pesos diferentes e maiores do que 31 (por exemplo, 32 e 34).

Questão 8

Qual igualdade a seguir expressa a relação correta entre os ângulos assinalados na figura ao lado, composta de nove quadrados congruentes?

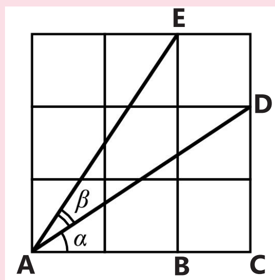


(A) $\alpha = \beta$ (B) $\alpha + \beta = 45°$ (C) $\alpha + \beta = 60°$

(D) $2\beta + \alpha = 90°$ (E) $2\alpha + \beta = 90°$

8. Resposta: Alternativa E

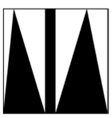
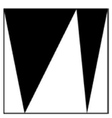
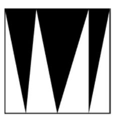
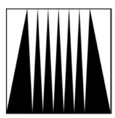
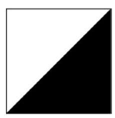
Considere a figura ao lado.



Os triângulos *ABE* e *DCE* são congruentes, pois são retângulos de catetos 3 e 2. Assim, $m(\widehat{BEA}) = \alpha$ e usando a soma dos ângulos internos do triângulo *ABE* temos $\alpha + \beta + \alpha = 90° \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 90°$.

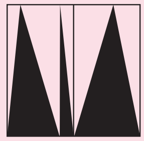
Questão 9

Cada quadrado unitário a seguir tem uma certa parte do seu interior pintada de preto. Qual deles tem a maior área pintada de preto?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

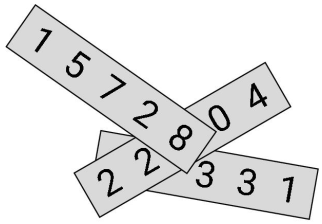
9. Resposta: Alternativa A

Nas figuras (B), (C) e (D), as medidas das bases dos triângulos pretos têm soma igual à medida do lado do quadrado e suas alturas são todas iguais ao lado do quadrado. Como o lado do quadrado mede 1, as somas das áreas dos triângulos nesses três casos é igual a $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$. Na figura (E), a diagonal divide o quadrado ao meio, logo a área do triângulo preto é $\frac{1}{2}$. Na alternativa (A), a única diferença é que no lugar de um triângulo preto, há um retângulo preto, cuja área é maior, tornando a região pintada de preto maior do que $\frac{1}{2}$. Na ilustração, a área total da região preta é $\frac{1}{2}$, se considerarmos a metade do retângulo.



Questão 10

Em cada um de três cartões foi escrito um número de cinco algarismos, conforme mostrado na figura. Três desses algarismos estão cobertos. A soma dos três números escritos é 57263. Quais algarismos estão cobertos?



(A) 0, 2 e 2 (B) 1, 2 e 9 (C) 2, 4 e 9 (D) 2, 7 e 8 (E) 5, 7 e 8

10. Resposta: Alternativa B

A soma dos dois números parcialmente ocultos é 57 263 – 15 728 = 41 535. Os dois algarismos da direita desses números são visíveis, permitindo-nos concluir que o algarismo do cartão do meio somado com 3 resulta 5, logo é o algarismo 2. Os outros dois algarismos ocultos, no cartão de baixo, formam o número que somado com 22 resulta 41, ou seja, o número 19. Logo, os algarismos cobertos são 1, 2 e 9.

Problemas de 4 pontos

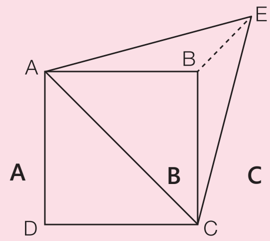
Questão 11

Um quadrado tem os vértices A, B, C, D designados no sentido horário. É desenhado um triângulo equilátero com vértices A, E, C designados no sentido horário. Qual é a medida do ângulo CBE em graus?

(A) 30 (B) 45 (C) 135 (D) 145 (E) 150 **E**

11. Resposta: Alternativa C

Dada a simetria da figura, $\overline{BE}$ está na bissetriz do ângulo ABC externo ao quadrado. Assim, $m(\widehat{CBE}) = \dfrac{360° - 90°}{2} = 135°$.



Questão 12

Os números distintos a, b, c, d são escolhidos entre os inteiros de 1 a 10. Qual é o menor valor possível para a expressão $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$?

(A) $\dfrac{2}{10}$ (B) $\dfrac{3}{19}$ (C) $\dfrac{14}{45}$ (D) $\dfrac{29}{90}$ (E) $\dfrac{25}{72}$

12. Resposta: Alternativa C

Usamos os dois menores números e os dois maiores números para obter as menores frações. Há duas possibilidades: $\dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{29}{90}$ e $\dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{28}{90}$. Portanto a menor soma é $\dfrac{28}{90} = \dfrac{14}{45}$.

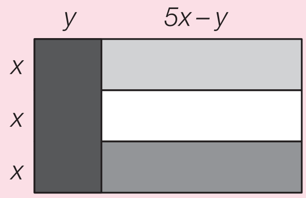
Questão 13

A bandeira de Cangúria é um retângulo cujos lados estão na razão 3 : 5. Ela é dividida em quatro retângulos de áreas iguais, conforme a figura. Qual é a razão entre as medidas dos lados do retângulo branco?

(A) 1 : 3 (B) 1 : 4 (C) 2 : 7 (D) 3 : 10

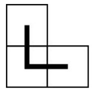
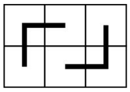
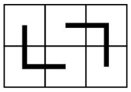
(E) 4 : 15

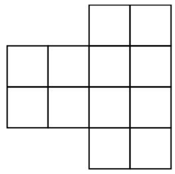
13. Resposta: Alternativa E



Se os quatro retângulos têm áreas iguais, os três retângulos à direita têm a mesma largura x. Logo a largura do retângulo maior é $3x$ e seu comprimento é $5x$, já que a razão entre a largura e o comprimento é $3:5$. Se y é a largura do retângulo mais escuro, então o comprimento dos três retângulos iguais é $5x - y$. Como as áreas dos quatro retângulos são iguais, temos $3x \cdot y = x \cdot (5x - y) \Leftrightarrow 3y = 5x - y \Leftrightarrow 4y = 5x \Leftrightarrow y = \frac{5x}{4}$. Assim, a largura do retângulo branco é x e seu comprimento é $5x - \frac{5x}{4} = \frac{15x}{4}$. A razão entre sua largura e seu comprimento é $x : \frac{15x}{4} = 1 : \frac{15}{4} = \frac{4}{15} = 4 : 15$.

Questão 14

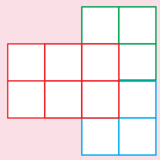
Um retângulo pode ser coberto por duas peças na forma de L como esta  de duas maneiras diferentes:  . De quantas maneiras diferentes pode a figura à direita ser coberta com peças na forma de L?

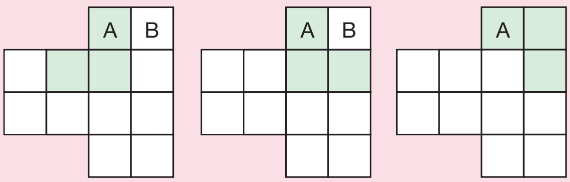


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 48

14. Resposta: Alternativa B

Considere a casinha marcada com a letra A nas figuras a seguir. Existem três formas possíveis de cobrir A.





Nas duas primeiras possibilidades é impossível cobrir a casinha marcada com a letra B. Então temos que usar a terceira opção. Usando a mesma ideia na parte de baixo, concluímos que a única forma de cobrir é usando as pecinhas marcadas na lateral direita e o retângulo 3 × 2 que sobra. Como há duas formas de cobrir o retângulo, concluímos que existem exatamente duas formas diferentes de cobrir a figura toda.

Questão 15

Um triatlo consiste de natação, corrida e ciclismo. O ciclismo é igual a três quartos da distância total. A corrida é igual a um quinto do triatlo e a natação é de dois quilômetros. Qual é a distância total deste triatlo, em km?

(A) 10 (B) 20 (C) 38 (D) 40 (E) 60

15. Resposta: Alternativa D

Se d é a distância total a ser percorrida no triatlo, então o circuito com bicicleta tem comprimento $\frac{3d}{4}$, a corrida equivale a $\frac{d}{5}$ e a natação a $d - \frac{3d}{4} - \frac{d}{5} = \frac{20d - 15d - 4d}{20} = \frac{d}{20} = 2 \Leftrightarrow d = 40$ km.

Questão 16

Um refresco é produzido com suco concentrado e água numa razão de 1:7 em volume. O suco concentrado disponível é de meio litro. Que fração desse suco concentrado deverá ser usada para produzir dois litros do refresco?

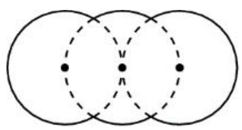
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) Todo o concentrado.

16. Resposta: Alternativa B

Um litro do refresco tem uma parte em suco e sete partes de água. Logo, o volume do suco necessário para produzir um litro de refresco é igual a $\frac{1}{8}$ de litro. O suco necessário para produzir 2 litros do refresco é $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ de litro. Havia somente meio litro de suco disponível. Queremos saber que fração de $\frac{1}{2}$ litro de suco representa o número $\frac{1}{4}$ de litro de suco. Essa fração é $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$.

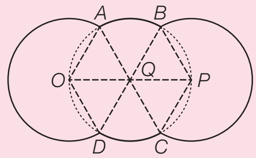
Questão 17

A figura ao lado é formada por partes de três circunferências iguais de raio R e centros alinhados. A circunferência do meio passa pelos centros das outras duas circunferências. Qual é o perímetro dessa figura?



(A) $\frac{10\pi R}{3}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi R\sqrt{3}$ (E) $4\pi R$

17. Resposta: Alternativa A



Na figura, os pontos A, B, P, C, D e O pertencem à circunferência de centro Q; além disso, as três circunferências têm o mesmo raio, logo $AQ = BQ = PQ = CD = DQ = OQ = OA = OD = BP = CP = QP$, o que determina seis triângulos equiláteros. Assim, os ângulos AOD e BPC medem 120º e os ângulos AQB e CQD medem 60º. No sentido horário, os arcos DA e BC têm medida angular de 240º e os arcos AB e CD têm medida angular de 60º. O perímetro da figura é a soma dos comprimentos desses arcos. Como o raio das circunferências é R, o perímetro da figura é

$$2 \times 2\pi R \times \frac{240^\circ}{360^\circ} + 2 \times 2\pi R \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = 2 \times 2\pi R \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{10\pi R}{3}.$$

Questão 18

Um telefone tem o número $\overline{aaabbbb}$ de sete dígitos. A soma desses dígitos é igual ao número de dois dígitos $\overline{ab}$. Quanto vale $a + b$?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

18. Resposta: Alternativa C

Temos $3a + 4b = 10a + b \Leftrightarrow 7a = 3b \Leftrightarrow a = \frac{3b}{7}$. Como 7 não divide 3, 7 deve dividir b. Como os algarismos não são nulos e são menores do que 10, temos necessariamente $a = 3$ e $b = 7$.

Logo, $a + b = 10$.

Questão 19

60 maçãs e 60 peras devem ser colocadas em várias caixas, todas com a mesma quantidade de maçãs, mas de forma a não haver duas caixas com a mesma quantidade de peras. Qual é o maior número possível de caixas que podem ser obtidas nessas condições?

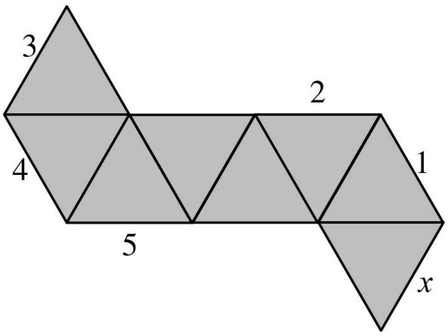
(A) 10 (B) 6 (C) 15 (D) 12 (E) 20

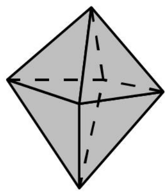
19. Resposta: Alternativa A

Devemos dividir as maçãs igualmente, ou seja, o número caixas é um divisor de 60, o maior possível, desde que as caixas tenham quantidade diferentes de peras. Seja n o número de caixas. Para $n \geqslant 12$, seriam necessárias no mínimo $0 + 1 + 2 + \ldots + 11 = 66$ peras. Como 11 não divide 60, podemos considerar 10 como o número de caixas, sendo perfeitamente possível distribuir as 60 peras em quantidades diferentes. Por exemplo, 1, 2, 3, ..., 9 e 15 peras. Cada caixa terá 6 maçãs e todas elas terão números diferentes de peras, totalizando 60 peras.

Questão 20

Na figura a seguir temos a planificação de um octaedro. Ao ser montado o octaedro, à direita, qual das arestas numeradas vai coincidir com a aresta marcada com a letra x?

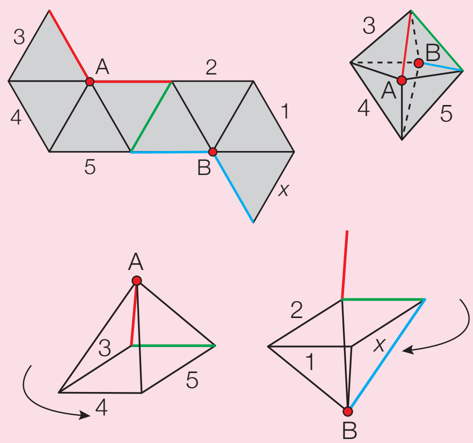




(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

20. Resposta: Alternativa E

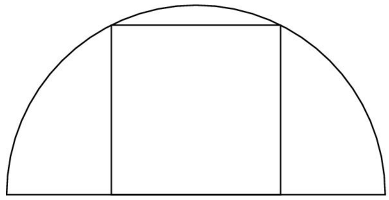
As arestas vermelhas se unem e também as arestas azuis. Temos então duas pirâmides de base quadrada, com vértices destacados em vermelho. As duas bases vão coincidir, quando for feita a dobra na linha verde, que será uma das arestas das bases dessas pirâmides. Isto significa que cada uma das linhas 3, 4 e 5 vão coincidir com uma das linhas x, 1 e 2. Notando que os números 3, 4 e 5 estão na ordem inversa dos números x, 1 e 2, concluímos que as arestas x e 5 coincidem.



Problemas de 5 pontos

Questão 21

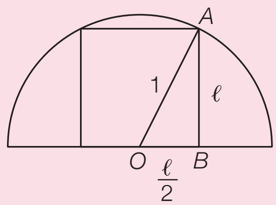
Um quadrado tem dois de seus vértices sobre uma semicircunferência e dois vértices sobre o seu diâmetro. Se o raio da semicircunferência é 1 cm, qual é a área do quadrado?



(A) $\frac{4}{5}$ cm^2 (B) $\frac{\pi}{4}$ cm^2 (C) 1 cm^2 (D) $\frac{4}{3}$ cm^2 (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2

21. Resposta: Alternativa A

Seja AB um dos lados do quadrado, como na figura. Se O é o centro da circunferência, e ℓ é a medida do lado do quadrado, então $OA = 1$ e $OB = \frac{\ell}{2}$, por simetria, no triângulo retângulo AOB. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:



$$1^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 = \frac{4}{5}\text{ cm}^2.$$

Questão 22

Dois pontos foram marcados num disco que gira ao redor do seu centro. Um deles está 3 cm mais distante que o outro do centro do disco e move-se com velocidade constante igual a 2,5 vezes a velocidade do ponto mais próximo do centro. Qual é a distância do centro do disco ao ponto mais distante?

(A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm (E) 5 cm

22. Resposta: Alternativa E

Se d é a distância do ponto do disco mais próximo do centro de rotação, então $d + 3$ é a distância do ponto do disco mais distante do centro. Se T é o período de rotação do disco (poderia ser um intervalo de tempo qualquer), então a velocidade linear do ponto mais próximo é $\frac{2\pi d}{T}$ e a velocidade linear do mais distante é $\frac{2\pi(d+3)}{T}$. Temos então $\frac{2\pi(d+3)}{T} = 2{,}5 \cdot \frac{2\pi d}{T} \Leftrightarrow d + 3 = 2{,}5d \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1{,}5d = 3 \Leftrightarrow d = 2$. O ponto mais distante está afastado $d + 3 = 2 + 3 = 5$ cm do centro.

Questão 23

Os números inteiros de 1 a 99 são escritos em ordem crescente sem separação. Em seguida, a sequência é dividida em trios de três algarismos:

123456789101112...979899 $\rightarrow$ (123)(456)(789)(101)(112)...(979)(899).

Qual dos grupos a seguir não é um desses trios?

(A) (222) (B) (444) (C) (464) (D) (646) (E) (888)

23. Resposta: Alternativa B

Observando os trios (101)(1**12**)(131)(4**15**)(161)(7**18**)... notamos que os múltiplos de três de dois algarismos 12, 15, 18, ... aparecem em trios alternados. Então podemos concluir que o trio consecutivo de (x21) é o trio (222), o consecutivo de (y45) é o trio (464), o de (w63) é (646) e o de (z87) é (888) mas não existe um trio (k43) para anteceder (444).

Questão 24

Quantos planos passam por exatamente três vértices de um determinado cubo?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 12

24. Resposta: Alternativa D

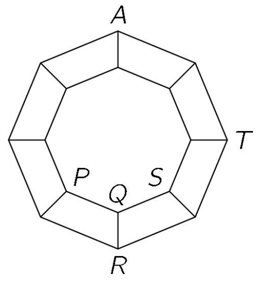
O plano contendo uma diagonal de face de um cubo intersecta a diagonal reversa da face oposta em um único ponto. Se passar por uma das duas extremidades dessa diagonal, então contêm exatamente três vértices do cubo. Para cada diagonal existem dois planos e como há 12 diagonais, achamos 24 planos. Ocorre que para cada um desses planos, três diagonais estão contidas neles. Portanto, o número de planos é $\frac{24}{3} = 8$.

Solução alternativa 1: Podemos pintar os vértices do cubo de duas cores diferentes, de modo que os vértices de mesma cor sejam os vértices de um tetraedro regular. Somente os planos contendo as faces desses tetraedros contêm exatamente três vértices do cubo. Como são dois desses tetraedros, cada um com quatro faces, há 8 planos.

Solução alternativa 2: O número de planos que passam por três ou quatro pontos que são vértices do cubo é $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$. O número de planos que passam por quatro pontos é 12 (pois para cada aresta há três planos que contêm arestas paralelas à mesma. Temos $12 \times 3 = 36$, mas cada plano é contado 3 vezes, logo devemos dividir esse número por 3). Cada um desses planos contém 4 das combinações obtidas no cálculo inicial. Essas combinações não servem, logo o número de planos que passam exatamente por três pontos é $56 - 4 \times 12 = 8$.

Questão 25

Um grafo consiste de 16 vértices e algumas arestas que os conectam, conforme a figura. Uma formiga está no vértice *A*. A cada movimento, ela pode caminhar de um vértice para qualquer vértice vizinho pela aresta que os liga. Em quais dos vértices *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* pode estar a formiga, ao término de 2019 movimentos?



(A) Somente *P*, *R* ou *S*, mas não *Q* e *T*.

(B) Somente *P*, *R*, *S* ou *T*, mas não *Q*.

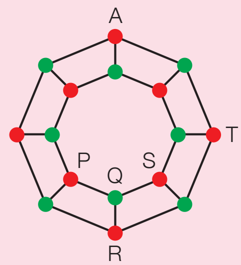
(C) Somente *Q*.

(D) Somente *T*.

(E) Em todos esses pontos.

25. Resposta: Alternativa C

Podemos pintar os vértices do diagrama de vermelho e verde, por exemplo, de tal forma que dois vértices diretamente ligados por uma aresta tenham cores diferentes, como na figura. Dessa forma, fica claro que se a formiga partir de *A* e passar por um número ímpar de arestas irá terminar num ponto verde. Dentre os vértices *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* somente o *Q* é verde. Logo, depois de 2019 movimentos a formiga poderá estar somente nesse vértice. Uma possível sequência de movimentos que levem a formiga do ponto *A* ao ponto *Q* é ir até e voltar do ponto verde mais próximo 1007 vezes, num total de 2014 movimentos e depois seguir com 5 movimentos até o ponto *Q*.



Questão 26

Os números inteiros positivos *a*, *b*, *c* têm três algarismos cada um e para cada um deles o primeiro algarismo é igual ao último. Além disso, $b = 2a + 1$ e $c = 2b + 1$. Quantos são os possíveis valores de *a*?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) mais de 3

26. Resposta: Alternativa C

Sendo A, B, C, D, E, F algarismos, temos $a = \overline{ABA}$, $b = \overline{CDC}$ e $c = \overline{EFE}$. Como $b = 2a + 1$ temos $C = 2A + 1$ ou $C = 2A + 1 - 10$, com um “vai um” para as dezenas. Mas a segunda possibilidade implicaria $2A > 9$ e o número b teria 4 dígitos. Portanto, $C = 2A + 1$. Como $c = 2b + 1$ temos $E = 2C + 1$, logo a relação entre os algarismos das unidades dos números a e c é $E = 2(2A + 1) + 1 = 4A + 3$. Como a é um número de três algarismos, temos $A \cdot 0$. Por outro lado, se $A \geqslant 2$ então $E > 9$, ou seja, o número c teria mais de três algarismos. Para $A = 1$, temos $a = \overline{1B1}$. O algarismo do meio B tem que ser maior ou igual a 5, pois o algarismo das centenas C é igual ao dobro do algarismo das centenas A mais um. Os possíveis candidatos são os números 161, 171, 181, 191, mas testando concluímos que apenas esses dois últimos cumprem todas as condições.

$$161 \to 2 \cdot 161 + 1 = 323 \to 2 \cdot 323 + 1 = 647$$
$$171 \to 2 \cdot 171 + 1 = 343 \to 2 \cdot 343 + 1 = 687$$
$$181 \to 2 \cdot 181 + 1 = 363 \to 2 \cdot 363 + 1 = 727$$
$$191 \to 2 \cdot 191 + 1 = 383 \to 2 \cdot 383 + 1 = 767$$

Questão 27

Os vértices de um quadrado foram numerados de modo que, para dois números quaisquer ligados por um lado, um deles é múltiplo de outro. Entretanto, para dois números diagonalmente opostos, nenhum é múltiplo do outro. Qual é a menor soma possível desses quatro números?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 35 (E) 60

27. Resposta: Alternativa D

Admitimos que enumeramos apenas com números inteiros positivos. Observe que não pode haver números repetidos, pois se fossem diagonalmente opostos um seria múltiplo do outro, contrariando o enunciado; caso fossem vizinhos, os outros dois valores seriam ao mesmo tempo diagonalmente opostos e vizinhos aos números repetidos, o que também desrespeita o enunciado. Seja a o menor número no quadrado e b o número oposto ao a. Os dois vizinhos de a são múltiplos de a, pois a é o menor e também são múltiplos de b, pois caso contrário b seria múltiplo de um número múltiplo de a sendo, portanto, múltiplo de a. Podemos observar também que a e b não devem ter fatores em comum, pois se tivessem poderíamos dividir os quatro números por esse fator e obter um quadrado com soma menor. Logo, os números de soma mínima são da forma a, b, abm e abn.

Para determinar a e b, consideremos que o número 1 não pode ser usado, já que todo inteiro é múltiplo de 1. Vamos considerar os valores 2 e 3 para a e b, em qualquer ordem. Então devemos escrever múltiplos de 2 e de 3 nas extremidades da outra diagonal. Devem ser números da forma $2 \cdot 3 \cdot m$ e $2 \cdot 3 \cdot n$. Note que entre m e n nenhum pode ser múltiplo do outro e os dois menores valores de m e n para que isso ocorra são 2 e 3. Portanto, nas extremidades da outra diagonal escrevemos os números 12 e 18. Logo, a menor soma possível para os números escritos nos quatro vértices é $2 + 3 + 12 + 18 = 35$.

Questão 28

Qual é o menor número de elementos que podemos tirar do conjunto {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90} de modo que o produto dos elementos que sobrarem seja um quadrado perfeito?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

28. Resposta: Alternativa B

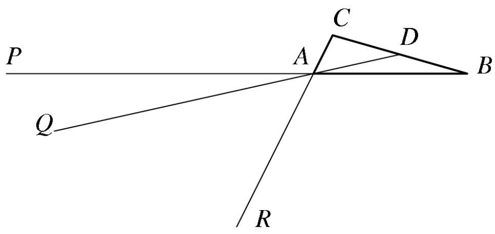
O produto de todos os elementos do conjunto é:

$10 \times 20 \times 30 \times 40 \times 50 \times 60 \times 70 \times 80 \times 90 = 10^9 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 = 10^{10} \times 2^6 \times 3^4 \times 7 = 2^{16} \times 3^4 \times 5^{10} \times 7$

O fator 7 tem que ser eliminado, pois seu expoente é ímpar, ou seja, o número 70 tem que ser retirado. Mas isto torna o expoente de 10 também ímpar. Ou seja, teremos que eliminar outro número do conjunto, que pode ser o 40, por exemplo, deixando o produto restante igual a $2^{12} \times 3^4 \times 5^8$, que é um quadrado perfeito. Portanto, pelo menos dois elementos do conjunto devem ser retirados.

Questão 29

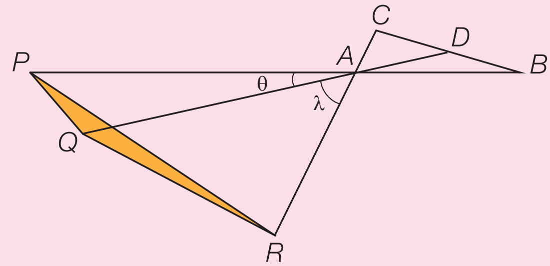
Dado o triângulo *ABC*, de área *S*, seja *D* o ponto médio do lado *BC*. Escolha os pontos *P*, *Q*, *R* sobre as retas *AB*, *AD*, *AC*, respectivamente, conforme a figura, de modo que $AP = 2 \cdot AB$, $AQ = 3 \cdot AD$ e $AR = 4 \cdot AC$. Qual é a área do triângulo *PQR*?



(A) S (B) $2S$ (C) $3S$ (D) $\frac{1}{2}S$ (E) 0 (i.e. *P*, *Q*, *R* são colineares)

29. Resposta: Alternativa A

Como D é ponto médio do lado BC, concluímos que os triângulos ADC e ABD têm a mesma área $\frac{S}{2}$.



Lembrando que a área de um triângulo de lados a e b e ângulo θ entre esses lados é $\frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}$, temos as áreas dos seguintes triângulos:

$$[APQ] = \frac{AP \cdot AQ \cdot \operatorname{sen} \theta}{2} = \frac{2AB \cdot 3AD \cdot \operatorname{sen} \theta}{2} = 6 \times \frac{AB \cdot AD \cdot \operatorname{sen} \theta}{2} = 3S;$$

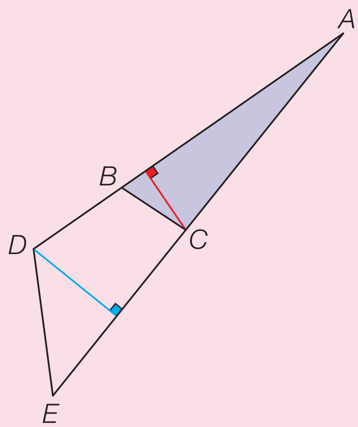
$$[AQR] = \frac{AR \cdot AQ \cdot \operatorname{sen} \lambda}{2} = \frac{4AC \cdot 3AD \cdot \operatorname{sen} \lambda}{2} = 12 \times \frac{AC \cdot AD \cdot \operatorname{sen} \lambda}{2} = 6S;$$

$$[APR] = \frac{AP \cdot AR \cdot \operatorname{sen} (\theta + \lambda)}{2} = \frac{2AB \cdot 4AC \cdot \operatorname{sen} (\theta + \lambda)}{2} = 8 \times \frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} (\theta + \lambda)}{2} = 8S;$$

Assim, $[PQR] = [APQ] + [AQR] - [APR] = 3S + 6S - 8S = S$.

Solução alternativa:

Considere dois triângulos ABC e ADE que têm o mesmo ângulo em A, $AD = p \cdot AB$ e $AE = q \cdot AC$. Na figura, representamos os dois triângulos sobrepostos, para melhor visualização. Os triângulos ABC e ADC têm mesma altura, logo a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases, ou seja, $[ADC] = p \cdot [ABC]$. Os triângulos ADC e ADE têm a mesma altura, logo a razão entre suas áreas é a razão entre suas bases, ou seja $[ADE] = q \cdot [ADC]$. Consequentemente, $[ADE] = pq \cdot [ABC]$. Usando esta relação, podemos escrever



$$[APQ] = 2 \cdot 3 \cdot [ADB] = 6 \cdot \frac{S}{2} = 3S$$

$$[AQR] = 4 \cdot 3 \cdot [ACD] = 12 \cdot \frac{S}{2} = 6S$$

$$[APR] = 4 \cdot 2 \cdot [ABC] = 8S$$

Assim, $[PQR] = [APQ] + [AQR] - [APR] = 3S + 6S - 8S = S$.

Questão 30

Se qualquer algarismo de um dado número de quatro algarismos é apagado, o número resultante de três algarismos é um divisor do número original. Quantos números de quatro algarismos têm essa propriedade?

(A) 5 (B) 9 (C) 14 (D) 19 (E) 23

30. Resposta: Alternativa C

Um número com os algarismos A, B, C, D nessa ordem, sendo $A \cdot 0$, pode ser representado por $\overline{ABCD} = 1000A + 100B + 10C + D$.

Sabendo que o número $\overline{ABCD}$ é divisível pelo número $\overline{ABC}$, temos $\dfrac{\overline{ABCD}}{\overline{ABC}} = \dfrac{10 \cdot \overline{ABC} + D}{\overline{ABC}} = 10 + \dfrac{D}{\overline{ABC}}$.

D é divisível por um número de três algarismos se e somente é zero. Portanto, $\overline{ABCD} = 10 \cdot \overline{ABC}$.

Sabemos também que o número $\overline{ABCD} = 10 \cdot \overline{ABC}$ é divisível pelo número $\overline{ABD} = 10 \cdot \overline{AB}$. Temos então $\dfrac{10 \cdot \overline{ABC}}{10 \cdot \overline{AB}} = \dfrac{10 \cdot (10\overline{AB} + C)}{10 \cdot \overline{AB}} = \dfrac{100 \cdot \overline{AB} + 10C}{10 \cdot \overline{AB}} = 10 + \dfrac{C}{\overline{AB}}$. De forma análoga, concluímos que C é igual a zero. Portanto, os dois últimos algarismos do número $\overline{ABCD}$ são nulos. Vamos escrever $\overline{ABCD} = \overline{AB00}$. Sabendo que $\overline{A00}$ e $\overline{B00}$ são também divisores do número, concluímos que os quocientes

$\dfrac{\overline{AB00}}{\overline{B00}} = \dfrac{1000A + 100B}{100B} = \dfrac{10A}{B} + 1$ e $\dfrac{\overline{AB00}}{\overline{A00}} = \dfrac{1000A + 100B}{100A} = 10 + \dfrac{B}{A}$ têm que ser inteiros.

Logo,

$A = 1 \Rightarrow B$ divide 10, isto é, $B = 1, 2, 5$
$A = 2 \Rightarrow B$ divide 20 e é divisível por 2, isto é, $B = 2, 4$
$A = 3 \Rightarrow B$ divide 30 e é divisível por 3, isto é, $B = 3, 6$
$A = 4 \Rightarrow B$ divide 40 e é divisível por 4, isto é, $B = 4, 8$

Para $A = 5, 6, 7, 8, 9$ temos $B = 5, 6, 7, 8, 9$, respectivamente.

Portanto, há $3 + 2 + 2 + 2 + 5 = 14$ números nas condições propostas.

CANGURU DE MATEMÁTICA BRASIL – NÍVEL J – 2018 - Respostas

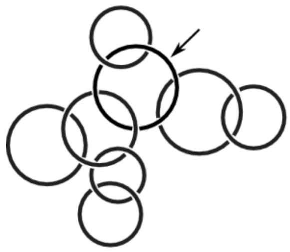
Problemas de 3 pontos

1. Na minha família, cada criança tem pelo menos dois irmãos e pelo menos uma irmã. Qual é o menor número possível de crianças na minha família?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

1. Resposta: alternativa C
Entre os filhos, há meninos e meninas. Se o filho é uma menina e tem uma irmã, então há pelo menos duas meninas. Se o filho é um menino e tem dois irmãos, então há pelo menos três meninos. Logo, há pelo menos 2 + 3 = 5 crianças na família.

2. Os anéis da figura formam cadeias que incluem o anel indicado pela flecha.
Quantos anéis tem a maior dessas cadeias?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

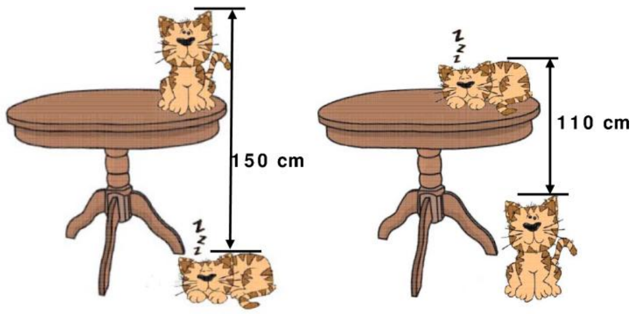
2. Resposta: alternativa C
Há duas cadeias com o anel indicado: uma com quatro e outra com cinco anéis.

3. As medidas dos lados de um triângulo são 2, 5 e um número inteiro ímpar. Qual é esse número?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

3. Resposta: alternativa C
Seja x o número inteiro que é a medida do terceiro lado do triângulo. Pela desigualdade triangular, podemos escrever $5-2<x<5+2 \Leftrightarrow 3<x<7$. Como x é ímpar, concluímos que $x = 5$.

4. Considere as duas distâncias verticais indicadas na figura ao lado. Os gatos são do mesmo tamanho. Qual é a altura da mesa, em centímetros?



(A) 110 (B) 120 (C) 130 (D) 140 (E) 150

4. Resposta: alternativa C
Se H é a altura dos gatos em pé e h, a dos gatos deitados e m, a altura da mesa, temos:

$$\left|\begin{array}{l}150+h=m+H\\110+H=m+h\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}150+h-H=m\\110+H-h=m\end{array}\right. \Rightarrow 260=2m \Leftrightarrow m=130\text{ cm.}$$

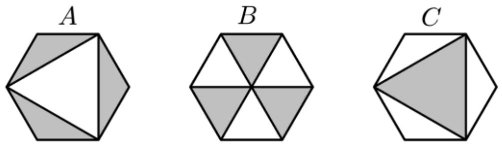
5. A soma de cinco números inteiros consecutivos é 10^{2018}. Qual é o número do meio?

(A) 10^{2013} (B) 5^{2017} (C) 10^{2017} (D) 2^{2018} (E) $2\cdot10^{2017}$

5. Resposta: alternativa E
Sendo *n* um número inteiro, os números $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ são consecutivos e *n* é o número do meio.

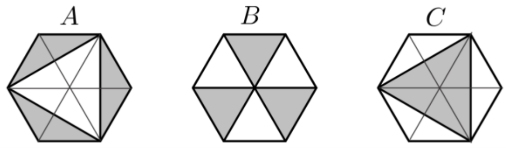
Como $n-2+n-1+n+n+1+n+2=5n$, temos $5n=10^{2018} \Leftrightarrow n=\dfrac{10^{2018}}{5}=\dfrac{10\cdot10^{2017}}{5}=2\cdot10^{2017}$.

6. Chamamos *X*, *Y* e *Z* as áreas em cinza nos hexágonos regulares iguais *A*, *B* e *C*, respectivamente, na figura ao lado. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



(A) $X=Y=Z$ (B) $X=Z\neq Y$ (C) $X=Y\neq Z$ (D) $Y=Z\neq X$ (E) As três áreas são diferentes

6. Resposta: alternativa A
Traçando as diagonais dos hexágonos, vemos em *A* que há 12 triângulos congruentes, metade brancos, metade cinza. Em *B* há seis triângulos congruentes, metade brancos, metade cinza. Em *C*, ocorre o mesmo que em *A*. Logo, *X* = *Y* = *Z* .



7. Maria colheu 42 maçãs, 60 pêssegos e 90 ameixas. Ela quer dividir todas essas frutas em pacotes contendo o mesmo número de cada um dos três tipos de frutas. Qual é o maior número de pacotes que ela pode fazer?

(A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 14 (E) 42

7. Resposta: alternativa B
As quantidades de maçãs, pêssegos e ameixas em cada pacote devem ser iguais para cada fruta, isto é, essas quantidades são números que dividem exatamente as quantidades disponíveis dessas frutas. O maior número nessas condições é o máximo divisor comum de 42, 60 e 90, ou seja, 6. Assim, o maior número de pacotes que ela pode fazer é 6. Cada pacote ficará com 7 maçãs, 10 pêssegos e 15 ameixas.

$$\begin{array}{r|l} 42,60,90 & 2 \\ 21,30,45 & 3 \\ 7,10,15 & \overline{6} \end{array}$$

8. Cada uma das letras *P*, *Q*, *R* e *S* , na adição ao lado, representa um algarismo. Se a conta está correta, qual é o valor de $P+Q+R+S$?

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{P} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ + & \mathbf{Q} & \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \hline & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{array}$$

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 24

8. Resposta: alternativa B
Temos, de imediato, que S = 9. Então, 4 + R + 1 = 5, isto é, R = 0. Logo, P + Q = 6.
Portanto, P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15.

9. Qual é o valor de 25% de 2018 + 2018% de 25?

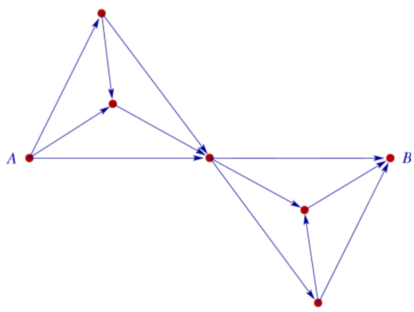
(A) 1009 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3027 (E) 5045

9. Resposta: alternativa A

$$25\%\text{ de }2018+2018\%\text{ de }25=\frac{25}{100}\cdot2018+\frac{2018}{100}\cdot25=\frac{2\cdot25\cdot2018}{100}=\frac{2018}{2}=1009.$$

10. Na figura, quantos caminhos diferentes existem para ir de *A* até *B* ao longo dos segmentos de reta, obedecendo aos sentidos indicados?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 16 (E) 20



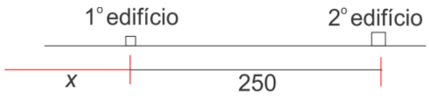
10. Resposta: alternativa D
Seja *C* o ponto intermediário. Para ir de *A* até *C* há 4 caminhos. Para ir de *C* até *B*, há 4 caminhos também. Portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem, para ir de *A* até *B*, há 4 x 4 = 16 caminhos.

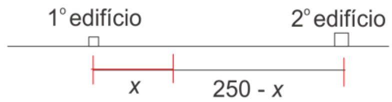
Problemas de 4 pontos

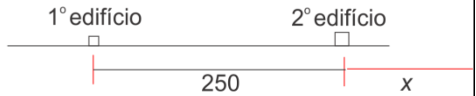
11. Dois edifícios localizam-se na mesma rua, a uma distância de 250 metros um do outro. No primeiro edifício moram 100 estudantes e no segundo, 150 estudantes. Onde deverá ser construído um ponto de ônibus, de modo que a soma das distâncias que todos esses estudantes devem andar para ir de seus edifícios até o ponto do ônibus seja a menor possível?

(A) Em frente ao primeiro edifício. (B) A 100 m do primeiro edifício. (C) A 100 m do segundo edifício.
(D) Em frente ao segundo edifício. (E) Em qualquer lugar entre os dois edifícios

11. Resposta: alternativa D
Seja *x* a distância que os estudantes do primeiro edifício devem andar. Supondo que o primeiro edifício esteja à esquerda do segundo, temos três possibilidades: o ponto à esquerda do primeiro edifício, o ponto entre os dois edifícios, incluindo os extremos (estar em frente a um edifício) ou estar à direita do segundo edifício. As somas das distâncias que os alunos devem percorrer são dadas, respectivamente, por:







$$100x+(250+x)150=250\cdot150+350x$$
$$100x+(250-x)150=250\cdot150-50x$$
$$(250+x)100+150x=250\cdot150+250x$$

O menor valor será dado pela segunda expressão, para *x* = 250. Logo, o ponto de ônibus deve ser construído em frente ao segundo edifício.

12. Pedro pediu dinheiro emprestado de seu pai e de seus dois irmãos para comprar um livro. Seu pai emprestou metade do total emprestado por seus irmãos e seu irmão mais velho emprestou um terço do que os outros dois emprestaram. O irmão mais novo lhe emprestou 10 reais. Quantos reais o livro custou?

(A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 32

12. Resposta: alternativa A
Sendo *x* a quantia emprestada pelo pai, então a quantia emprestada pelos dois irmãos foi 2x. Como o irmão mais novo emprestou 10 reais, o irmão mais velho emprestou 2x – 10 reais. Temos então
$2x-10=\dfrac{x+10}{3}\Leftrightarrow 6x-30=x+10\Leftrightarrow 5x=40\Leftrightarrow x=8$. O livro custou 8 + 16 = 24 reais.

13. Na igualdade verdadeira abaixo, quantas vezes aparece o termo 2018^2 dentro do radical?

$$\sqrt{2018^2+2018^2+\ldots+2018^2}=2018^{10}$$

(A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 2018^8 (E) 2018^{18}

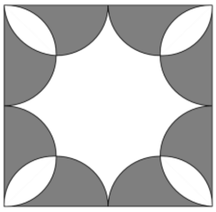
13. Resposta: alternativa E

$\sqrt{2018^2+2018^2+\ldots+2018^2}=2018^{10}\Leftrightarrow 2018^2+2018^2+\ldots+2018^2=\left(2018^{10}\right)^2=2018^{20}$.

Seja n o número de vezes em que 2018^2 aparece dentro do radical.

Temos, então, $n\cdot 2018^2=2018^{20}\Leftrightarrow n=\dfrac{2018^{20}}{2018^2}=2018^{20-2}=2018^{18}$.

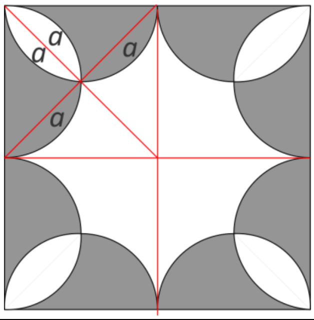
14. Na figura ao lado, o quadrado tem lado de medida 4 e nele foram desenhadas oito semicircunferências, e, em seguida pintadas de cinza algumas regiões. Qual é a área das partes do quadrado que não foram pintadas de cinza?



(A) $\dfrac{2}{\pi}$ (B) 8 (C) $6+\pi$ (D) $\dfrac{3}{\pi}-2$ (E) $\dfrac{3}{\pi}$

14. Resposta: alternativa B

Dividindo a figura em quatro quadrados iguais, vemos que, em cada quadrado, a área em cinza corresponde à metade da área de cada um desses quadrados. Veja, na figura ao lado, como deslocar os dois segmentos circulares em cinza para a interseção em branco dos dois semicírculos. Cada um dos quatro quadrados tem lado 2, logo sua área é 4, sendo a metade cinza, isto é, 2. Portanto, a área total em cinza é $4\times 2=8$.



15. Num certo dia, 40 ônibus viajaram cada um entre exatamente duas das cidades *M*, *N*, *O*, *P* e *Q*, de modo que 10 ônibus entraram ou saíram de *M*, 10 ônibus entraram ou saíram de *N*, 10 ônibus entraram ou saíram de *O* e 10 ônibus entraram ou saíram de *P*. Quantos ônibus entraram ou saíram da cidade *Q*?

(A) 0 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 40

15. Resposta: alternativa E

Uma viagem consiste na saída de uma das cidades e entrada em alguma das outras. Se 10 ônibus entraram ou saíram de cada uma das quatro cidades *M*, *N*, *O* e *P* temos então 40 entradas ou saídas, equivalente a 20 viagens. Como cada um dos 40 ônibus fez uma viagem, há um total de 40 viagens. Portanto 40 – 20 = 20 viagens têm a cidade *Q* como destino ou saída. Logo, entraram ou saíram de *Q* exatamente $2\times 20=40$ ônibus.

16. Na Faculdade de Humanas, um aluno pode estudar Línguas, História e Filosofia. Neste ano, 35% dos alunos de Línguas se matricularam em Inglês e 13% de todos os matriculados na Faculdade matricularam-se numa língua diferente do Inglês. Nenhum estudante se matriculou em mais de uma língua. Que porcentagem dos estudantes da Faculdade se matricularam em Línguas?

(A) 13% (B) 20% (C) 22% (D) 48% (E) 65%

16. Resposta: alternativa B
Se 35% dos estudantes de Línguas se matricularam em Inglês, então $100\%-35\%=65\%$ dos estudantes de Línguas estudam outra língua diferente do Inglês. Exatamente 13% dos alunos da Faculdade que estudam uma língua diferente do Inglês o fazem no curso de Línguas. Se x é o número de alunos de Línguas e y é o número de alunos da Faculdade de Humanas, então $0{,}65x=0{,}13y \Leftrightarrow 5x=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y}{5}=0{,}2y=20\%$ de y.

17. Calculando o valor da expressão $\dfrac{1}{9}\times 10^{2018}\times\left(10^{2018}-1\right)$, obtemos um número de quantos algarismos?

(A) 2017 (B) 2018 (C) 4035 (D) 4036 (E) 4037

17. Resposta: alternativa D
Temos $10^{2018}-1=1\underbrace{0000...0}_{\text{2018 zeros}}-1=\underbrace{9999...99}_{\text{2018 noves}}$.

Como $\dfrac{1}{9}\times 10^{2018}\times\left(10^{2018}-1\right)=10^{2018}\times\dfrac{10^{2018}-1}{9}=10^{2018}\times\dfrac{\overbrace{999...9}^{\text{2018 noves}}}{9}=10^{2018}\times\underbrace{1111...1}_{\text{2018 uns}}$, vemos que o número tem 2018 algarismos *um* acompanhado de 2018 algarismos *zero*, logo tem $2\times 2018=4036$ algarismos.

18. Quantos números de três algarismos são tais que, apagando o algarismo do meio, o número de dois algarismos restantes tem valor igual a um nono do número de três algarismos?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Resposta: alternativa D
Se a é o algarismo das centenas, b o algarismo das dezenas e c o algarismo das unidades do número de três algarismos, temos:

$$\frac{100a+10b+c}{9}=10a+c \Leftrightarrow 100a+10b+c=90a+9c \Leftrightarrow 10a+10b=8c \Leftrightarrow 10\left(a+b\right)=8c \Leftrightarrow a+b=\frac{8c}{10}.$$

Na última igualdade vemos que o único valor possível de c é 5 (qualquer outro valor de c está descartado, pois a fração deve ser um inteiro). Logo, $a+b=4$. Esta equação é satisfeita por apenas quatro pares de inteiros, lembrando que $a\neq 0$. Logo, há quatro números que satisfazem a condição do enunciado. Por curiosidade, os números são 405, 315, 225, 135.

19. Foram escritos 105 números para formar a sequência: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... (cada número n é escrito exatamente n vezes). Quantos desses números são divisíveis por 3?

(A) 4 (B) 12 (C) 21 (D) 30 (E) 45

19. Resposta: alternativa D

Os números são 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ..., $\underbrace{n,n,n,\ldots,n}_{n \text{ vezes}}$. Foram escritos 105 números, logo:

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=105 \Leftrightarrow n^2+n-210=0$. Assim, n = 14.

Portanto, a sequência escrita foi $1,2,2,3,3,3,\ldots,\underbrace{1414...14}_{14\,\text{vezes}}$. Os números divisíveis por 3 são 3, 6, 9, 12.

Como há três 3, seis 6, nove 9 e doze 12, a quantidade desses números é $3+6+9+12=30$.

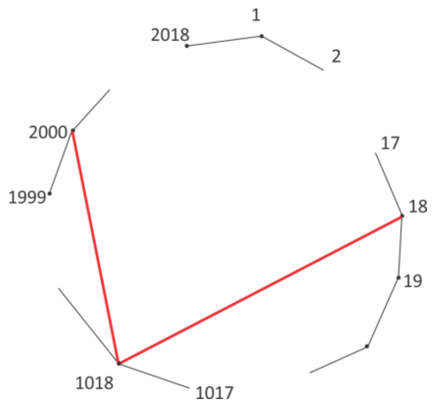
20. Um polígono regular de 2018 vértices tem esses vértices numerados de 1 a 2018. São então desenhadas duas diagonais, uma que liga os vértices de números 18 e 1018 e outra que liga os vértices de números 1018 e 2000. Quantos vértices possuem os três polígonos resultantes?

(A) 38, 983, 1001 (B) 37, 983, 1001 (C) 38, 982, 1001 (D) 37, 982, 1000 (E) 37, 983, 1002

20. Resposta: alternativa A

O polígono original fica dividido nos polígonos indicados na figura. Um deles tem os vértices de 1 a 18, o vértice 1018 e os vértices de 2000 a 2018, totalizando 18 + 1 + 2018 – 2000 + 1 = 38 vértices. O outro tem os vértices de 18 a 1018, totalizando 1018 – 18 + 1 = 1001 vértices e o terceiro tem os vértices de 1018 a 2000, totalizando 2000 – 1018 + 1 = 983 vértices.

Os polígonos têm, respectivamente, 38, 983 e 1001 vértices.



Problemas de 5 pontos

21. Vários números inteiros foram escritos no quadro-negro, incluindo o número 2018. A soma de todos esses números é 2018 e o produto deles é também 2018. Qual dos números a seguir poderia ser o número de inteiros escritos no quadro-negro?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

21. Resposta: alternativa B

Além do número 2018, foram escritos os números inteiros $a_1, a_2, \cdots a_n$. Temos:

$$\begin{cases} 2018 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2018 \\ 2018 \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 2018 \end{cases}$$

Segue, necessariamente, que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \\ a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \end{cases}$$

Nenhum desses números é nulo e a soma é zero, logo há alguns deles negativos e outros, positivos. Como o produto é positivo e igual a um, os fatores só podem ser 1 ou -1 e há uma quantidade par de números negativos. Como a soma é zero, a quantidade de parcelas iguais a um é igual à quantidade de parcelas -1. Como o número 2018 também deve ser escrito, concluímos que a quantidade total de números escritos no quadro-negro é ímpar. Dos números ímpares apresentados nas alternativas, 2017 e 2019, temos que eliminar este último, pois ele teria o número 2018 entre as parcelas (e fatores) e mais 2018 números $a_1, a_2, \cdots a_n$, metade dos quais seriam positivos e metade, negativos. Mas a metade de 2018 é 1009 e o produto de 1009 números negativos seria negativo. Logo, a resposta é 2017.

22. São dados quatro números inteiros positivos. Escolhendo três deles, podemos calcular sua média aritmética e somar o quarto número. Fazendo isso de todas as quatro maneiras possíveis, obtemos os resultados 17, 21, 23 e 29. Qual é o maior dentre os quatro números dados?

(A) 12 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 29

22. Resposta: alternativa C

Sejam x, y, w, z os números. Podemos escrever:

$$\begin{cases} \frac{x+y+w}{3} + z = 17 \\ \frac{x+y+z}{3} + w = 21 \\ \frac{x+w+z}{3} + y = 23 \\ \frac{y+w+z}{3} + x = 29 \end{cases}$$

Dessas igualdades, vemos que x é o maior dos números. Somando todas as equações, obtemos:

$$\frac{x+y+w}{3} + \frac{x+y+z}{3} + \frac{x+w+z}{3} + \frac{y+w+z}{3} + x + y + w + z = 17 + 21 + 23 + 29 \Leftrightarrow$$

$$2(x+y+w+z) = 90 \Leftrightarrow x+y+w+z = 45 (1)$$

A última das equações no sistema acima equivale a $y+w+z+3x = 87 \Leftrightarrow y+w+z = 87-3x (2)$

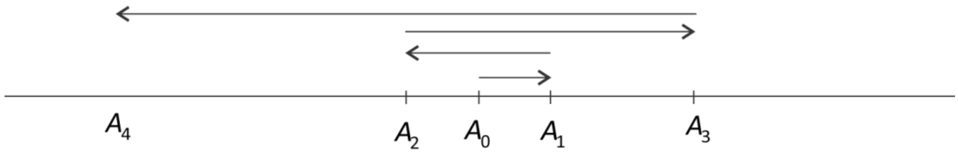
Substituindo (2) em (1) temos $x + 87 - 3x = 45 \Leftrightarrow 2x = 42 \Leftrightarrow x = 21$.

23. Os pontos $A_0, A_1, A_2, \ldots$ estão sobre uma reta de modo que $A_0A_1 = 1$ e o ponto A_n é o ponto médio do segmento $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ para todo inteiro não negativo *n*. Qual é o comprimento do segmento $\overline{A_0A_{11}}$?

(A) 171 (B) 341 (C) 512 (D) 587 (E) 683

23. Resposta: alternativa E

A_0 é o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$, A_1 é o ponto médio do segmento $\overline{A_2A_3}$, A_2 é o ponto médio do segmento $\overline{A_3A_4}$, etc. Na figura abaixo, vemos o que ocorre com os pontos:



Temos $A_0A_1 = 1,\ A_1A_2 = 2,\ A_2A_3 = 4,\ A_3A_4 = 8, \cdots$

Vemos que

$A_0A_3 = 1 - 2 + 4 = 3$

$A_0A_5 = 3 - 8 + 16 = 11$

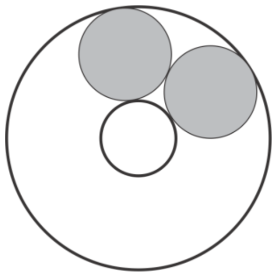
$A_0A_7 = 11 - 32 + 64 = 43$

$A_0A_9 = 43 - 128 + 256 = 171$

$A_0A_{11} = 171 - 512 + 1024 = 683$

24. No interior de uma coroa circular, podemos desenhar *n* círculos sem sobreposição e tangentes às duas circunferências. No exemplo ao lado, temos *n* = 2. Numa coroa circular cujas circunferências têm raios 1 e 9, respectivamente, qual é o maior valor possível de *n*?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

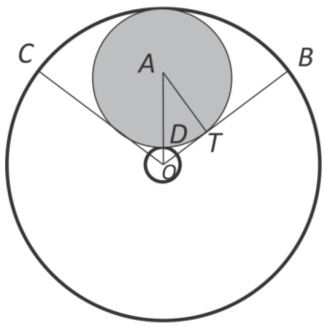


24. Resposta: alternativa C

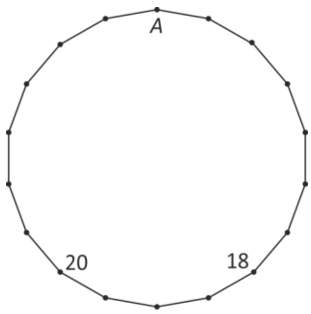
Na figura, o círculo cinza tem diâmetro igual a 9 – 1 = 8. Assim temos *AD* = 4 e *OD* = 1. Logo, *AO* = 5. Como *AT* = 4, no triângulo *ADT*, retângulo em *T*, temos $sen\left(\mathrm{A\widehat{O}T}\right) = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Como sen45$^{\mathrm{O}}$ é aproximadamente 0,71 e sen60$^{\mathrm{O}}$ é aproximadamente 0,87, concluímos que o ângulo *AÔT* tem medida entre 45$^{\mathrm{O}}$ e 60$^{\mathrm{O}}$, excluindo esses valores.

Assim, a medida do ângulo central *CÔB*, que contêm o círculo cinza, está entre 90$^{\mathrm{O}}$ e 120$^{\mathrm{O}}$. Como $\frac{360^0}{90^0} = 4$ e $\frac{360^0}{120^0} = 3$, concluímos que o maior número de círculos cinzentos que podemos desenhar é *n* = 3.



25. Júlia quer escrever um número em cada vértice de um polígono regular de 18 lados de forma que cada um deles seja a soma dos números escritos nos vértices adjacentes. Ela já escreveu dois números, conforme a figura. Qual número ela deverá escrever no vértice A?

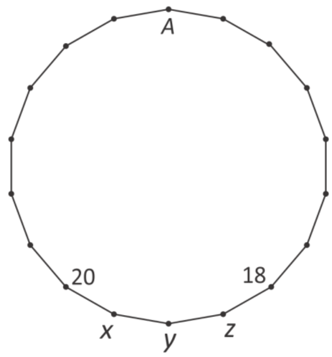


(A) –38 (B) –20 (C) 18 (D) 38 (E) 2018

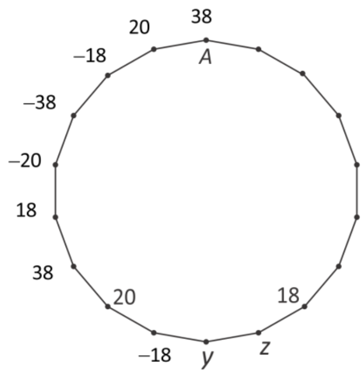
25. Resposta: alternativa D

Sejam x, y, z os números atribuídos aos vértices indicados na figura. Temos

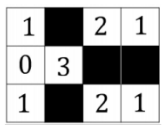
$$\left|\begin{array}{l} x=20+y \\ z=18+y \\ y=x+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=20+y+18+y \\ x=20+y \\ z=18+y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=-38 \\ x=-18 \\ z=-20 \end{array}\right.$$



Podemos numerar todos os vértices a partir dos números obtidos. Caminhando no sentido horário a partir de 20, determinamos os números conforme figura a seguir. Logo, A = 38.



26. Paulo desenhou um tabuleiro retangular 3×4 e pintou algumas das suas 12 casas de preto. Depois escreveu nas casas em branco o número de casas pretas vizinhas, como na figura. Paulo quer fazer o mesmo com um tabuleiro 2×1009, de 2018 casas, de modo a obter a maior soma possível dos números que forem escritos nas casas em branco. Qual é essa soma?

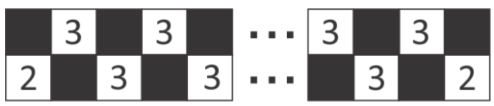


(A) 1262 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3025 (E) 3027

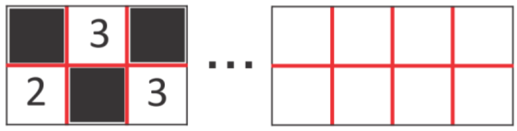
26. Resposta: alternativa D

Um tabuleiro com 2018 casas pode ser do tipo 1 x 2018 ou do tipo 2 x 1009. Escolhendo o primeiro tabuleiro, o maior número que Paulo poderá escrever numa casa branca é o 2, se ele alternar casas brancas e pretas, como na figura. Se a primeira casa for branca, a última será preta, logo a soma de todos os números escritos será $1008\times2+1=2017$.

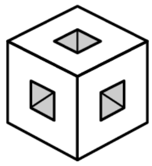
Num tabuleiro com 2 linhas e 1009 colunas, o maior número que ele pode escrever num quadrado branco é 3, se ele alternar as casas pretas e brancas como num tabuleiro de xadrez. O número 2 será obrigatoriamente escrito em duas casas, conforme vemos na segunda figura. A maior soma possível é igual a $3\times1007+2\times2=3025$.

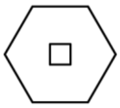


Outra solução: imagine que a área 2 x 1009 seja um grande jardim com canteiros quadrados brancos de lado um. O jardim tem uma cerca externa em seu perímetro e uma interna (em vermelho, na figura), para separar os canteiros brancos dos canteiros pretos. O número de cercas unitárias é igual ao número de canteiros pretos vizinhos aos canteiros brancos e o comprimento total dessa cerca é igual à soma dos números escritos nos quadrados brancos. O comprimento total da cerca é máximo na configuração vista anteriormente. O comprimento total dessa cerca é igual ao comprimento de uma cerca horizontal de tamanho 1009 e mais 1008 cercas verticais de tamanho 2, totalizando $1009+2\times1008=3025$.

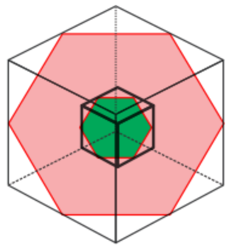


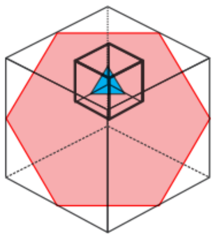
27. Sete cubos unitários foram retirados de um cubo de lado 3, conforme figura. Em seguida, o cubo foi cortado por um plano passando pelo centro do cubo e perpendicular a uma de suas quatro diagonais internas. Qual é o aspecto dessa secção?

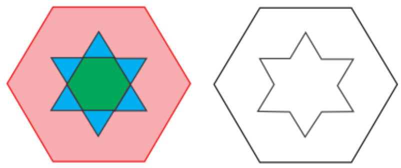


(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

27. Resposta: alternativa A
Na figura, vemos o cubo maior e o buraco do cubo menor central, que foi retirado. A secção do plano no cubo maior consiste no hexágono regular vermelho, na figura. Esse mesmo plano determina uma secção hexagonal no cubo menor do centro, mas como esse cubo é vazio, temos um buraco hexagonal, em verde na figura. Entretanto, foram retirados mais 6 cubos menores. Vemos, na figura à esquerda, como seria a seção do plano no cubo menor em contato com a face superior do cubo menor central. Esta seção é um triângulo equilátero. Isto ocorre para todos os seis cubos menores, acrescentando buracos triangulares em cada uma dos lados do hexágono da figura acima. Portanto, a secção do plano terá um contorno hexagonal regular e internamente terá um buraco na forma de uma estrela regular de seis pontas, conforme mostrado à direita.







28. As casas de um tabuleiro 2×3 podem ser numeradas de 1 a 6 de modo que a soma dos números de cada linha e cada coluna seja um número divisível por 3. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?

(A) 18 (B) 36 (C) 42 (D) 45 (E) 48

28. Resposta: alternativa E
Os restos da divisão dos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 por 3 são, respectivamente, 1, 2, 0, 1, 2, 0. Isto significa que na primeira linha devem aparecer três números cujos restos são 0,1,2 em qualquer ordem. Uma vez escritos esses números, a linha de baixo fica determinada, pois cada um dos seus números, somado com o de cima, deve resultar um número divisível por 3.
Para escolher o número da primeira linha e primeira coluna temos 3.2 possibilidades (temos três números diferentes, com duas ocorrências cada um). Para escolher o número da primeira linha e segunda coluna temos 2.2 possibilidades (dois números diferentes, com duas ocorrências) e para escolher o número final temos 1.2 possibilidades (um número, duas ocorrências). Portanto, o tabuleiro pode ser preenchido de $(3\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdot(1\cdot2)=48$ maneiras diferentes.

29. Ed montou um cubo colando vários cubinhos iguais e depois pintou algumas faces desse cubo grande. Entretanto, sua irmã derrubou o cubo, que se quebrou descolando todos os cubinhos. Ela contou 45 cubinhos que não tinham nenhuma face pintada. Quantas faces do cubo grande Ed tinha pintado?

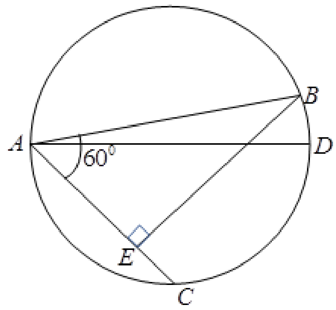
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

29. Resposta: alternativa C

Cubos formados por cubinhos menores iguais podem ter 8, 27, 64, 125,... desses cubinhos. Como 45 cubinhos não foram pintados, o cubo de Ed tem pelo menos 64 cubinhos. Se ele pintar uma face desse cubo, 16 cubinhos terão uma face pintada, sobrando 64 – 16 = 48 cubinhos sem nenhuma face pintada. Se ele pintar mais uma face adjacente a essa, serão pintados mais 16 – 4 = 12 cubinhos e sobrarão apenas 48 – 12 = 36 cubinhos sem faces pintadas. Logo, o cubo de Ed tem mais de 64 cubinhos. Suponhamos que seja um cubo formado por 125 cubinhos. Pintando a face superior, sobram 125 – 25 = 100 cubinhos sem pintar. Pintando a base, que é a face oposta, restam 100 – 25 = 75 cubinhos sem pintar. Pintando uma face lateral, que já tem 10 cubinhos com uma face pintada, restam 75 – (25 – 10) = 75 – 15 = 60 cubinhos sem faces pintadas. Finalmente, pintando a face lateral oposta a essa última, restam 60 – 15 = 45 cubinhos sem faces pintadas. Logo, neste caso, foram pintadas quatro faces do cubo grande. Não há outra possibilidade, pois um cubo com lado 6, ou seja, formado por $6^3 = 216$ cubinhos, tem pelo menos $6^3 - 4^3 = 216 - 64 = 152$ cubinhos cujas faces não podem ser pintadas.

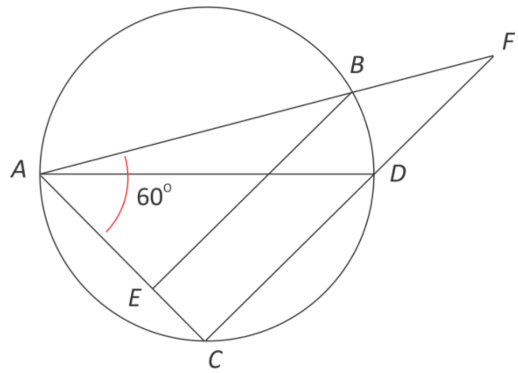
Outra solução: Seja *n* a medida do lado do cubo formado por cubinhos de lado 1. Os cubinhos não pintados formam um paralelepípedo reto cujos lados medem no máximo *n* (nenhuma face pintada) e no mínimo $n-2$ (todas as faces pintadas). As dimensões desses paralelepípedos são as três combinações de $n, n-1, n-2$, começando do menor com $(n-2)^3$ ao maior com n^3. Assim, $(n-2)^3 \leq 45 \leq n^3$, logo *n* = 4 ou *n* = 5. Portanto, o paralelepípedo formado pelas faces não pintadas tem uma das dimensões $2\times2\times2,\ 2\times2\times3, \ldots,\ 4\times5\times5,\ 5\times5\times5$. Como $45 = 3\times3\times5$, as dimensões correspondentes são $n-2\times n-2\times n$ com *n* = 5. Portanto, o cubo formado pelos cubinhos de lado 1 tem dimensões $5\times5\times5$ e dois pares de faces opostas foram pintadas, num total de quatro faces pintadas, deixando a parte $3\times3\times5 = 45$ não pintada.

30. Duas cordas *AB* e *AC* foram desenhadas na circunferência de diâmetro *AD*. Sendo $\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $m\left(B\hat{A}C\right) = 60^{\circ}$, *AB* = 24 cm e *EC* = 3, qual é o comprimento da corda *BD*?



(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) 3 (D) $2\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{2}$

30. Resposta: alternativa D



Sendo *AB* = 24, temos *AE* = 12, pois o triângulo *AEB* é metade de um triângulo equilátero. Traçando o segmento *CD*, verificamos que o triângulo *ACD* é retângulo em *C*, pois *AD* é diâmetro. Prolongando *CD* e *AB* até se encontrarem em *F*, temos $FB \cdot FA = FD \cdot FC$ (*) (potência do ponto *F* em relação à circunferência). No triângulo *ACF*, semelhante ao triângulo *AEB*, temos *AC* = 12 + 3 = 15, logo *AF* = 30. Portanto, *FB* = 30 – 24 = 6. Como $BE = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$, temos $\frac{BE}{FC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{12\sqrt{3}}{FC} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow FC = 15\sqrt{3}$. Substituindo na equação (*), temos $6 \cdot 30 = FD \cdot 15\sqrt{3} \Leftrightarrow FD = \frac{6 \cdot 30}{15\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. Logo, $CD = FC - FD = 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$.

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *ACD*, temos $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 225 + 363 = 588$ e no triângulo retângulo *ABD*, temos $AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow 588 = 576 + BD^2 \Leftrightarrow BD^2 = 12 \Leftrightarrow BD = 2\sqrt{3}$.

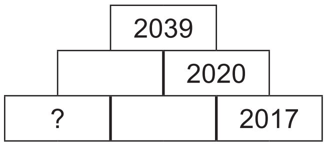
Canguru de Matemática Brasil – 2017

Prova Nível J – Respostas

Problemas de 3 pontos

Questão 1

No diagrama, cada número é a soma dos dois números debaixo dele. Qual é o número que deve ser escrito na casa com o ponto de interrogação?



(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 19

1. Alternativa B
Na casa vazia da camada do meio o número a ser escrito é 2039 – 2020 = 19. Na camada de baixo, o número da casa central é 2020 – 2017 = 3. Portanto, na casa com o ponto de interrogação, deve ser escrito o número 19 – 3 = 16.

Questão 2

Pedro escreveu a palavra CANGURU numa peça de vidro transparente. O que ele irá ver se virar o vidro do outro lado e então rodar a peça de 180°?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

2. Alternativa C
Ao virar o vidro do outro lado, Pedro verá: 

Em seguida, fazendo uma rotação de 180° ou meia volta, Pedro irá ver: 

Questão 3

Ângela fez uma peça decorativa sobrepondo asteroides (figuras que parecem estrelas) cinzentas e brancas. As áreas dos asteroides são 1 cm², 4 cm², 9 cm² e 16 cm². Qual é a área total das regiões cinzentas visíveis na figura que representa a peça criada por Ângela?

(A) 9 cm² **(B)** 10 cm² **(C)** 11 cm² **(D)** 12 cm² **(E)** 13 cm²

3. Alternativa B
A área da região cinza mais interna é igual a $4 - 1 = 3$ cm² e a área da região cinzenta maior é $16 - 9 = 7$ cm².
Portanto, a área total cinzenta da peça criada por Ângela é $3 + 7 = 10$ cm².

Questão 4

Maria tem 24 reais para dar aos seus quatro filhos. Um deles não tem nada e os outros três têm 12 reais cada um. Quantos reais ela deve dar para cada um desses três filhos, de modo que, ao fim da doação, todos os quatro filhos tenham quantias iguais?

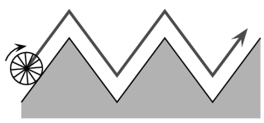
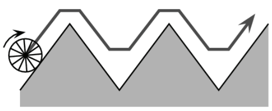
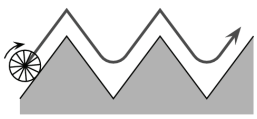
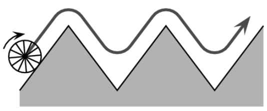
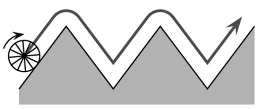
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

4. Alternativa C
Seja x a quantia que ela deve dar para cada um dos três filhos que já têm 12 reais. O que restar ela irá dar para o quarto filho, que ficará com $24 - 3x$ reais. Temos, então, $24 - 3x = 12 + x \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$.

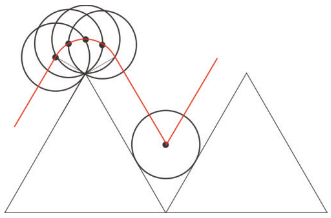
Outra maneira: Os filhos possuem um total de 36 reais e com a doação de 24 reais ficarão com 60 reais. Esses 60 reais divididos por quatro resultam 15, logo ela dá $15 - 12 = 3$ reais para cada um dos três irmãos.

Questão 5

Qual das figuras a seguir representa o caminho que o centro da roda faz enquanto a roda rola ao longo do percurso em zigue-zague?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)


5. Alternativa E



A distância do centro da roda ao percurso é sempre igual ao raio da roda. Assim, exceto nos pontos mais altos e nos pontos mais baixos, o caminho do centro da roda é um segmento paralelo ao percurso. Nos pontos mais altos, o centro da roda descreve um arco de circunferência, porque a roda gira ao redor do ponto de apoio, mas nos pontos mais baixos a roda muda imediatamente do ponto de apoio no declive para o ponto de apoio no aclive, sem que o centro descreva arcos.

Questão 6

Algumas garotas estavam dançando em roda. Antonia era a quinta à esquerda de Bianca e a oitava à direita de Bianca. Quantas garotas havia na roda?

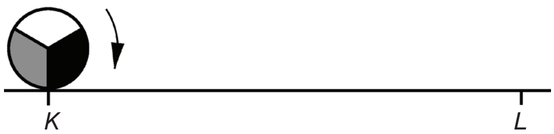
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 15

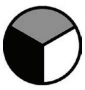
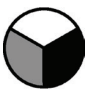
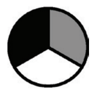
6. Alternativa C

À esquerda de Bianca havia quatro garotas entre ela e Antonia e à direita, havia sete garotas. Portanto, havia na roda 4 + 7 + 2 = 13 garotas.

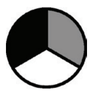
Questão 7

O círculo de raio 1 rola sem escorregar sobre uma reta, do ponto K ao ponto L, sendo $KL = \dfrac{11}{\pi}$, conforme mostrado na figura. Como aparecerá o círculo no final do percurso em L?



(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

7. Alternativa E

Quando o círculo gira uma volta inteira, anda horizontalmente o equivalente ao seu perímetro ℓ, igual a $2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Como $\dfrac{KL}{\ell} = \dfrac{\frac{11}{\pi}}{2\pi} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$, concluímos que o círculo anda o equivalente a 5 voltas e meia. Portanto, sua posição será .

Questão 8

Marcos joga xadrez. Nesta temporada ele jogou 15 vezes, das quais venceu nove. Ele ainda tem mais cinco partidas para jogar. Qual será seu índice percentual de sucesso se ele vencer todas essas cinco partidas?

(A) 60% **(B)** 65% **(C)** 70% **(D)** 75% **(E)** 80%

8. Alternativa C
Se o número de vitórias é 9 + 5 = 14, num total de 15 + 5 = 20 partidas, o índice de sucesso é $\frac{14}{20} = 0{,}7 = 70\%$.

Questão 9

Um oitavo dos convidados de um casamento eram crianças. Três sétimos dos adultos convidados eram homens. Que fração dos convidados eram mulheres adultas?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{1}{7}$ **(E)** $\frac{3}{7}$

9. Alternativa A
O número de adultos no casamento era de sete oitavos do total de convidados. Se três sétimos dos adultos eram homens, então quatro sétimos eram mulheres. Portanto, a fração dos convidados que eram mulheres adultas era $\frac{7}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$.

Questão 10

A professora levou para a sala uma caixa contendo 203 fichas vermelhas, 117 fichas brancas e 28 azuis. Ela pediu então para os alunos irem até a caixa e, sem olhar, tirar uma ficha. Quantos estudantes terão que tirar fichas até seja possível afirmar que pelo menos três fichas de mesma cor já foram retiradas?

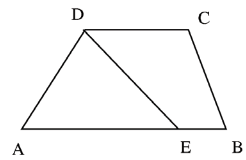
(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 28 **(E)** 203

10. Alternativa C
Se tivessem sido retiradas no máximo duas fichas de cada cor, apenas $2 \times 3 = 6$ fichas teriam sido retiradas. Como sete estudantes retiraram fichas, pelo menos uma das cores tinha três fichas retiradas.

Problemas de 4 pontos

Questão 11

No quadrilátero $ABCD$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, sendo $AB = 50$ e $CD = 20$. Sendo E um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que o segmento $\overline{DE}$ divide o quadrilátero em duas partes de mesma área, qual é o comprimento AE?



(A) 25 **(B)** 30 **(C)** 35 **(D)** 40 **(E)** 45

11. Alternativa C
O quadrilátero é um trapézio de bases $AB = 50$ e $CD = 20$ e altura h. Então sua área é $\frac{(20 + 50)h}{2} = 35h$ e a área do triângulo AED é $\frac{AE \cdot h}{2}$, metade da área do trapézio. Logo, $\frac{AE \cdot h}{2} = \frac{35 \cdot h}{2} \Leftrightarrow AE = 35$.

Questão 12

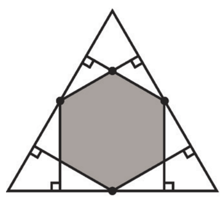
Quantos números naturais A possuem a propriedade de que somente um dos números A e $A + 20$ possui exatamente quatro algarismos?

(A) 19 **(B)** 20 **(C)** 38 **(D)** 39 **(E)** 40

12. Alternativa E
A pode ter três algarismos e $A + 20$ ter quatro algarismos ou A pode ter quatro algarismos e $A + 20$ ter cinco algarismos. Como $1\,000 - 20 = 980$, se os valores de A forem de 980 a 999, então A terá três algarismos, mas $A + 20$ terá quatro algarismos e como $10\,000 - 20 = 9\,980$, se os valores de A forem de 9 880 a 9 999, então A terá quatro algarismos e $A + 20$ terá cinco algarismos. Há 20 números de 980 a 999 e mais 20 números de 9 980 a 9 999, totalizando 40 números.

Questão 13

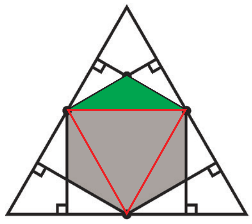
Seis perpendiculares foram desenhadas a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura. Que fração da área do triângulo é a área do hexágono cinzento delimitado por essas perpendiculares?



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{4}{9}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

13. Alternativa D

Unindo os pontos médios, obtemos um triângulo equilátero (em vermelho, na figura). O triângulo original fica assim dividido em quatro triângulos equiláteros congruentes. Cada um desses triângulos menores fica dividido, por suas alturas, em três triângulos menores iguais ao triângulo em verde, figura. A área do triângulo original é igual à soma das áreas de $4 \times 3 = 12$ triângulos verdes, enquanto que o hexágono cinzento tem área igual à soma das áreas de seis triângulos verdes. Portanto, a fração da área do hexágono cinzento em relação à área do triângulo original é $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.



Questão 14

A soma dos quadrados de três números inteiros positivos consecutivos é 770. Qual é o maior desses números?

(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 19

14. Alternativa C

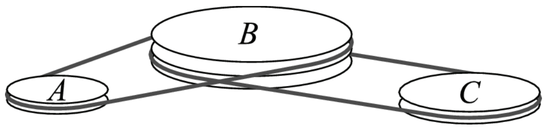
Sejam $x - 1$, x e $x + 1$ os números inteiros positivos. Então,

$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 770 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 770 \Leftrightarrow 3x^2 = 770 - 2 \Leftrightarrow$
$x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16$.

O maior dos três números é $x + 1 = 17$.

Questão 15

Um conjunto de polias consiste nas rodas A, B e C, em que as correias giram sem escorregar. Enquanto B dá quatro voltas completas, a roda A dá cinco voltas completas e enquanto B dá seis voltas completas, a roda C dá sete voltas completas. Se o comprimento da circunferência C é 30 cm, qual é o comprimento da circunferência A?



(A) 27 cm **(B)** 28 cm **(C)** 29 cm **(D)** 30 cm **(E)** 31 cm

15. Alternativa B

Os perímetros de duas rodas conectadas por uma correia é inversamente proporcional ao número de voltas que essas rodas dão, quando movidas. Podemos representar esse fato pelas igualdades $n_A \times p_A = n_B \times p_B$ e $n_B \times p_B = n_C \times p_C$. Temos $n_A = 5 \Leftrightarrow n_B = 4$ e $n_B = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n_C = 7$. Podemos escrever então:

$$\left| \begin{array}{l} 5p_A = 4p_B \\ 6p_B = 7p_C \end{array} \right. \Rightarrow \frac{5p_A}{7p_C} = \frac{4p_B}{6p_B} \Leftrightarrow p_A = \frac{28}{30}p_C.$$ Como $p_C = 30$ cm, concluímos que

$$p_A = \frac{28}{30} \cdot 30 = 28 \text{ cm}.$$

Questão 16

Pedro quer montar um programa de corridas para os próximos meses. Toda semana ele pretende correr três vezes por semana, nos mesmos dias da semana e em dias não consecutivos. Quantos programas diferentes ele pode montar?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 35

16. Alternativa B
Numerando os dias da semana de 1 a 7, vamos listar as possibilidades que Pedro tem para montar o programa:
Se ele começar no dia 1, não poderá escolher nem o 7 nem o 2, restando os dias 3, 4, 5 e 6. Então ele pode escolher 3 e 5, 4 e 6 ou 3 e 6. Os dias de corrida serão 1, 3, 5 ou 1, 4, 6 ou 1, 3, 6.
Se ele começar no dia 2, não poderá escolher o 3 nem o 1, restando os dias 4, 5, 6 e 7. Então poderá escolher 4 e 6 ou 5 e 7 ou 4 e 7. Os dias de corrida serão 2, 4, 6 ou 2, 5, 7 ou 2, 4, 7.
Se ele começar no dia 3, não poderá escolher 4 e 2, restando 5, 6, 7 e 1. Poderá escolher os dias 3, 5, 7 ou mais dois conjuntos de dias que já estão na lista acima.
Os dias de números 4, 5, 6 e 7 já apareceram três vezes cada um na lista acima, que, portanto, está completa.
Logo Pedro pode montar sete programas diferentes.

Questão 17

Quatro irmãos têm diferentes alturas. Tobias é mais baixo do que Vítor pela mesma distância que é mais alto do que Pedro. Oscar é mais baixo que Pedro pela mesma distância. Tobias tem 184 cm de altura e a média das alturas dos quatro irmãos é 178 cm. Qual é a altura de Oscar, em centímetros?

(A) 160 **(B)** 166 **(C)** 172 **(D)** 184 **(E)** 190

17. Alternativa A
Seja x a diferença entre as alturas de Vítor e Tobias. Como Tobias tem 184 de altura, Vítor, que é mais alto, tem $184 + x$, Pedro, que é mais baixo que Tobias, pela mesma diferença, tem $184 - x$ e Oscar, que é mais baixo que Pedro, pela mesma diferença, tem $184 - 2x$, todas as medidas em centímetros. Utilizando a média das quatro alturas, temos:

$$\frac{184 + x + 184 + 184 - x + 184 - 2x}{4} = 178 \Leftrightarrow 4 \cdot 184 - 2x = 4 \cdot 178 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \cdot (184 - 178) \Leftrightarrow 2x = 24.$$

A altura de Oscar, em centímetros, é $184 - 2x = 184 - 24 = 160$.

Questão 18

Durante nossas férias, choveu sete vezes. Se choveu de manhã, então fez sol à tarde. Se choveu à tarde, então de manhã fez sol. Houve cinco manhãs ensolaradas e seis tardes ensolaradas. Nossas férias duraram quantos dias?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

18. Alternativa C
Um dia é composto de uma manhã e de uma tarde. Seja x o número de manhãs em que choveu e y o número de tardes em que choveu. Temos $x + y = 7$. O número de manhãs ensolaradas é 5 e o número de tardes ensolaradas é 6. Portanto o número de dias de férias é $\frac{x + y + 5 + 6}{2} = \frac{7 + 5 + 6}{2} = 9$.

Questão 19

Júlia quer escrever um número inteiro em cada uma das casas do tabuleiro 3 × 3 ao lado de modo que as somas dos números escritos em todos os tabuleiros 2 × 2 contidos no tabuleiro maior sejam iguais. Ela já escreveu alguns números, conforme mostrado na figura. Qual número ela deverá escrever na casa assinalada com o ponto de interrogação?

3		1
2		?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 5

19. Alternativa A
Se x é o número a ser escrito na casa abaixo da casa com o número 3, então $x + 2$ é o número a ser escrito na casa abaixo da casa com o número 1, já que a soma de todos os números no tabuleiro de contorno vermelho deve ser igual à soma de todos os números no tabuleiro de contorno verde, sendo a coluna cinza comum aos dois. Portanto, nos dois tabuleiros 2 × 2 inferiores, $x + 2 = x + 2 + ?$. Logo, na casa assinalada com o ponto de interrogação deve ser escrito o número zero.

3		1
x		$x + 2$
2		?

Questão 20

Sete números naturais $a_1, a_2, ..., a_7$ são escritos em sequência. A soma desses números é 2017 e dois números vizinhos quaisquer diferem por uma unidade. Quais desses números podem ser iguais a 286?

(A) somente a_1 ou a_7 **(B)** somente a_2 ou a_6 **(C)** somente a_3 ou a_5
(D) somente a_4 **(E)** todos eles

20. Alternativa A
A sequência dos sete números naturais consecutivos tem três números ímpares e quatro números pares ou então tem três números pares e quatro números ímpares, já que números sucessivos alternam sua paridade. Como a soma dos sete números é 2017, número ímpar, forçosamente há três ímpares e quatro pares. Então a_2, a_4 e a_6 são os números ímpares e não podem ser iguais a 286. Se $a_3 = 286$ então a maior soma da dos números da sequência é $288 + 287 + 286 + 287 + 288 + 289 + 290 = 2\,015$ e se $a_5 = 286$ ocorre o mesmo. Logo, os únicos termos que podem ser iguais a 286 são o a_1 e o a_7, produzindo, respectivamente, as sequências 286, 287, 288, 289, 290, 289, 288 e 288, 289, 290, 289, 288, 287, 286, cujos termos somam 2017.

Problemas de 5 pontos

Questão 21

Há quatro crianças com menos de 18 anos e com idades diferentes. Se o produto de suas idades é 882, qual é a sua soma?

(A) 23 **(B)** 25 **(C)** 27 **(D)** 31 **(E)** 33

21. Alternativa D
Fatorando o número 882, podemos escrever $882 = 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$. Queremos reagrupar os seis fatores em quatro fatores, representando as idades das crianças, menores do que 18. Isto pode ser feito de maneira única como $882 = 1 \times 7 \times 9 \times 14$, cuja soma é $1 + 7 + 9 + 14 = 31$.

Questão 22

Num dado cúbico especial, os números escritos nas faces são –3, –2, –1, 0, 1, 2. Se o dado for lançado duas vezes e os números obtidos multiplicados, qual é a probabilidade que o produto seja negativo?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{11}{36}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{13}{36}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

22. Alternativa C
O produto de dois números é negativo quando um deles é negativo e o outro, positivo. A probabilidade de sair um número negativo no primeiro lançamento e um positivo no segundo é $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$, admitindo-se que os resultados sejam equiprováveis. Mas pode ocorrer que saia um número positivo no primeiro lançamento e, neste caso, o número no segundo lançamento deve ser negativo. A probabilidade de isto ocorrer é $\frac{2}{6} \times \frac{3}{6}$. Portanto, a probabilidade que o produto seja negativo é $2 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Questão 23

Repetindo um par de algarismos *ab* três vezes, escrevemos um número de seis algarismos. Este número é divisível por qual dos números a seguir?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 13

23. Alternativa E
O número n formado é $ababab = ab \cdot 10\,000 + ab \cdot 100 + ab = ab \cdot 10\,101$. O fator 10 101 decomposto em fatores primos é $10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$. Portanto, n é divisível por 13.

Questão 24

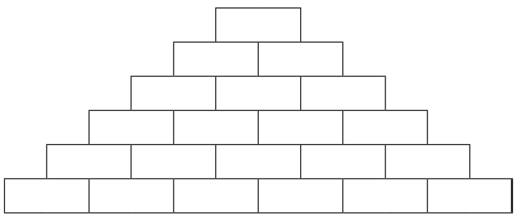
Joana quer fazer uma lista com todas as senhas de sete algarismos nas quais um mesmo dígito aparece tantas vezes quanto ele vale e os algarismos iguais sempre aparecem juntos. Por exemplo, 4444333 e 1666666 são senhas desse tipo. Quantas senhas possíveis ela poderia escrever?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 13

24. Alternativa E
Joana pode usar um único algarismo, caso singular: 777777.
Pode usar dois algarismos diferentes, lembrando que $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. O enunciado mostra dois exemplos desse tipo. Temos seis tipos de senhas diferentes, pois a ordem dos algarismos é relevante.
Ela pode usar três algarismos diferentes, pois $7 = 1 + 2 + 4$. Exemplo: 1224444. São seis casos, conforme observação anterior. Portanto, a lista de Joana terá $1 + 6 + 6 = 13$ senhas.

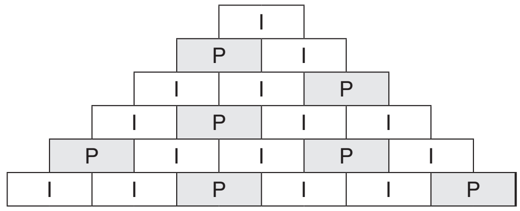
Questão 25

Paulo quer escrever um número natural em cada retângulo do diagrama ao lado de modo que cada número escrito seja igual à soma dos dois números que aparecem nos retângulos logo abaixo do retângulo em que foi escrito o número. No máximo, quantos números ímpares Paulo poderá escrever?

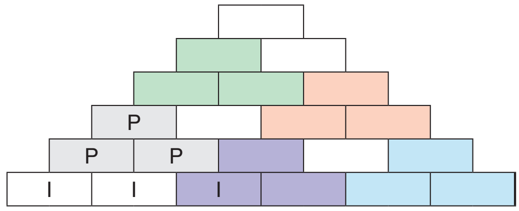


(A) 13 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** 17

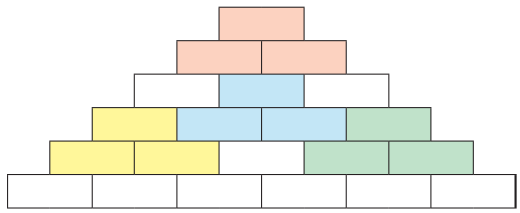
25. Alternativa B



Na figura ao lado, vemos como obter 14 números ímpares e sete números pares no diagrama.
Vamos mostrar como esse é o menor número de pares e, portanto, o maior número de ímpares que Paulo pode escrever.
Se a linha da base na figura contiver apenas números ímpares, então teremos 15 números pares nas demais casas.
Se na linha da base houver exatamente um número par, existirá um grupo de três ímpares vizinhos (na figura ao lado, estão à esquerda, mas poderiam estar à direita). Sobre esses três ímpares, estarão três pares. Dados três números em que um deles é a soma dos outros dois, pelo menos um é par, já que a soma de dois números ímpares é par. Assim, nas quatro regiões com três casas cada uma, haverá pelo menos um número par. Esta situação mostra que há pelo menos sete números pares.



Vamos supor que haja exatamente dois números pares na linha da base. Um dos casos nesta situação é o do exemplo acima, no qual há exatamente sete números pares. Podemos verificar outras situações, como dois pares vizinhos ou dois pares separados por um número ímpar, sempre partindo da linha da base: sempre haverá pelo menos sete pares.
Caso haja três ou mais pares na linha da base, basta verificar, na figura ao lado, que em cada uma das quatro regiões coloridas haverá pelo menos um número par, ou seja, o diagrama conterá no mínimo sete números pares.
Logo, Paulo poderá escrever no diagrama no máximo 21 – 7 = 14 números ímpares.



Questão 26

Lisa somou as medidas dos ângulos internos de um polígono convexo e obteve corretamente 2017°. O problema é que ela esqueceu um dos ângulos. Qual é a medida do ângulo que ela esqueceu?

(A) 37° **(B)** 53° **(C)** 97° **(D)** 127° **(E)** 143°

26. Alternativa E
A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é um múltiplo de 180°. Portanto, o número x da medida do ângulo que ela esqueceu é tal que $2017 + x$ é múltiplo de 180, sendo $0 < x < 180$. Como a soma tem o zero como algarismo das unidades, podemos testar 53 e 143, dentre as opções. O número é $x = 143$, pois $2017 + 143 = 2160 = 12 \times 180$.

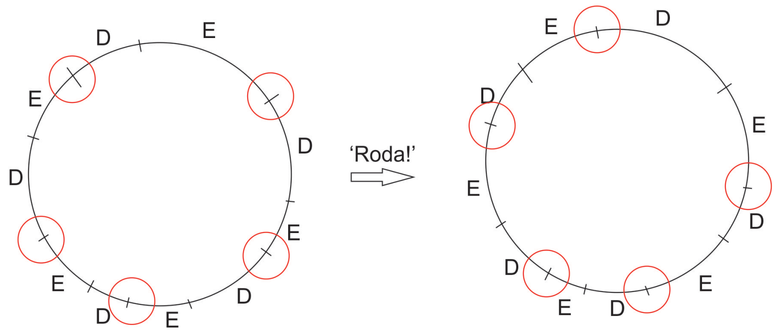
Questão 27

Trinta dançarinos formaram uma roda e ficaram olhando para o centro da mesma. Após o comando “Esquerda!”, alguns deles olharam para a esquerda e outros para a direita e os dez dançarinos que ficaram de frente um para o outro disseram: “Alô!”. Então foi dado o comando “Roda!” e todos os dançarinos fizeram meia-volta. Novamente, os que ficaram de frente um para o outro disseram “Alô!”. Quantos disseram “Alô!” desta vez?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 20 **(E)** 24

27. Alternativa B

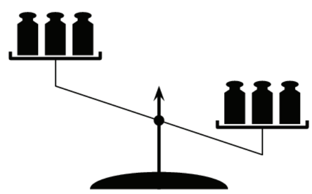
Representando por D os dançarinos que olharam à direita e por E, os que olharam à esquerda após o comando “Esquerda!”, vemos que, na roda formada por essas letras representando os 30 dançarinos, os pares DE representam os dançarinos que disseram “Alô!” a primeira vez. Como 10 dançarinos falaram, apareceram na roda cinco pares *DE*, não necessariamente juntos. Esses pares aparecem quando uma sequência de *D* se alterna com uma sequência de *E*, no sentido anti-horário. Após o comando “Roda!”, cada sequência de *E* vira uma sequência de *D* e vice-versa e novamente aparecem os pares *DE* nos pontos em que as sequências se alternam. Esquematicamente, podemos representar a roda antes e depois do comando “Roda!” da seguinte maneira, onde as letras *E* e *D* representam sequências de dançarinos:



Concluímos assim que o número de pares *DE* não se altera após o comando, de modo que o número de dançarinos que disseram “Alô!” na segunda vez também é 10.

Questão 28

Três pesos foram postos em cada prato de uma balança e o resultado está na figura ao lado. As massas desses pesos são de 101, 102, 103, 104, 105 e 106 gramas. Qual é a probabilidade de que o peso de 106 gramas esteja no prato mais baixo?

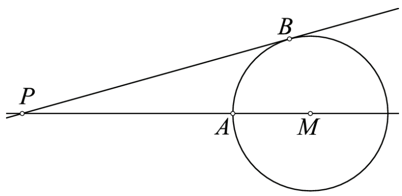


(A) 75% **(B)** 80% **(C)** 90% **(D)** 95% **(E)** 100%

28. Alternativa B
Os pesos são 101 + **0**, 101 + **1**, 101 + **2**, 101 + **3**, 101 + **4** e 101 + **5** gramas. O peso 106 = = 101 + 5 estará no prato de baixo quando, junto com os outros dois pesos, a soma das massas for maior do que a soma das massas dos outros três pesos. Basta contar os casos em que a soma de três dos números 0, 1, 2, 3 e 4 é maior ou igual a 8 (pois a soma dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5 é 15). Se o peso de 106 gramas estiver no prato à direita, o prato não estará mais baixo em somente duas escolhas de massas: 5 + 0 + 1 e 5 + 0 + 2. Nas demais escolhas o prato estará mais baixo. O total de escolhas é $\binom{6}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$. Portanto, a probabilida-de de o peso de 106 gramas estar no prato de baixo é $\frac{10-2}{10} = \frac{8}{10} = 80\%$.

Questão 29

A e *B* são pontos da circunferência de centro *M* e a reta *PB* é tangente à circunferência em *B*. As distâncias *PA* e *BM* são números inteiros tais que *PB* = *PA* + 6. Quantos valores são possíveis para a distância *BM*?



(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

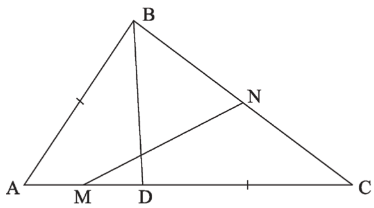
29. Alternativa D
Fazendo $PA = x$ e $AM = BM = y$, temos $PB = x + 6$ e como $PB^2 = PA \cdot (PA + 2AM)$, pelo teorema da potência de um ponto em relação a uma circunferência, temos:

$(x+6)^2 = x(x+2y) \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2xy \Leftrightarrow 36 = 2xy - 12x \Leftrightarrow 36 = x(2y-12) \Leftrightarrow x(y-6) = 18.$

Sendo x e y números inteiros, vemos que x e $y - 6$ são divisores positivos de 18. Temos então 6 valores para $y - 6$ e, consequentemente, 6 valores para $y = BM$.

Questão 30

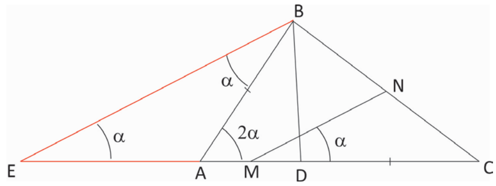
No triângulo *ABC*, escolhemos o ponto *D* sobre o lado *AC* tal que *CD* = *AB*. Os pontos *M* e *N* são os pontos médios dos segmentos *AD* e *BC*, respectivamente. Se $m(N\hat{M}C) = \alpha$, quanto vale $m(B\hat{A}C)$?



(A) 2α **(B)** $90° - \alpha$ **(C)** $45° + \alpha$ **(D)** $90° - \frac{\alpha}{2}$ **(E)** $60°$

30. Alternativa A

Seja E um ponto da reta AC tal que $AE = AB = CD$. Como M é o ponto médio de AD e $AE = CD$, concluímos que $MA + AE = MD + DC$, logo M é ponto médio do segmento CE. Como N é ponto médio de BC, concluímos que os triângulos MCN e ECB são semelhantes, logo $m(N\hat{M}C) = m(B\hat{E}C) = \alpha$. No triângulo isósceles ABE temos $m(A\hat{B}E) = m(A\hat{E}B) = \alpha$ e a medida do ângulo externo $B\hat{A}C$ é 2α.



Canguru de Matemática Brasil – 2016 – Nível J - Soluções

Problemas de 3 pontos

1. A média aritmética de quatro números é 9. Se três desses números são 5, 9 e 12, qual é o quarto número?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 36

1. Alternativa D

$\frac{5+9+12+x}{4}=9 \Leftrightarrow 26+x=36 \Leftrightarrow x=10.$

2. Qual dos números a seguir é o mais próximo do resultado de $\frac{17\times 0,3\times 20,16}{999}$?

(A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

2. Alternativa B

$17\times 0,3\cong 5$

$5\times 20,16\cong 100$

$999\cong 1000$

Logo $\frac{17\times 0,3\times 20,16}{999}\cong \frac{100}{1000}=0,1$

3. Numa prova de 30 testes, Rute teve 50% de respostas corretas a mais do que de respostas erradas. Cada resposta era certa ou errada e Rute respondeu a todas as questões. Quantas respostas corretas ela deu?

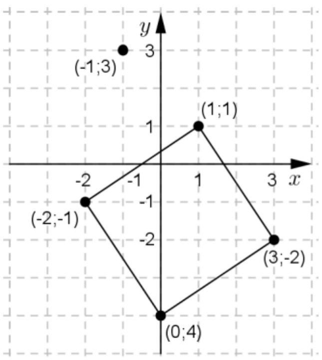
(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 20

3. Alternativa D

Se *x* é o número de respostas erradas, então *x* + 50% de *x* = 1,5*x* é o número de respostas corretas. Temos $x+1,5x=30 \Leftrightarrow x=\frac{30}{2,5}=12$. Logo, o número de respostas corretas é $1,5x=1,5\times 12=18$.

4. No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, quatro dos pontos a seguir são vértices do mesmo quadrado. Qual dos pontos não é vértice desse quadrado?

(A) $(-1;3)$ (B) $(0;-4)$ (C) $(-2;-1)$ (D) $(1;1)$ (E) $(3;-2)$



4. Alternativa A

Localizando os pontos no plano cartesiano, vemos que o ponto que não é vértice do quadrado é o ponto $(-1;3)$.

5. Dividindo-se o inteiro positivo *x* por 6, obtém-se resto 3. Qual é o resto da divisão de 3*x* por 6?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

5. Alternativa D
O resto da divisão de *x* por 6 é 3, logo pode ser escrito como $x=6y+3$, sendo *y* um inteiro positivo. Se multiplicarmos *x* por 3, teremos $3x=3(6y+3)=18y+9=18y+6+3=6(3y+1)+3$. Logo, o resto da divisão de 3*x* por 6 é 3.

6. Quantas semanas equivalem a 2016 horas?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 16

6. Alternativa D
Uma semana tem 7 x 24 = 168 horas. Logo, 2016 horas equivalem a $\frac{2016}{168}=12$ semanas.

7. O pequeno Lucas inventou seu próprio meio de representar números negativos antes de aprender a usar o sinal de menos. Contando de trás para a frente, ele escreve: ..., 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, ...
Dessa forma, se ele calcular a soma 000 + 0000, que número ele escreverá com sua notação?

(A) 1 (B) 00000 (C) 000000 (D) 0000000 (E) 00000000

7. Alternativa C
Na notação de Lucas, temos $00=-1; 000=-2; 0000=-3; 00000=-4$, etc. Assim,
$000+0000=-2+(-3)=-5=000000$.

8. As faces de um dado são numeradas de 1 a 6, de modo que a soma dos números em faces opostas é a mesma. Os numerais ímpares 1, 3 e 5 são transformados nos ímpares $-1, -3$ e -5, com o acréscimo do sinal de menos. Se lançarmos dois dados iguais a esse, qual dos números a seguir não pode ser a soma dos dois resultados?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

8. Alternativa E
Os números que aparecem nas faces dos dados são $-1, 2, -3, 4, -5, 6$.
Temos $4+(-1)=3, 2+2=4, 6+(-1)=5, 2+4=6$. O número 7 não pode ser a soma de dois resultados, pois teria que ser a soma de um resultado par com um resultado ímpar e isto dá no máximo 5.

9. Pelo menos quantas vezes duas letras vizinhas devem trocar de posição de forma a transformar a palavra VELA na palavra LAVE?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

9. Alternativa B
A letra V deve andar duas posições à direita, a letra E deve andar duas posições à direita, a letra L deve andar duas posições à esquerda e a letra A deve andar duas posições à esquerda. Em cada troca de letras vizinhas, uma letra vai para a direita e uma letra vai para a esquerda, logo são necessárias pelo menos quatro trocas. Uma maneira de realizar as trocas é VELA→ VLEA→VLAE→LVAE→LAVE.

10. Sérgio escreveu cinco algarismos diferentes no quadro-negro. Ele percebeu, então, que nenhuma soma de dois quaisquer dos números representados por esses algarismos é igual a 10. Qual dos algarismos a seguir está necessariamente entre aqueles que Sérgio escreveu no quadro-negro?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

10. Alternativa E
Como $10=1+9=2+8=3+7=4+6=5+5$, os números que Sérgio escreveu não podem formar nenhuma das cinco duplas de números cuja soma é 10. Ele deve ter escrito somente um número de cada uma dessas duplas, entre eles o número 5. Por exemplo, 9, 8, 7, 6 e 5.

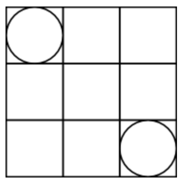
Problemas de 4 pontos

11. Qual dos números reais *a*, *b*, *c* ou *d* é o maior, se $a+5=b^2-1=c^2+3=d-4$?

(A) *a* (B) *b* (C) *c* (D) *d* (E) impossível determinar

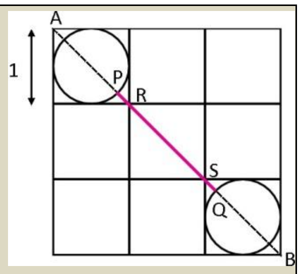
11. Alternativa D
Temos $a+5=d-4 \Leftrightarrow a+9=d \Rightarrow d>a$. Temos também $d-4=b^2-1 \Leftrightarrow d=b^2+3$ e como $b^2+3>b$ para todo *b*, concluímos que $d>b$. Analogamente, $d-4=c^2+3 \Leftrightarrow d=c^2+7 \Rightarrow d>c$ para todo *c*, logo $d>c$. Portanto, o maior dos quatro números é *d*.

12. No quadriculado 3×3 ao lado, composto de 9 quadrados de lado 1, duas circunferências estão inscritas em dois quadrados. Qual é a distância entre as duas circunferências?



(A) $2\sqrt{2}-1$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}+1$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 3

12. Alternativa A



A distância entre as duas circunferências é a medida do segmento *PQ*, na figura. No quadrado superior, temos $AR=\sqrt{2}$ e como o diâmetro da circunferência é 1, concluímos que $PR=\frac{AR-1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Como $PR=SQ$, temos

$PQ=PR+RS+SQ=2\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1$.

13. Num torneio de tênis em que sai fora quem perde uma partida, seis dos resultados das quartas de final, semifinal e final foram, não necessariamente nesta ordem, os seguintes: B venceu A, C venceu D, G venceu H, G venceu C, C venceu B e E venceu F. Qual resultado está faltando?

(A) G venceu B (B) C venceu A (C) E venceu C (D) B venceu H (E) G venceu E

13. Alternativa E
Houve 7 partidas. Vamos representar por *X >Y* a relação *X venceu Y*. Os resultados foram:

$B > A$

$C > D$

$G > H$

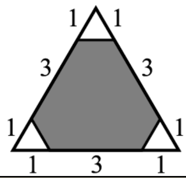
$G > C$

$C > B$

$E > F$

Vemos que, nas quartas de final, venceram B,C,E,G. Na semifinal, *C* venceu e na final *G* venceu *C*. Logo, faltou o resultado da semifinal, em que *G* venceu *E*.
Outra solução:
Há sete partidas no total, logo o campeão venceu três partidas e os outros eliminados perderam em uma das partidas. Das seis partidas listadas, apenas *E* e *G* não perderam, logo um deles foi o campeão e o outro aquele que perdeu uma partida. Como antes da final *E* ganhou apenas uma partida e *G* ganhou duas, então *G* é o campeão e *E* o vice. O resultado que falta é *G* venceu *E*.

14. Na figura, que percentual da área do triângulo está escurecida?



(A) 80% (B) 85% (C) 88% (D) 90% (E) impossível determinar

14. Alternativa C
Cada um dos triângulos brancos de lado 1 é semelhante ao triângulo maior de lado 5. Logo, a área de cada um deles é igual a $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 4\%$ da área do triângulo maior. Portanto, a área escurecida é igual a $100\% - 3 \cdot 4\% = 88\%$ da área desse triângulo.

15. No quadrado mágico ao lado, o produto dos números nas linhas, colunas e diagonais é sempre o mesmo. Gil quer preencher o quadrado com os números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100 e já escreveu dois desses números. Qual número deverá ser escrito na casa com o sinal de interrogação?

20	**1**	
		?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10 (E) 25

15. Alternativa B

O produto dos nove números é $1\times2\times4\times5\times10\times20\times25\times50\times100=10^9$. Se as três linhas têm o mesmo produto p, então $p^3=10^9 \Leftrightarrow p=1000$.

Como o produto dos números primeira linha é 1000, concluímos que na terceira casa está escrito 50. Examinando os valores *x*, *y* e *z* na tabela, vemos que $50x=20y \Rightarrow y=\dfrac{5x}{2}$.

20	**1**	**50**
z	**y**	**x**

Se x = 2 , então y = 5 e z = 100, impossível.
Se x = 4, então y = 10 e z = 25 e todos os valores das casas ficam determinados, conforme figura abaixo.
Podemos experimentar outros valores admissíveis para *x* e comprovaremos que não há outra solução. Logo, o número na casa com o ponto de interrogação é 4.

20	**1**	**50**
25	**10**	**4**
2	**100**	**5**

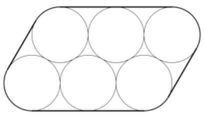
Outra solução:

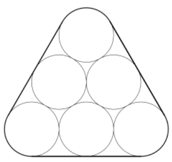
Seja x o valor que está na casa central. Olhando as duas diagonais e a coluna que contém x, concluímos que os valores que estão na última linha são $\dfrac{20}{x}$, $\dfrac{1000}{x}$ e $\dfrac{50}{x}$, com $\dfrac{20}{x}\cdot\dfrac{1000}{x}\cdot\dfrac{50}{x}=1000 \Leftrightarrow$

$x^3=1000 \Leftrightarrow x=10$. Assim, na última coluna temos os valores 2, 100 e 5 e completando o resto da tabela, temos que o número na casa de interrogação é o 4.

20	1	50
	x	
$\dfrac{20}{x}$	$\dfrac{1000}{x}$	$\dfrac{50}{x}$

16. José quer juntar seis tubos cilíndricos de diâmetro 2 cm cada um com uma fita elástica. Ele considerou apenas as duas opções abaixo:

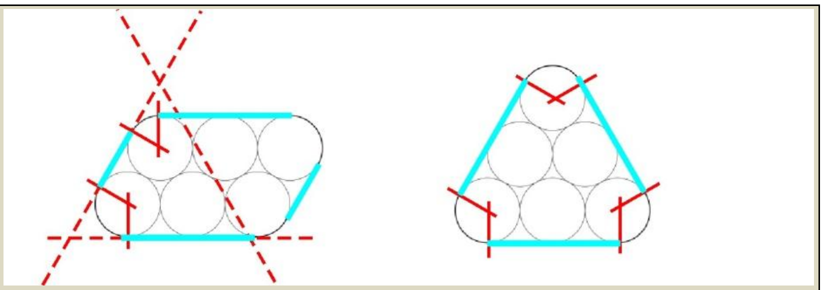




O que podemos afirmar sobre as duas fitas enquanto estão envolvendo os cilindros?

(A) A da figura à esquerda é π cm mais curta.
(B) A da figura à esquerda é 4 cm mais curta.
(C) A da figura à direita é π cm mais curta.
(D) A da figura à direita é 4 cm mais curta.
(E) As duas têm o mesmo comprimento.

16. Alternativa E



O comprimento da fita elástica na primeira figura é de 6 diâmetros, dois arcos de 120^{O} e dois arcos de 60^{O}, isto é, 6 diâmetros e uma circunferência.
O comprimento da fita na segunda figura é de 6 diâmetros e três arcos de 120^{O}, ou seja, 6 diâmetros e uma circunferência. Logo, os comprimentos são iguais.

17. Em oito cartões foram escritos exatamente um dos números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 e colocados numa caixa. Eva tirou alguns desses cartões sem olhar e Alice ficou com o resto dos cartões. Ambas somaram os números de seus cartões, verificando que a soma de Eva era a de Alice mais 31. Quantos cartões tirou Eva?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

17. Alternativa D

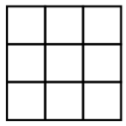
Sejam *A* e *E* as somas obtidas por Alice e Eva, respectivamente. Temos:

$$\left|\begin{array}{l} A+E=1+2+4+8+16+32+64+128 \\ E=A+31 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} A+A+31=1+2+4+8+16+32+64+128 \\ E=A+31 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2A=32+64+128 \\ E=A+31 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} A=16+32+64 \\ E=A+31 \end{array}\right.$$

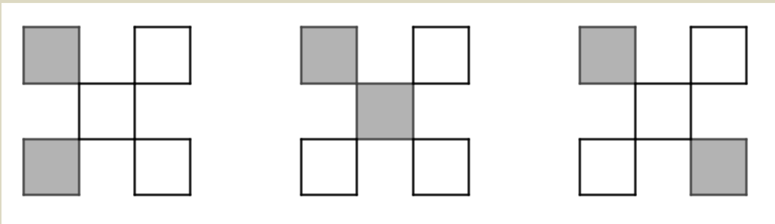
Alice pegou 3 cartões, logo Eva pegou 5 cartões.

18. Pedro quer pintar as casas de um tabuleiro 3×3 de modo que cada uma das linhas, colunas e diagonais tenham as três casas com três cores diferentes. Qual é o menor número de cores que Pedro terá que usar?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

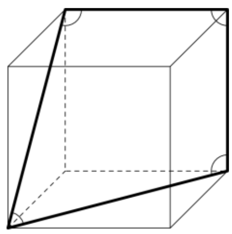
18. Alternativa C



Se considerarmos as 5 casas das duas diagonais, vemos que não pode haver duas casas com a mesma cor, pois ou elas estarão numa mesma diagonal ou estarão numa mesma linha ou coluna. Logo precisamos de no mínimo 5 cores, que é o bastante para pintar o restante das casas, conforme a figura abaixo.

D	E	C
B	A	D
E	C	B

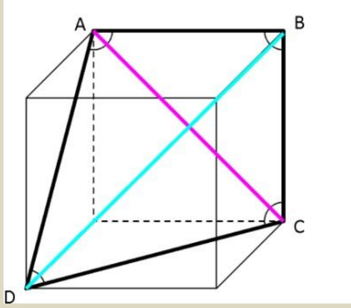
19. Qual é a soma das medidas dos quatro ângulos marcados no interior do cubo na figura?



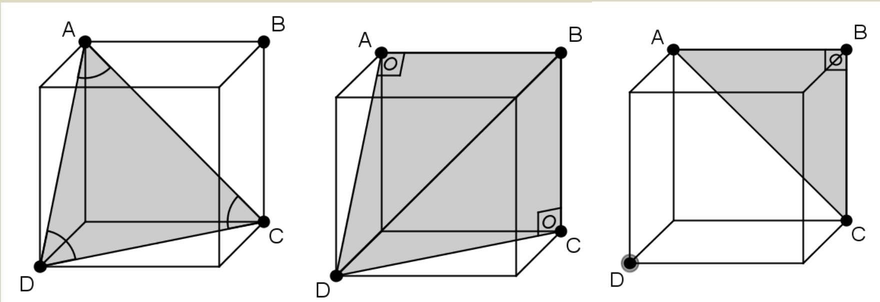
(A) 315^{o} (B) 330^{o} (C) 345^{o} (D) 360^{o} (E) 375^{o}

19. Alternativa B

O triângulo *ACD* é equilátero, logo *D* mede 60^O. O triângulo *ABC* é retângulo em *B* e os triângulos *ABD* e *BCD* são retângulos em *A* e *C*, respectivamente. Logo, a soma das medidas dos quatro ângulos marcados é $60^O + 90^O + 90^O + 90^O = 330^O$.



Para melhor visualização:



20. Numa ilha há 2016 cangurus, cada um deles de cor cinza ou vermelha, havendo pelo menos um de cada cor. Cada um deles tem um número *K* diferente (*K* = 1, 2, ... , 2016). Para cada canguru de número *K*, calculamos o valor da fração cujo numerador é o número de cangurus de cor diferente da cor desse canguru e cujo denominador é o número de cangurus da mesma cor dele, ele incluído. Qual é a soma de todas as 2016 frações assim obtidas?

(A) 2016 (B)1344 (C) 1008 (D) 672 (E) 1

20. Alternativa A

Para o canguru de número *k*, há *x* cangurus da mesma cor dele, ele incluído, e 2016 – *x* cangurus da outra cor. A fração atribuída a esse canguru é $\frac{2016-x}{x}$. Para cada um dos cangurus da outra cor, a fração atribuída é $\frac{x}{2016-x}$. Portanto, a soma de todas as frações é igual a

$$x\cdot\frac{2016-x}{x}+(2016-x)\cdot\frac{x}{2016-x}=2016-x+x=2016.$$

Problemas de 5 pontos

21. No planeta dos cangurus cada mês tem 40 dias, numerados de 1 a 40. Todo dia cujo número é divisível por 6 é feriado e todo dia cujo número é primo também é feriado. Quantas vezes por mês um dia de trabalho cai entre dois feriados consecutivos?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

21. Alternativa A

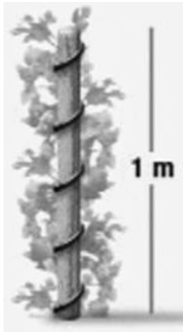
Feriados múltiplos de seis: 6, 12, 18, 24, 30, 36.

Feriados primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Vejamos os casos em que há somente um número entre dois primos da sequência acima:

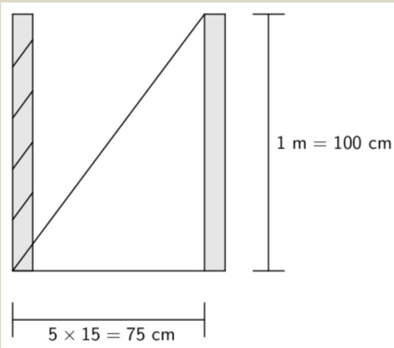
4 entre 3 e 5; 6 entre 5 e 7; 12 entre 13 e 17; 18 entre 17 e 19; 30 entre 29 e 31. Com exceção do primeiro caso, todos são múltiplos de 6, logo são feriados. Portanto, o número de dias de trabalho entre dois feriados consecutivo é um.

22. Uma trepadeira se enrosca girando exatamente 5 vezes ao redor de uma estaca de 1 metro de altura e 15 cm de circunferência, como mostrado na figura. Ela mantém seu crescimento em altura de forma constante. Qual é o comprimento da planta, neste momento?



(A) 0,75 m (B) 1,0 m (C) 1,25 m (D) 1,5 m (E) 1,75 m

22. Alternativa C



Se esticarmos a trepadeira, seu comprimento será composto de uma distância horizontal equivalente a cinco voltas ao redor da estaca, ou seja, 15 x 5 = 75 cm e uma distância vertical de 100 cm. Então, a trepadeira é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 75 e 100, logo seu comprimento é

$\sqrt{75^2+100^2}=\sqrt{(25\cdot 3)^2+(25\cdot 4)^2}=25\sqrt{3^2+4^2}=25\cdot 5=125\,\text{cm}$ = 1,25 m.

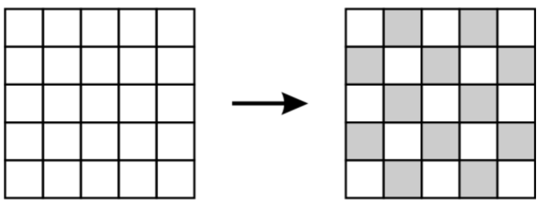
23. Qual é o maior resto possível da divisão de um número de dois algarismos pela soma dos seus algarismos?

(A) 13 (B)14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

23. Alternativa C

Quanto maior o quociente, maior pode ser o resto. A maior soma de dois algarismos é 18 e o único número com esta soma é 99. Dividindo 99 por 18, temos resto **9**. Os números cuja soma dos algarismos é 17 são 98 e 89. Esses números, divididos por 17 deixam restos **13** e 4, respectivamente. Os números cuja soma dos algarismos é 16 são 97, 88 e 79. Esses números divididos por 16 deixam restos 1, 8 e **15**, respectivamente. Os restos das divisões por 15, 14, etc são menores do que 15, que já foi obtido. Portanto, o maior resto é 15.

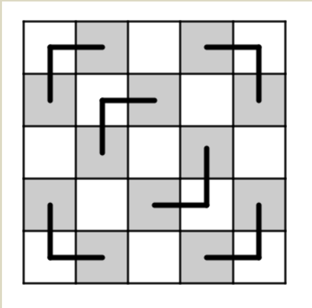
24. As casas de um tabuleiro 5×5 podem ser de cor branca ou cinzenta. Um movimento produz a mudança de cor de duas casas vizinhas (casas com um lado comum), ou seja, as casas brancas se tornam cinzentas e as casas cinzentas se tornam brancas. Partindo do tabuleiro com todas as casas brancas, pelo menos quantos movimentos serão necessários para termos o tabuleiro colorido da forma mostrada na figura, à direita?

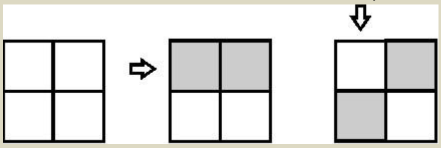


(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

24. Alternativa B

Dois movimentos são suficientes para tornar dois quadradinhos brancos não vizinhos em cinzas não vizinhos, como indicado abaixo:





Como nenhum dos 12 quadradinhos cinzas da coloração final tem vizinho cinza, precisamos fazer pelo menos 12 movimentos iguais ou simétricos ao do exemplo acima. Uma maneira de fazer estes movimentos está indicada ao lado pelas 12 barras mais escuras.

25. Um barco a motor leva 4 horas para viajar rio abaixo do ponto X ao ponto Y. Para retornar rio acima de Y para X, o barco leva 6 horas, usando a mesma velocidade do motor. Quantas horas levaria um tronco de árvore para ir do ponto X ao ponto Y, carregado livremente pela corrente?

(A) 5 (B)10 (C) 12 (D) 20 (E) 24

25. Alternativa E

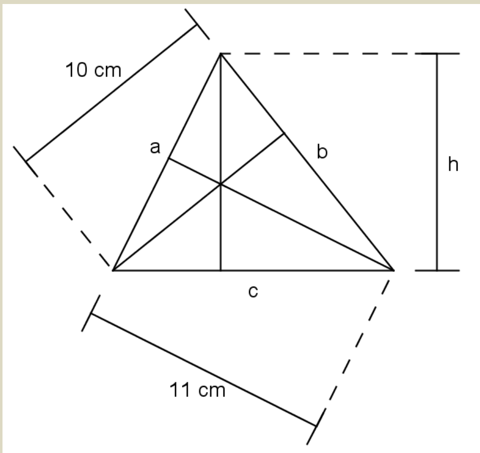
Sendo b a velocidade do barco, r a velocidade do rio e XY a distância entre os pontos, temos:

$\left|\begin{array}{l} XY=(b+r)\cdot 4 \\ XY=(b-r)\cdot 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} XY=4b+4r \\ XY=6b-6r \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3XY=12b+12r \\ -2XY=-12b+12r \end{array}\right. \Rightarrow XY=24r$, as águas do rio percorrem a distância entre os dois pontos em 24 horas, tempo que o tronco levaria para ser levado pela corrente.

26. Duas alturas de um triângulo medem, respectivamente, 10 e de 11 cm. Qual das medidas a seguir não pode ser a medida da terceira altura desse triângulo?

(A) 5 cm (B) 6 cm (C) 7 cm (D) 10 cm (E) 100 cm

26. Alternativa A



Seja a,b,c as medidas dos lados do triângulo e h a medida da terceira altura. Sabemos que a área do triângulo é dada por $\frac{11a}{2}=\frac{10b}{2}=\frac{hc}{2}$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$c<a+b\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{11a}{2}=\frac{hc}{2}<\frac{h(a+b)}{2} \\ \frac{10b}{2}=\frac{hc}{2}<\frac{h(a+b)}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{11a+10b}{2}<h(a+b)$$

Como $\frac{11a+10b}{2}>\frac{10a+10b}{2}=5(a+b)$, temos $h(a+b)>5(a+b)\Leftrightarrow h>5$ cm.

27. Jacó escreveu quatro números inteiros positivos consecutivos. Em seguida, calculou as quatro somas que se pode obter adicionando três desses números. Nenhuma dessas somas era um número primo. Qual dos números a seguir pode ser o menor número que Jacó escreveu?

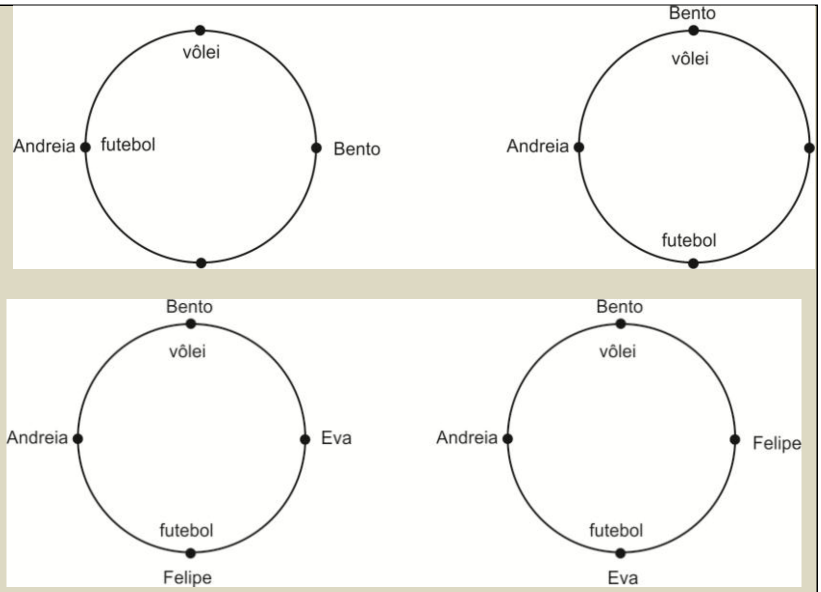
(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 12

27. Alternativa C
Sejam $x, x+1, x+2$ e $x+3$, $x \geq 1$, os números. As quatro somas possíveis são $3x+3, 3x+4, 3x+5$ e $3x+6$.
O menor valor de x para o qual nenhuma das somas é um número primo é 7 (somas 24, 25, 26 e 27).

28. Quatro jogadores ou jogadoras, um de cada modalidade: vôlei, futebol, tênis e basquete, foram jantar juntos e sentaram-se ao redor de uma mesa circular. A pessoa que joga vôlei sentou-se à esquerda de Andreia. A pessoa que joga futebol sentou-se de frente para Bento. Eva e Felipe sentaram-se um ao lado do outro. Uma mulher sentou-se à esquerda da pessoa que joga tênis. Qual é o esporte praticado por Eva?

(A) Vôlei. (B) Futebol. (C) Tênis. (D) Basquete.
(E) Impossível saber com as informações dadas.

28. Alternativa B
Com as duas primeiras informações, temos as duas possibilidades de configuração à esquerda. Como Eva e Felipe sentaram-se juntos, resta apenas a configuração da direita. Então há duas possibilidades, conforme figuras abaixo. Vemos que nem Eva nem Andreia podem jogar tênis, porque à esquerda deste deve sentar-se uma mulher. Logo, a quarta figura corresponde à configuração correta, do que se depreende que Eva joga futebol.



29. As datas podem ser escritas na forma DD.MM.AAAA. Por exemplo, o dia de hoje é 17.03.2016. Uma data é dita *surpreendente* se todos os seus oito algarismos são diferentes. Em que mês irá ocorrer a próxima data surpreendente?

(A) Março. (B) Junho. (C) Julho. (D) Agosto. (E) Dezembro.

29. Alternativa B
Devemos reservar os algarismos 0,1 para escrever dia e mês. A partir daí escolhemos os algarismos para o ano mais próximo, que não será 20** nem 21**. Se o ano for 2345, o mês não poderá ser 01, pois os algarismos que sobram são 6, 7, 8 e 9. Então o dia é 17 e o mês 06, junho.

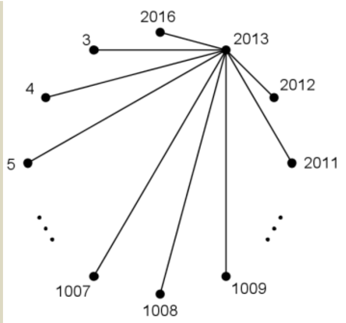
30. Numa conferência, cada participante recebeu um cartão com um registro, de P1 a P2016. Cada participante de registro P1 a P2015 apertou a mão de um número de pessoas igual ao número de seu registro . Por exemplo, P5 cumprimentou 5 pessoas. Quantos cumprimentos fez a pessoa com o registro P2016?

(A) 1 (B) 504 (C) 672 (D) 1008 (E) 2015

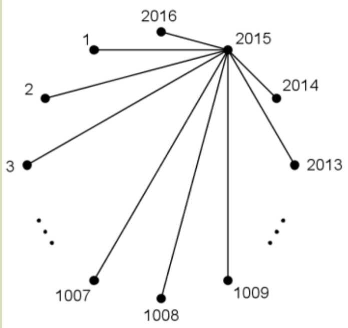
30. Alternativa D

Podemos supor os apertos de mão na seguinte ordem: no primeiro passo, o participante P2015 aperta a mão das outras 2015 pessoas, de P1 a P2016, excluindo ele próprio. Assim, podemos remover P2015, pois ele já deu 2015 apertos de mão. Podemos remover também P1, pois ele já deu um aperto de mão, sobrando 2014 pessoas.

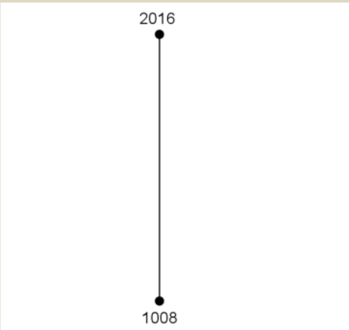
No segundo passo, falta o P2014 dar 2014 – 1 = 2013 apertos de mão (já apertou a mão de P2015), logo ele deve apertar a mão de todos os outros, de P2 a P2013 e P2016. Com isto, podemos remover P2014 e P2, pois eles já deram 2014 e 2 apertos de mão, respectivamente, sobrando 2012 pessoas.



No terceiro passo, falta o P2013 dar 2013 – 2 = 2011 apertos de mão, logo ele deve apertar a mão de todos os outros (P3 a P2012 e P2016) e depois podemos remover P2013 e P3, pois eles já deram 2013 e 3 apertos de mão, respectivamente.



Continuando este raciocínio, após 1007 passos, sobrarão apenas os participantes P1008 e P2016. Como ainda falta P1008 dar 1008 – 1007 = 1 aperto de mão, ele aperta a mão de P2016. No total, P2016 deu 1008 apertos de mão, um em cada um dos 1008 passos.



Canguru de Matemática Brasil – 2015 – Nível J - Respostas

Problemas de 3 pontos

1. Qual dos números a seguir é o mais próximo de $20,15 \times 51,02$?

(A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

1. Alternativa B

Temos $20,15 \times 51,02 \cong 20 \times 50 = 1000$

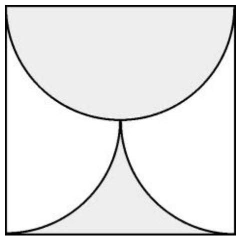
2. Dona Teresa pendurou várias camisetas para secar no varal. Depois ela pediu para Joãozinho pendurar uma meia, não um par, nos espaços entre as camisetas. No total ficaram para secar 29 peças de roupa. Quantas camisetas estão no varal?

(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

2. Alternativa E

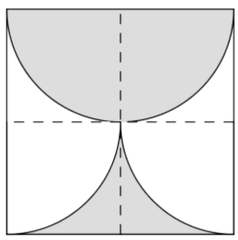
Seja x o número de camisetas. Há $x - 1$ espaços entre elas, logo foram penduradas $x - 1$ meias. Assim, $x + x - 1 = 29 \Leftrightarrow 2x = 29 + 1 = 30 \Leftrightarrow x = 15$

3. No quadrado de lado ℓ, na figura, a parte cinza é limitada por uma semicircunferência, dois arcos de circunferência e lados do quadrado. Qual é a área da região cinza?



(A) $\frac{\pi\ell^2}{8}$ (B) $\frac{\ell^2}{2}$ (C) $\frac{\pi\ell^2}{2}$ (D) $\frac{\ell^2}{4}$ (E) $\frac{\pi\ell^2}{4}$

3. Alternativa B



Observe que ao dividir o quadrado em quatro quadrados menores, obtemos um total de oito regiões, 4 brancas e 4 cinzas, com cada região branca tendo uma correspondente cinza de mesma área. Portanto a área total cinza é igual à área total branca. Assim, ambas são metade da área do quadrado, que é $\frac{\ell^2}{2}$.

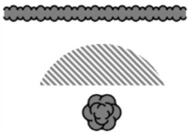
4. Três irmãs, Ana, Bete e Cíntia, compraram uma lata com 30 biscoitos, ficando cada uma com 10 biscoitos. Ana pagou 8 reais, Bete pagou 5 reais e Cíntia pagou 2 reais. Se elas tivessem repartido os biscoitos proporcionalmente ao que cada uma pagou, quantos biscoitos a mais Ana teria recebido?

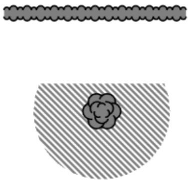
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

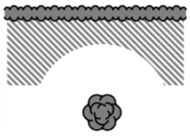
4. Alternativa A

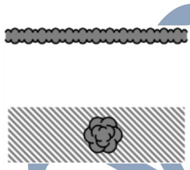
A lata de biscoitos custou $8+5+2=15$ reais, logo cada biscoito custou $\frac{15}{30}=0{,}50$ real. Com 8 reais, Ana teria direito a $\frac{8}{0{,}50}=16$ biscoitos. Como ela ficou com 10 biscoitos, teria direito a mais 16 – 10 = 6 biscoitos.

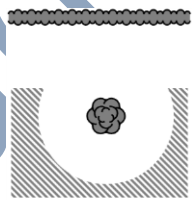
5. O senhor Esconde lembrou-se de um tesouro que enterrou em seu jardim há muito tempo. Mas ele conseguiu recordar apenas que o tesouro estava a cinco metros ou mais da cerca e no máximo a cinco metros do tronco do pé de goiaba. Qual dos esquemas abaixo indica a região em que ele deve procurar, para recuperar seu tesouro?


(A)


(B)

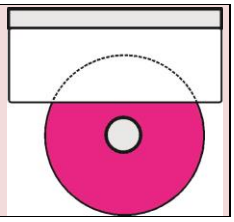

(C)


(D)


(E)

5. Alternativa B

A região está fora da faixa paralela ao muro e dentro do círculo com a árvore no centro (região em rosa na figura)



6. Qual é o algarismo das unidades do número $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$?

(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

6. Alternativa C

Os números $2015^2, 2015^1$ e 2015^5 tem 5 como o algarismo das unidades. Como $2015^0=1$, o algarismo das unidades de $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$ é o mesmo que o do número 5 + 5 + 5 + 1 =16, ou seja, 6.

7. Um professor perguntou aos seus 33 alunos quais as aulas de que mais gostavam. Somente Informática e Educação Física foram mencionadas. Três crianças mencionaram as duas aulas e o número de crianças que mencionaram somente Informática foi o dobro do número de crianças que mencionaram somente Educação Física. Quantas crianças mencionaram Informática?

(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 23

7. Alternativa E

Sendo *x* o número de crianças que mencionaram apenas Educação Física, então 2x é o número de crianças que mencionaram apenas Informática. Se 3 mencionaram as duas, então $2x+x+3=33 \Leftrightarrow 3x=30 \Leftrightarrow x=10$. Portanto, o número de crianças que mencionaram Informática (apenas Informática ou Informática junto com Educação Física) é $2x+3=2\times10+3=23$.

8. Qual dos números a seguir não é quadrado nem cubo de um número inteiro?

(A) 6^{13} (B) 5^{12} (C) 4^{11} (D) 3^{10} (E) 2^{9}

8. Alternativa A

$5^{12}=\left(5^{6}\right)^{2}=\left(5^{4}\right)^{3}$; logo 5^{12} é quadrado e cubo.

$4^{11}=\left(2^{2}\right)^{11}=\left(2^{11}\right)^{2}$; 4^{11} é quadrado.

$3^{10}=\left(3^{5}\right)^{2}$; 3^{10} é quadrado.

$2^{9}=\left(2^{3}\right)^{3}$; 2^{9} é cubo.

Como 13 é um número primo, não podemos decompor os expoentes de $6^{13}=2^{13}\cdot3^{13}$ num produto que tenha 2 ou 3 como fatores, como nos casos acima. Logo, esta potência não é quadrado nem cubo de nenhum número inteiro. Observação: para números reais, esta conclusão não é verdadeira. Por exemplo, $6^{13}=\left(6^{\frac{13}{2}}\right)^{2}=\left(\sqrt{6^{13}}\right)^{2}$.

9. Dona Cândida comprou 100 velas. Ela queima uma vela todo dia e fabrica uma vela igual com o resto de cera de cada sete velas usadas. Depois de quantos dias ela terá que comprar velas novamente**?**

(A) 102 (B) 112 (C) 114 (D) 115 (E) 116

9. Alternativa E

Dos tocos de 7 velas, pode-se fazer uma vela inteira. Dividindo-se 100 por 7, obtemos 14 e resto 2, ou seja, com os tocos de 100 velas podemos fazer exatamente 14 velas, sobrando 2 tocos. Dos tocos das 14 velas, podemos fazer exatamente 2 velas, sobrando 2 tocos destas velas. Assim, temos um total de 100 + 14 + 2 = 116 velas, sobrando 2 + 2 = 4 tocos. Logo, Dona Cândida deverá comprar novas velas depois de 116 dias.

Outra maneira:

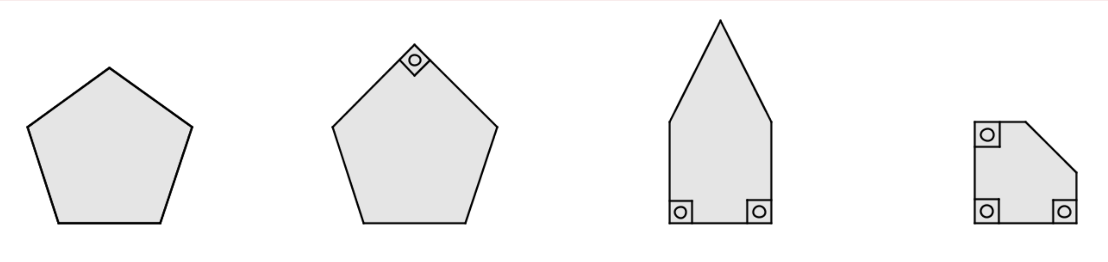
Cada vez que uma vela é queimada, podemos considerar que apenas $\frac{6}{7}$ dela são gastos e que a cera restante corresponde a $\frac{1}{7}$ de vela, que pode ser utilizada para fabricar uma nova vela. Assim, após $\frac{100}{\frac{6}{7}}=\frac{700}{6}\approx116$ dias, sobrarão apenas $100-116\cdot\frac{6}{7}=\frac{700-696}{7}=\frac{4}{7}$ de vela, que é menos que uma vela inteira. Logo, após 116 dias, será necessário comprar novas velas.

10. Um pentágono convexo tem *n* ângulos internos retos. Qual é a lista de possíveis valores de *n*?

(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 (C) 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

10. Alternativa C

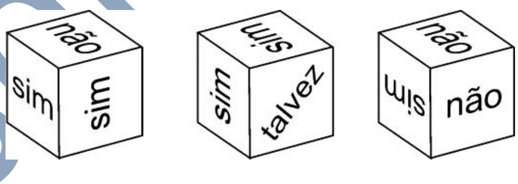
Exemplos de pentágonos com 0, 1, 2 e 3 ângulos retos são mostrados a seguir.



Sabemos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é $(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$. Se 4 dos 5 ângulos de um pentágono forem retos, o quinto ângulo medirá $540^\circ - 4\cdot 90^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$, absurdo, logo não há como ter mais de 3 ângulos retos num pentágono.

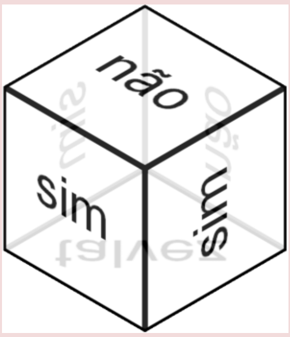
Problemas de 4 pontos

11. Sílvia tem um dado que a ajuda a tomar decisões, mostrado em três diferentes posições na figura ao lado. Ele tem as palavras **sim**, **não** e **talvez** escritas em suas faces. Qual é a probabilidade de sair **sim** quando o dado for lançado?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

11. Alternativa B

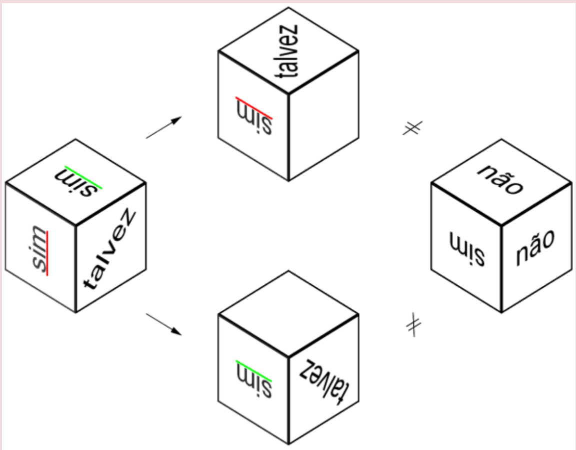


De acordo com as três vistas do dado, temos duas faces com *sim*, duas com *não* e uma com *talvez*. Precisamos descobrir o que está escrito na sexta face.

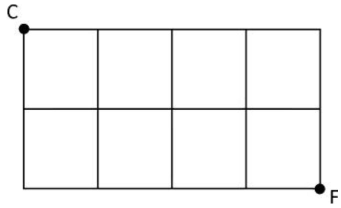
Caso as três faces ocultas na vista da esquerda fossem as três visíveis na vista central, teríamos apenas uma face *não*, o que é falso. Como a face superior da vista da esquerda é um *não* e a face superior da vista central é um *sim*, a face *talvez* é oposta à *não* da vista da esquerda. Caso a face *sim* da vista da direita fosse alguma das visíveis na vista central, a face *talvez* seria visível também nesta vista. Com isso, a sexta face é um *sim*, o que totaliza três faces *sim* neste dado. Portanto, a probabilidade de sair face *sim* no lançamento deste dado é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Outra maneira:

De acordo com as três vistas do dado, temos duas faces com *sim*, duas com *não* e uma com *talvez*. Precisamos descobrir o que está escrito na sexta face. Observe que os dois "*sim*" que aparecem na vista do meio não correspondem ao "*sim*" que aparece na última vista, logo há três "*sim*", dois "*não*" e um "*talvez*". Portanto, a probabilidade de sair face *sim* no lançamento deste dado é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



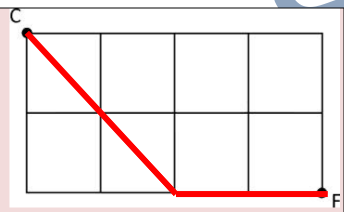
12. O quadriculado 4 x 2 ao lado é constituído por quadradinhos de lado 1. Qual é a menor distância que uma formiguinha pode andar do ponto C ao ponto F, se ela só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos quadradinhos?



(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ (C) $2+2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

12. Alternativa C

O número de segmentos de comprimento 1 ou $\sqrt{2}$ que ligam C a F pode ser seis, cinco ou quatro. Com quatro segmentos, há somente duas possibilidades: quatro diagonais ou duas diagonais e dois segmentos. Portanto, a menor distância é $2+2\sqrt{2}$.



13. Todo habitante do planeta Ligadão tem pelo menos duas orelhas. Três desses habitantes, It, Ix e Iz, encontraram-se numa cratera. It diz: “Eu vejo oito orelhas”. Ix diz: “E eu vejo sete”. Iz então diz: “Estranho, só consigo ver cinco orelhas”. Quantas orelhas tem Iz?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

13. Alternativa C

Sejam t, x e z o número de orelhas de It, Ix e Iz, respectivamente. Então:

$\left|\begin{array}{l} x+z=8 \\ t+z=7 \\ x+t=5 \end{array}\right. \Rightarrow 2(t+x+z)=8+7+5 \Leftrightarrow t+x+z=10$. Como $x+t=5$, temos $5+z=10$, isto é, Iz tem 5 orelhas.

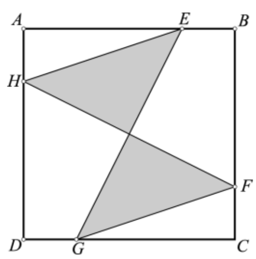
14. José quer colocar água numa cuba, na forma de um prisma retangular de base quadrada de lado 10 cm, até uma altura *h*. Um cubo de metal de lado 2 cm será colocado na cuba. Qual é o menor valor possível de *h* para o qual o cubo de metal fica totalmente submerso?

(A) 1,92 cm (B) 1,93 cm (C) 1,90 cm (D) 1,91 cm (E) 1,94 cm

14. Alternativa A

Quando o cubo de metal ficar apoiado, sua altura de 2 cm deve ser igual ao nível da água. Portanto, o volume da água mais o volume do cubo de metal é igual ao volume ocupado da cuba. Logo, $2^3+10^2h=10^2\cdot 2 \Leftrightarrow 100h=200-8=192 \Leftrightarrow h=1{,}92$ cm

15. O quadrado *ABCD* da figura tem área 80. Os pontos *E*, *F*, *G* e *H* estão sobre os lados do quadrado e $AE=BF=CG=DH$. Se $AE=3EB$, qual é a área da região cinza?



(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

15. Alternativa B

Se $EB = x$ então $AE = 3x$. Os triângulos AEH, EBF, FCG e GDH são congruentes. Como $AH = EB$, concluímos que a área do triângulo AEH é $\frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$. A área do quadrilátero $EFGH$ é igual à área do quadrado $ABCD$ menos a soma das áreas dos quatro triângulos, ou seja, $80 - 4 \cdot \frac{3x^2}{2} = 80 - 6x^2$. Mas $(x + 3x)^2 = 80 \Leftrightarrow 16x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = 5$, logo a área do quadrilátero $EFGH$ é $80 - 6 \cdot 5 = 50$. Portanto, a área da região cinza, que é metade da área desse quadrilátero, é igual a 25.

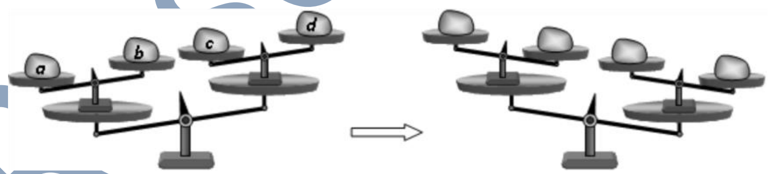
16. Pai e filho fazem aniversário hoje e o produto de suas idades é 2015. Qual é a diferença entre suas idades?

(A) 26 (B) 29 (C) 31 (D) 34 (E) 36

16. Alternativa D

Temos $2015 = 1 \times 5 \times 13 \times 31$. As idades são dois números que, multiplicados, resultam 2015. Esses números não podem ser iguais nem muito diferentes (por exemplo, 13 e $1 \times 5 \times 31 = 151$). Logo, devem ser 31 e 65. A diferença entre as idades é 65 – 31 = 34.

17. Quatro pesos *a*, *b*, *c*, *d* são colocados nos pratos de uma balança, conforme figura. Dois dos pesos são trocados de posição, resultando numa outra posição para os pratos. Quais pesos trocaram de posição?



(A) *a* e *b* (B) *b* e *d* (C) *b* e *c* (D) *a* e *d* (E) *a* e *c*

17. Alternativa D

Pela posição inicial da balança, temos que a pedra a ou c é a mais pesada, enquanto que a pedra b ou d é a mais leve. Como a balança maior pende para o outro lado após a troca, então uma das pedras a ou b deve trocar de lugar com uma das pedras c ou d.

Agora observe que se a pedra mais pesada ou a mais leve não se mover, a balança menor em que ela está não penderá para o outro lado. Portanto, para que as duas balanças menores pendam para o outro lado, a pedra mais pesada deve trocar com a mais leve. Neste caso, tanto a pedra mais pesada quanto a mais leve não podem estar no mesmo lado da balança maior, logo só duas trocas são possíveis: a com d ou b com c. Se ocorrer a troca de b com c, então c será a pedra mais pesada e b será a mais leve. Porém, teremos $c > a$, $d > b$ e $c + d > a + b$, um absurdo. Portanto, a única troca possível foi entre a e d.

18. Se as duas raízes da equação $x^2 - 85x + c = 0$ são números primos, qual é o valor da soma dos algarismos de c?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 21

18. Alternativa B

A soma das raízes é 85, número ímpar. Portanto, uma delas é par. Como é um número primo, só pode ser -2 ou 2. Se for -2 então a outra raiz é 87, que não é primo. Se for 2, a outra raiz é 83, que também é um número primo. Portanto, $c=2\times 83=166$. A soma dos algarismos desse número é 13.

19. Quantos números inteiros positivos de três algarismos são tais que a diferença de dois quaisquer de seus algarismos vizinhos é igual a 3?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 20 (E) 27

19. Alternativa D

Os números procurados são da forma abc, onde $b=a\pm 3$ e $c=b\pm 3$, com $1\le a\le 9$, $0\le b,c\le 9$ e $a,b,c\in N$. Assim, obtemos 20 números:

***a* =**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	141	252	303	414	525	630	741	852	963
	147	258	363	474	585	636	747	858	969
			369			696			

20. Qual dos números abaixo mostra que a sentença "Se n é primo então exatamente um dos números $n-2$ ou $n+2$ é primo" é falsa?

(A) $n=11$ (B) $n=9$ (C) $n=21$ (D) $n=29$ (E) $n=37$

20. Alternativa E

Explicação: Uma implicação (sentença do tipo $p\Rightarrow q$) só é falsa quando o antecedente (sentença *p*) é verdadeiro e o consequente (sentença *q*) é falso. Uma disjunção exclusiva (sentença do tipo $p\underline{\vee}q$)só é verdadeira quando uma das sentenças *p* ou q é verdadeira e a outra é falsa.

"$n=11$ é primo $\Rightarrow n-2=9$ é primo $\underline{\vee}$ $n+2=13$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 11 é primo , 9 não é primo e 13 é primo.

"$n=9$ é primo $\Rightarrow n-2=7$ é primo $\underline{\vee}$ $n+2=11$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 9 não é primo.

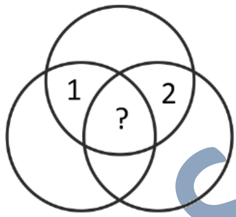
"$n=21$ é primo $\Rightarrow n-2=19$ é primo $\underline{\vee}$ $n+2=23$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 21 não é primo.

"$n=29$ é primo $\Rightarrow n-2=27$ é primo $\underline{\vee}$ $n+2=31$ é primo" é sentença VERDADEIRA, pois 29 é primo , 27 não é primo e 23 é primo.

"$n=37$ é primo $\Rightarrow n-2=35$ é primo $\underline{\vee}$ $n+2=39$ é primo" é sentença FALSA, pois 37 é primo , 35 não é primo e 39 não é primo.

Problemas de 5 pontos

21. A figura mostra sete regiões limitadas por três circunferências. Foram escritos sete números, um em cada região, de modo que cada um deles é igual à soma dos números escritos nas regiões vizinhas. Duas regiões são vizinhas quando seus limites têm mais de um ponto comum. Dois desses números aparecem na figura. Qual número está escrito na região central, indicada pelo ponto de interrogação?

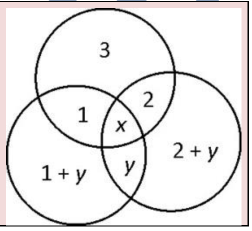


(A) 0 (B) -3 (C) 3 (D) -6 (E) 6

21. Alternativa A

No diagrama temos:

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ 2 = 3 + x + 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = y \\ 0 = 3 + x + y \end{cases} \Rightarrow 0 = 3 + x + x - 3 \Leftrightarrow x = 0$$



22. Paula tem cinco livros diferentes, três dicionários e dois romances, em uma prateleira de sua estante. De quantas maneiras diferentes ela pode arrumar esses livros, de forma que os dicionários fiquem juntos e os romances fiquem juntos?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

22. Alternativa B

O bloco com os três dicionários pode ficar à esquerda ou à direita do bloco com os dois romances. No bloco dos dicionários, podemos embaralhá-los de 3! maneiras diferentes e no bloco dos romances, de 2! maneiras diferentes. Portanto, o número de maneiras diferentes com que Paula pode arrumar seus livros é igual a $2 \times 3! \times 2! = 2 \times 6 \times 2 = 24$.

23. Quantos números de dois algarismos podem ser escritos como a soma de exatamente seis diferentes potências de 2, incluindo 2^0?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

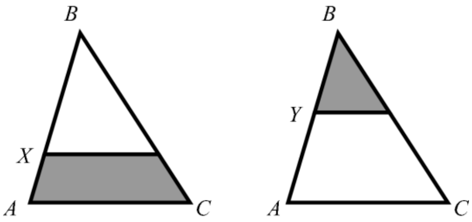
23. Alternativa C

As potências de 2, em ordem crescente, são os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

Devemos usar seis entre os menores do que 128. Se incluirmos entre eles o número 64, então a única soma possível é $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 64 = 96$. Sem o 64 a única soma possível é $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Logo, existem dois números que podem ser escritos como a soma de exatamente seis diferentes potências de dois.

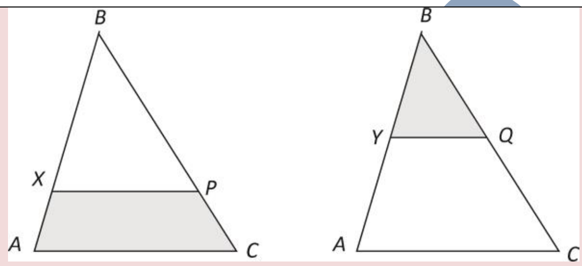
24. No triângulo *ABC*, podemos traçar as paralelas à base *AC*, pelos pontos *X* e *Y*, tais que as áreas das regiões cinzentas sejam iguais. Se a razão $BX:XA$ é igual a $4:1$ então qual é a razão $BY:YA$?

(A) 1:1 (B) 2:1 (C) 3:1 (D) 3:2 (E) 4:3



24. Alternativa D

Sejam P, Q os pontos em que as paralelas por X e Y cortam o lado BC, respectivamente. Seja também S_1 a área de cada região cinza e S_2 a área de cada região branca. Como $\Delta BXP \sim \Delta ABC \sim BYQ$, temos as seguintes razões entre áreas dos três triângulos:



$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{S_1+S_2}{S_2}=\left(\dfrac{AX+BX}{BX}\right)^2\\ \dfrac{S_1+S_2}{S_1}=\left(\dfrac{AY+BY}{BY}\right)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}1+\dfrac{S_2}{S_1}=\left(1+\dfrac{AX}{BX}\right)^2\\ 1+\dfrac{S_2}{S_1}=\left(1+\dfrac{AY}{BY}\right)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\dfrac{S_2}{S_1}=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^2-1=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-1=\dfrac{25}{16}-1=\dfrac{9}{16}\\ \left(1+\dfrac{AY}{BY}\right)^2=1+\dfrac{16}{9}=\dfrac{25}{9}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{AY}{BY}=\dfrac{5}{3}-1=\dfrac{2}{3}$$

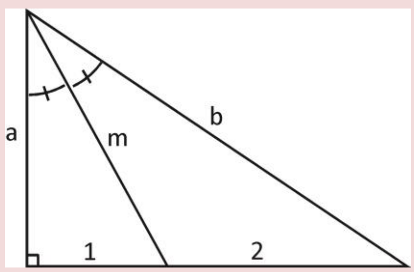
Portanto, $\dfrac{BY}{YA}=\dfrac{3}{2}$.

25. Num triângulo retângulo, a bissetriz de um dos ângulos agudos divide o lado oposto nos segmentos de comprimento 1 e 2. Qual é o comprimento da bissetriz?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

25. Alternativa C

Sendo a e b medidas de um cateto e da hipotenusa, respectivamente, e m a medida da bissetriz do ângulo entre eles, temos $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}\Leftrightarrow b=2a$ (pelo teorema das bissetrizes). Pelo teorema de Pitágoras, temos $b^2=a^2+(1+2)^2$. Logo, $(2a)^2=a^2+9\Leftrightarrow 4a^2=a^2+9\Leftrightarrow a^2=3$. No triângulo retângulo de hipotenusa m, pelo teorema de Pitágoras, temos $a^2+1=m^2$, logo $m^2=1+3=4\Rightarrow m=\sqrt{4}$.



26. Representamos por $\overline{ab}$ o número cujos algarismos são *a* e *b*, sendo *a* diferente de zero. De quantas maneiras você pode escolher os algarismos distintos *a*, *b*, *c* de forma que $\overline{ab}<\overline{bc}<\overline{ca}$?

(A) 84 (B) 96 (C) 125 (D) 201 (E) 502

26. Alternativa A

Os algarismos a, b e c são distintos. Como $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, basta considerar os algarismos das dezenas de cada número para concluirmos que $a < b < c$. Escolhendo três algarismos distintos dentre 1,2, ... , 9, falta apenas ordená-los para definirmos os valores de a, b e c. Assim, há $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ maneiras de escolher a, b e c.

27. Marcos escreveu no quadro-negro os números naturais de 1 a *n*. Em seguida, apagou um desses números e obteve 4,75 para média aritmética dos números restantes. Qual foi o número apagado?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) impossível achar

27. Alternativa B

A média aritmética dos números de 1 a *n* é igual a $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$. Retirado um número *k*, a média aritmética dos números restantes é 4,75. Portanto,

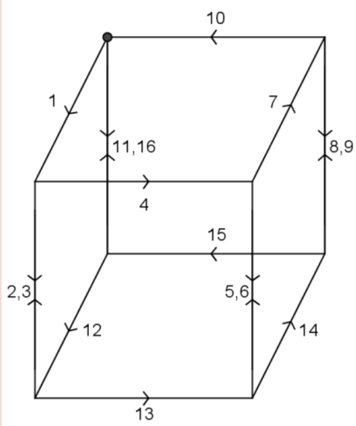
$(n-1) \cdot 4{,}75 + k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 9{,}5(n-1) + 2k = n(n+1) \Leftrightarrow 2k = n^2 - 8{,}5n + 9{,}5$. Nesta igualdade, devemos ter $0 < k \leq n$, com *n* ímpar e maior do que 7. Para *n* = 9, temos $2k = 9^2 - 8{,}5 \cdot 9 + 9{,}5 = 14 \Leftrightarrow k = 7$. Para valores maiores de *n*, o valor de *k* excederá o valor de *n*. Portanto, a sequência é a de 1 a 9, tendo sido apagado o número 7.

28. Uma formiguinha parte do vértice de um cubo de aresta 1 cm para percorrer todas as arestas e voltar ao ponto de partida, andando o mínimo possível. Quanto irá andar?

(A) 12 cm (B) 14 cm (C) 15 cm (D) 16 cm (E) 20 cm

28. Alternativa D

Observe que cada vez que a formiguinha chega num vértice do cubo, ela deve sair deste vértice por alguma aresta para continuar o caminho. Como cada vértice do cubo tem três arestas, a formiguinha deve entrar e sair de cada vértice duas vezes se quiser percorrer todas as arestas do cubo. O cubo possui 8 vértices e se a formiguinha sai duas vezes de cada vértice, então ela entra numa aresta $8 \cdot 2 = 16$ vezes, ou seja, o menor caminho que a formiguinha percorre tem pelo menos $16\,\text{cm}$. Um exemplo de tal caminho é mostrado ao lado.



29. Marcos escreveu dez números diferentes no quadro-negro. Depois, pediu para Márcia sublinhar todos os números da lista que fossem iguais ao produto de todos os outros nove números. No máximo, quantos números Márcia conseguirá sublinhar?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 9 (E) 10

29. Alternativa B

Sejam $a_1, a_2, ..., a_9, a_{10}$ os números. Suponhamos que um número sublinhado seja a_1. Então $a_1 = a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Vamos supor que a_2 também tenha sido sublinhado. Então $a_2 = a_1 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Seja $p = a_3 \cdot ... \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Temos $a_1 = a_2 \cdot p$ e $a_2 = a_1 \cdot p$ e então temos $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow a_1^2 = a_2^2$. Como $a_1 \neq a_2$ concluímos que a_1 e a_2 são números opostos e não nulos, logo $p = -1$. Suponhamos agora que a_3 seja sublinhado, isto é, $a_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_9 \cdot a_{10}$. Temos, analogamente, que $a_3^2 = a_1^2$ e $a_3^2 = a_2^2$ e como a_1 e a_2 são opostos, temos $a_3 = a_1$ ou $a_3 = -a_1 = a_2$. Mas isto não pode ocorrer, pois os números são todos distintos. Logo, Márcia conseguirá sublinhar no máximo 2 números.

30. Vários pontos for marcamados numa reta e se consideram todos os segmentos que têm dois desses pontos como extremidades. Um dos pontos marcados pertence ao **interior** de 80 desses segmentos e outro ponto pertence ao **interior** de 90 desses segmentos. Quantos pontos foram marcados na reta?

(A) 20 (B) 22 (C) 36 (D) 85 (E) 2015

30. Alternativa B

Seja n o número de pontos marcados na reta. Considere o ponto que pertence a 80 segmentos. À sua esquerda existem x pontos e à sua direita existem $n-x-1$ pontos. Cada ponto à esquerda e cada ponto à direita forma o par de extremidades dos segmentos que contêm este ponto no seu interior. Então $x\left((n-1)-x\right) = 80$. Para o ponto que pertence a 90 segmentos, seja y o número de pontos à sua esquerda. Então $y\left((n-1)-y\right) = 90$. Das duas equações podemos escrever $n-1 = \frac{80}{x} + x = \frac{90}{y} + y$. Considerando todos os divisores positivos de 80 e 90, temos que $\frac{80}{x} + x \in \{1+80, 2+40, 4+20, 5+16, 8+10\} = \{81, 42, 24, 21, 18\}$ e $\frac{90}{y} + y \in \{1+90, 2+45, 3+30, 5+18, 6+15, 9+10\} = \{91, 47, 33, 23, 21, 19\}$. Assim, temos :

$n-1 = \frac{80}{x} + x = \frac{90}{y} + y \Leftrightarrow n-1 = 21 \Leftrightarrow n = 22$ ou seja, foram marcados 22 pontos na reta.

Canguru Brasil 2014 – Nível J - Soluções

3 pontos

1. Em todos os anos, o concurso Canguru é realizado na terceira quinta-feira do mês de março. Qual é a possível data mais adiantada para o concurso?

(A) 14 de março (B) 15 de março (C) 20 de março (D) 21 de março (E) 22 de março

1. Alternativa B
A terceira quinta-feira ocorrerá mais cedo se o mês de março começar na quinta-feira. Logo, a segunda semana começará no dia 1 + 7 = 8 e a terceira semana começará no dia 8 + 7 = 15, dia da prova do Canguru.

2. O navio MSC Fabíola detém o recorde de ser o maior cargueiro a entrar na Baía de São Francisco. Sua capacidade é de 12 500 contêineres, que, enfileirados, cobririam uma distância de aproximadamente 75 km. Qual é o comprimento aproximado de um contêiner?

(A) 6 m (B) 16 m (C) 60 m (D) 160 m (E) 600 m

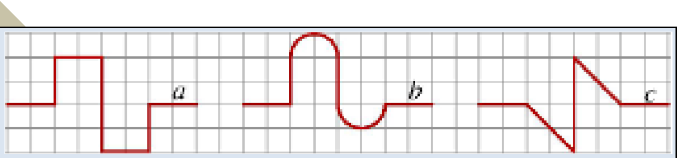
2. Alternativa A

75 km = 75 000 m, logo $\frac{75000}{12500} = 6$ m.

3. Na figura ao lado, as letras *a*, *b* e *c* representam os comprimentos dos segmentos. Qual das desigualdades a seguir é verdadeira?

(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$ (E) $c < b < a$

3. Alternativa E
Como queremos comparar comprimentos, podemos supor que os lados dos quadradinhos têm comprimento 1, logo as semicircunferências têm raio 1 e os segmentos inclinados são diagonais de quadrados de lado 2. Assim, temos *a* = 16, $b = 8 + 2\pi \cdot 1 \cong 14{,}28$ e $c = 8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cong 13{,}6$. Logo $c < b < a$.

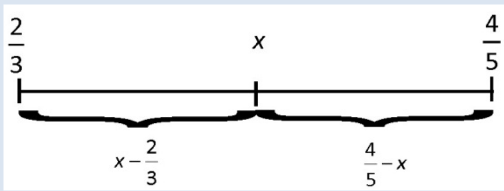


4. Na reta numérica, qual é a fração que fica bem no meio entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$?

(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{15}$ (E) $\frac{5}{8}$

4. Alternativa A
A distância entre dois números *a* e *b*, tais que *a* < *b*, é igual a *b* – *a*. Se *x* é o número que está entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ e à mesma distância dos dois, então

$$x - \frac{2}{3} = \frac{4}{5} - x \Leftrightarrow 2x = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15} \Leftrightarrow x = \frac{11}{15}.$$

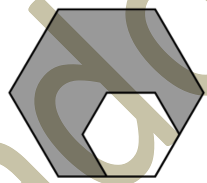


5. No número 2014, o último algarismo é maior do que a soma dos outros três algarismos. Antes, há quantos anos isto aconteceu pela última vez?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

5. Alternativa D
Nos anos anteriores, 2013, 2012, 2011 e 2010, o fato não ocorre. Mas em 2009 sim.
Portanto, isto aconteceu pela última vez há 2014 – 2009 = 5 anos.

6. Na figura, o lado do hexágono maior é o dobro do lado do hexágono menor, que tem 4 cm^2 de área. Qual é a área do hexágono maior, em cm^2?



(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

6. Alternativa E
Os dois hexágonos são figuras semelhantes. Se o lado do hexágono maior é o dobro do lado do menor, então a sua área é quatro vezes maior, ou seja, é igual a 4 x 4 = 16 cm^2.

7. Qual é a negação da sentença: “Todos resolveram mais do que 20 problemas.”?
(A) Ninguém resolveu mais do que 20 problemas.
(B) Alguém resolveu menos do que 21 problemas.
(C) Todos resolveram menos do que 21 problemas.
(D) Alguém resolveu exatamente 20 problemas.
(E) Alguém resolveu mais do que 20 problemas.

7. Alternativa B
A negação de “todos” é “existe algum” e a negação de “mais do que 20” é “igual ou menos do que 20”, ou ainda, “menos do que 21”, no caso de números inteiros. Portanto, a negação de “Todos resolveram mais do que 20 problemas” é “Alguém resolveu menos do que 21 problemas”.

8. No sistema de coordenadas cartesianas, foi desenhado um quadrado com uma diagonal possuindo vértices $(-1;0)$ e $(5;0)$. Qual dos pontos a seguir é um dos outros dois vértices desse quadrado?

(A) $(2;0)$ (B) $(2;3)$ (C) $(2;-6)$ (D) $(3;5)$ (E) $(3;-1)$

8. Alternativa B
A outra diagonal passa pelo ponto médio da diagonal fornecida, que é o centro do quadrado $\left(\frac{-1+5}{2};0\right)=(2;0)$ e é perpendicular ao eixo *Ox*. Logo, os dois outros vértices têm coordenadas $(2;y)$. Como a distância do centro do quadrado é igual a 6 – 2 = 3, concluímos que $y=3$ ou $y=-3$.
Portanto, um dos vértices do quadrado é o ponto $(2;3)$.

9. Numa cidade, a razão entre o número de homens adultos e o de mulheres adultas é $2:3$ e a razão entre o número de mulheres adultas e o de crianças é $8:1$. Qual é a razão entre o número de adultos (homens e mulheres) e o de crianças?

(A) $5:1$ (B) $10:3$ (C) $13:1$ (D) $12:1$ (E) $40:3$

9. Alternativa E
Sendo *H* o número de homens adultos, *M* o número de mulheres adultas e *C* o número de crianças, temos $\frac{H}{M}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{H+M}{M}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$ e $\frac{M}{C}=\frac{8}{1}$, logo $\frac{H+M}{M}\cdot\frac{M}{C}=\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{1}=\frac{40}{3}$, ou seja, a razão entre o número de adultos e o número de crianças é 40:3.

10. O perímetro da roda maior de uma bicicleta é 4,2 metros e o perímetro da menor é 0,9 metros. Num certo momento, as duas válvulas dos pneus estão em seu ponto mais baixo e a bicicleta caminha para a esquerda. Depois de quantos metros as duas válvulas estarão novamente em sua posição mais baixa?

(A) 4,2 (B) 6,3 (C) 12,6 (D) 25,2 (E) 37,8

10. Alternativa C
A distância percorrida pelas rodas é a mesma e é um múltiplo inteiro dos números de voltas que as rodas dão. As rodas voltarão para a mesma posição relativa novamente quando esse número for o menor possível. O mmc de 42 e 09 é 126, logo o mmc de 4,2 e 0,9 é 12,6. As rodas estarão novamente com as válvulas em sua posição mais baixa após terem percorrido 12,6 metros.

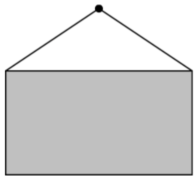
4 pontos

11. Neste ano, uma vovó, sua filha e sua neta têm 100 anos como soma de suas idades. A idade de cada uma delas é uma potência de dois. Em que ano nasceu a neta?

(A) 1998 (B) 2006 (C) 2010 (D) 2012 (E) 2013

11. Alternativa C
As idades são potências de 2, diferentes. Um valor razoável para a idade da avó é a potência $2^6=64$ e metade disso para a filha, ou seja, 32. Como a soma desses dois valores é 96, resta para a neta a idade de 4 anos. Note que o próximo valor maior para a idade da avó é 128 e o menor é 32, impossíveis. Logo, a neta tem 4 anos, tendo nascido em 2010.
Solução alternativa:
Todo número inteiro positivo pode ser representado de forma única como soma de potências de dois, distintas, dada pela base binária. Assim,
$100_{10}=1100100_2=1000000_2+100000_2+100_2=2^6+2^5+2^2$.

12. Paulo pendurou alguns quadros na parede. Para cada quadro ele usou um fio de dois metros, preso pelas pontas nos cantos superiores e um prego fixado a dois metros e meio do chão. Entre os quadros de dimensões (comprimento x altura) dadas em centímetros, a seguir, qual está mais próximo do chão?

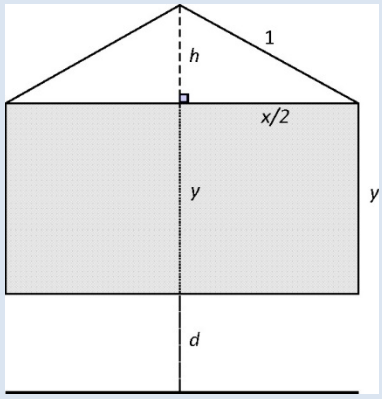


(A) 120×90 (B) 120×50 (C) 60×40 (D) 160×60 (E) 160×100

12. Alternativa A

Seja h a distância do prego à borda superior do quadro de comprimento x e altura y. Então, pelo teorema de Pitágoras, temos $h=\sqrt{1^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Consequentemente, a distância entre a borda inferior e o piso é igual a $d=2{,}5-(h+y)$. A tabela ao lado, com medidas em metros, mostra os cálculos para cada uma das alternativas.

	$x/2$	h	y	d
(A)	0,6	0,8	0,9	0,8
(B)	0,6	0,8	0,5	1,2
(C)	0,3	0,95	0,4	1,15
(D)	0,8	0,6	0,6	1,3
(E)	0,8	0,6	1	0,9



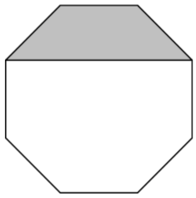
13. Seis amigas dividem um apartamento com dois banheiros, que elas usam todas as manhãs a partir das 7 horas. Cada banheiro é usado apenas por uma garota de cada vez e os tempos que elas levam usando um banheiro são de 9, 11, 13, 18, 22 e 23 minutos, respectivamente. Se elas quiserem terminar de usar os banheiros o mais rapidamente possível, a que horas isto poderá acontecer?

(A) 7h 48min (B) 7h 49min (C) 7h 50min (D) 7h 51min (E) 8h 03min

13. Alternativa B

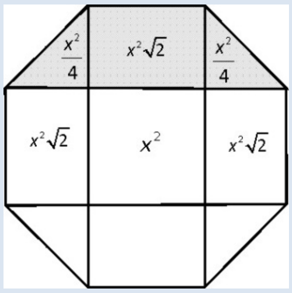
A soma dos tempos utilizados é $9+11+13+18+22+23=96$ minutos. Portanto, um dos banheiros será usado durante pelo menos $96:2=48$ minutos. Com os números dados, três não podem somar 48, mas podem somar 47, já que $11+13+23=47$. As outras três garotas levarão 9 + 18 + 22 = 49 minutos. Assim, elas terminarão de usar os banheiros em pelo menos 49 minutos, ou seja, às 7h 49min.

14. O contorno da figura ao lado é um octógono regular. A região limitada pelos lados e uma diagonal, em cinza, tem 3 cm^2 de área. Qual é a área de toda a região octogonal, em cm^2?



(A) $8+4\sqrt{2}$ (B) 9 (C) $8\sqrt{2}$ (D) 12 (E) 14

14. Alternativa D



Seja x a medida do lado do octógono. Este pode ser subdividido em quatro triângulos retângulos de catetos $\frac{x}{\sqrt{2}}$, cada um com área igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{4}$, quatro retângulos de lados x e $\frac{x}{\sqrt{2}}$, de área $\frac{x^2}{\sqrt{2}}=x^2\sqrt{2}$ cada um e um quadrado de lado x e área x^2. Temos $2\cdot\frac{x^2}{4}+x^2\sqrt{2}=\frac{x^2}{2}+x^2\sqrt{2}=3$ (área da região cinza) logo a área da faixa intermediária é igual a $2\cdot x^2\sqrt{2}+x^2=2\left(\frac{x^2}{2}+x^2\sqrt{2}\right)=2\cdot 3=6$. Portanto, a área do octógono é $3+6+3=12$ cm^2.

Solução alternativa

Podemos considerar a área do octógono como sendo quatro vezes a área do trapézio cinza menos quatro vezes a área dos triângulos retângulos mais a área do quadrado central. Isto resulta $4\times 3-4\cdot\frac{x^2}{4}+x^2=12-x^2+x^2=12\text{cm}^2$.

15. Um tipo especial de jacaré tem sua cauda com comprimento igual a um terço do seu comprimento total. Sua cabeça tem 93 cm de comprimento, correspondente a um quarto do comprimento total descontada a cauda. Qual é o comprimento total do jacaré, em centímetros?

(A) 186 (B) 372 (C) 490 (D) 496 (E) 558

15. Alternativa E

Se x é o comprimento total do jacaré, então $\frac{x}{3}$ é comprimento da cauda. Temos, então, $93=\frac{x-\frac{x}{3}}{4}\Leftrightarrow 93=\frac{x}{6}\Leftrightarrow x=558$ cm.

16. Num dado diferente, os números em algumas faces podem ser vistos na figura. Os números das faces não visíveis são todos primos. Sabendo que as somas dos números em faces opostas são iguais, qual é o número da face oposta à face com o número 14?

(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

16. Alternativa E
Temos $35+x=14+y=18+z$, sendo x, y, z primos. Apenas 2 e -2 são primos pares e nenhum deles poderia se opor a 14 ou 18, pois a soma dos números nas faces opostas seria menor do que 35. Portanto, os primos opostos às faces 14 e 18 são ambos ímpares, logo o número oposto à face 35 tem forçosamente que ser par, já que as somas nas faces consideradas anteriormente são ímpares. Esse número não pode ser -2, pois $35+(-2)=33$, o que forçaria a face oposta a 18 ter número 15, que não é primo. Mas se x = 2, então y = 23 e z = 19. Logo, o número oposto ao número 14 é 23.

17. Ana andou 8 km com velocidade constante de 4 km/h e passou a correr com velocidade constante de 8 km/h. Quanto tempo ela correu com esta velocidade até que a sua velocidade média no percurso atingiu 5 km/h ?

(A) 15 min (B) 20 min (C) 30 min (D) 35 min (E) 40 min

17. Alternativa E
Ana andou com velocidade de 4 km/h durante $\frac{8\text{km}}{4\text{km/h}}=2\text{h}$ e andou um tempo x com velocidade de 8km/h. A velocidade média no intervalo de tempo 2 + x é igual a $\frac{4\cdot 2+8\cdot x}{2+x}=5$. Assim, $\frac{8+8x}{2+x}=5 \Leftrightarrow 8+8x=10+5x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\text{h}=40\text{min}$.

18. Um jogador de xadrez jogou 40 partidas e conquistou 25 pontos, sendo que a vitória vale um ponto, o empate vale meio ponto e a derrota vale zero ponto. Quantas vitórias a mais do que derrotas ele conseguiu?

(A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 15

18. Alternativa C
Seja x o número de vitórias e y, o número de empates. Sabemos que $1\cdot x+0{,}5\cdot y=25 \Leftrightarrow y=50-2x$. Assim, o número de derrotas é $40-(x+y)=40-(x+50-2x)=x-10$. Logo, a diferença entre o número de vitórias e o número de derrotas é $x-(x-10)=x-x+10=10$.

19. As amigas Jane, Daniela e Ana querem comprar chapéus iguais. Entretanto, falta dinheiro para Jane no valor de um terço do preço do chapéu, para Daniela falta um quarto e para Ana falta um quinto. Quando os chapéus ficaram R$9,40 reais mais baratos, as amigas, juntando o dinheiro que tinham, puderam comprá-los, sem sobrar nem faltar dinheiro. Quanto custava cada chapéu antes do desconto?

(A) R$ 12,00 (B) R$ 16,00 (C) R$ 28,00 (D) R$ 36,00 (E) R$ 112,00

19. Alternativa D
Sendo x o preço original de cada chapéu, temos:

$$\left(x-\frac{x}{3}\right)+\left(x-\frac{x}{4}\right)+\left(x-\frac{x}{5}\right)=3\left(x-9{,}40\right)\Leftrightarrow 3x-\frac{20x+15x+12x}{60}=3x-28{,}2\Leftrightarrow\frac{47x}{60}=28{,}2$$

$\Leftrightarrow x=\text{R\$ } 36{,}00$

20. Sejam p,q,r números inteiros positivos tais que $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}$. Qual é o valor de pqr ?

(A) 6 (B) 10 (C) 18 (D) 36 (E) 42

20. Alternativa C
Temos $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}\Leftrightarrow p+\frac{r}{qr+1}=1+\frac{6}{19}<2$. Como *p* é inteiro positivo, concluímos que *p* = 1, logo $\frac{r}{qr+1}=\frac{6}{19}\Leftrightarrow 19r=6qr+6\Leftrightarrow 19r-6qr=6\Leftrightarrow r=\frac{6}{19-6q}$. Como *r* e q são inteiros positivos, temos *q* = 3 e *r* = 6. Logo, $pqr=1\cdot3\cdot6=18$.

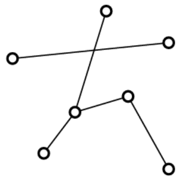
5 pontos

21. Na igualdade $N\times Ú\times\left(M+E+R+O\right)=33$, cada letra representa um algarismo e diferentes letras representam diferentes algarismos. De quantas maneiras distintas podem ser escolhidos os valores dessas letras?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 48 (E) 60

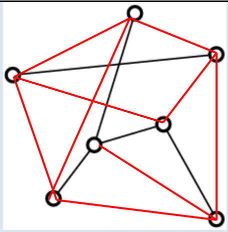
21. Alternativa D
Como $33=1\times3\times11$ e na expressão $N\times Ú\times\left(M+E+R+O\right)=33$ as letras *N* e *Ú* são algarismos, isto é, nenhuma delas isoladamente pode valer 11, podendo assumir somente um dos valores 1 ou 3, então devemos ter $M+E+R+O=11$. O menor valor para cada uma dessas letras é 0, restando para a soma das três restantes o valor 11. O menor valor de uma destas é 4 e as outras duas devem somar 7, o que pode ser feito com 2 e 5. Podemos permutar os valores 0, 2, 4 e 5. Portanto, os valores dessas letras podem ser escolhidos de $2\cdot4!=48$ maneiras diferentes.

22. Carina quer adicionar alguns segmentos na figura à direita de modo que cada um dos sete pontos tenha o mesmo número de ligações com os demais. Pelo menos quantos segmentos ela deve traçar?

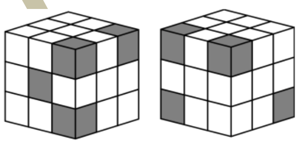


(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 10

22. Alternativa D
Há sete pontos e um deles liga-se a outros três. Se cada um dos pontos pudesse ligar-se a outros três, teríamos um total de $\frac{7\times 3}{2}=10,5$ ligações, o que é impossível. Se cada ponto ligar-se a quatro outros, teremos um total de $\frac{7\times 4}{2}=14$ ligações, faltando 14 – 5 = 9 ligações. Logo, basta traçar nove segmentos para isso ocorrer (como no exemplo da figura ao lado).

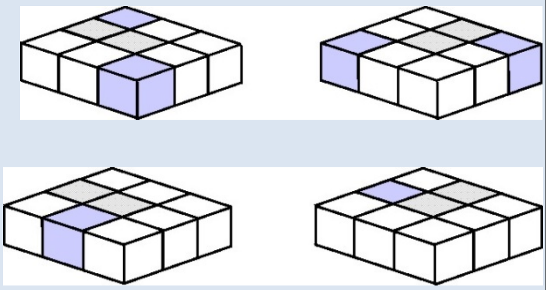


23. A figura mostra duas vistas diferentes do mesmo cubo, construído com 27 cubinhos, alguns cinza e outros brancos. No máximo, quantos são os cubinhos cinza?



(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

23. Alternativa D
Concluímos, através das duas vistas, que a camada superior apresenta exatamente dois cubos cinzentos. As duas vistas da camada inferior, conforme ilustração à direita, acima, mostram que pode haver quatro cubos cinzentos na mesma, dois dos quais, na cor cinza mais clara, estão ocultos. Na camada intermediária, pode haver três cubos, dois dos quais ocultos (em cinza claro). Portanto, há no máximo 9 cubinhos cinza.



24. Numa ilha, os sapos são verdes ou azuis. O número de sapos azuis cresceu 60% enquanto que o número de sapos verdes diminuiu 60%. Se a razão entre o número de sapos azuis e o número de sapos verdes é agora o inverso dessa razão antes da variação, qual é a porcentagem da variação do número total de sapos?

(A) 0% (B) 20% (C) 30% (D) 40% (E) 50%

24. Alternativa B
Se *a* é o número de sapos azuis e *v* é o número de sapos verdes no início, então, depois da variação, esses números são *a* + 60º de *a* = 1,6 *a* e *v* – 60º de *v* = 0,4 *v*. De acordo com as informações, temos $\frac{a}{v}=\frac{0,4v}{1,6a}\Leftrightarrow 1,6a^2=0,4v^2\Leftrightarrow 4a^2=v^2\Leftrightarrow a=2v$. A razão entre a população atual e a original é $\frac{1,6a+0,4v}{a+v}=\frac{1,6\cdot 2v+0,4v}{2v+v}=\frac{3,6}{3}=1,2=1+20\%$. Portanto, o número total de sapos aumentou 20%.

25. Tom quer escrever uma lista de vários números inteiros menores do que 100 e cujo produto não é divisível por 18. No máximo, quantos números poderão ser escritos?

(A) 5 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

25. Alternativa C

Como $18 = 2\cdot 3^2$, para fazer a lista devemos descobrir o que é mais vantajoso. Por exemplo, se eliminarmos todos os números pares, o produto dos 50 ímpares restantes não será divisível por 18. Podemos excluir menos números se eliminarmos todos os múltiplos de 3, exceto um número com apenas um fator 3. Eliminamos menos números com a segunda opção, pois há 33 números positivos divisíveis por 3 menores do que 100, enquanto que há 49 números pares positivos menores do que 100. Assim, a quantidade máxima de números que Tom pode escrever é $100-33+1=68$ (por exemplo: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, ..., 97,98).

26. Três vértices de um cubo são também vértices de um triângulo. Quantos desses triângulos não possuem vértices pertencentes a uma mesma face do cubo?

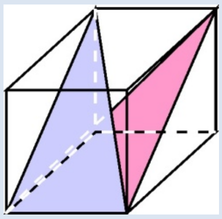
(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48

26. Alternativa C

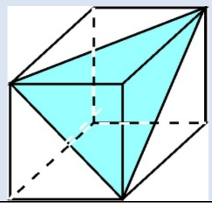
Um cubo tem oito vértices e seis faces. O número total de triângulos cujos vértices são vértices de um cubo é igual a $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$. O número de triângulos cujos vértices são vértices de um quadrado (face do cubo) é igual a $\binom{4}{3} = 4$. Portanto, o número de triângulos cujos vértices são vértices de um cubo mas não da mesma face do cubo é igual a $56-6\cdot 4=32$.

Solução alternativa

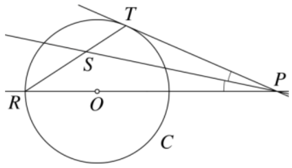
Um cubo tem 12 arestas e 8 vértices. Cada aresta é um lado de dois triângulos que não estão contidos em nenhuma das duas faces que contêm esta aresta, conforme figura ao lado. Como são 12 arestas, temos 2 x 12 = 24 triângulos desse tipo.



Para cada vértice, as outras extremidades das arestas que nele concorrem são vértices de um triângulo equilátero, num total de 8 triângulos, conforme figura ao lado. Portanto, o número de triângulos com vértices coincidindo com os vértices do cubo, sem estar contidos nas faces, é 24 + 8 = 32.

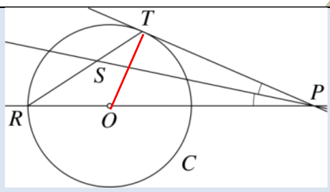


27. Na figura, *PT* é tangente ao círculo *C* com centro *O*. Se *PS* é a bissetriz do ângulo $T\hat{P}R$, qual é a medida do ângulo $T\hat{S}P$?



(A) 30º (B) 45º (C) 60º (D) 75º
(E) Depende da posição do ponto *P*

27. Alternativa B



No triângulo isósceles *ROT* temos $m(R\hat{T}O) = m(O\hat{R}T) = \beta$. Temos também $m(T\hat{P}S) = m(S\hat{P}R) = \alpha$. No triângulo *SRP*, a medida do ângulo externo $T\hat{S}P$ é $\alpha + \beta$ e no triângulo *TOP*, retângulo em *T*, a medida do ângulo externo $R\hat{O}T$ é $90^{o} + 2\alpha$. Assim, no triângulo *ROT*, temos $\beta + \beta + 90^{o} + 2\alpha = 180^{o} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 45^{o}$. Logo, a medida do ângulo $T\hat{S}P$ é 45º.

28. Maria fez uma lista, em ordem crescente, de todos os números de sete algarismos distintos que podem ser escritos com todos os algarismos de 1 a 7. Então, ela dividiu a lista exatamente no meio. Qual é o maior número da primeira metade da lista?

(A) 1234567 (B) 3765421 (C) 4123567 (D) 4352617 (E) 4376521

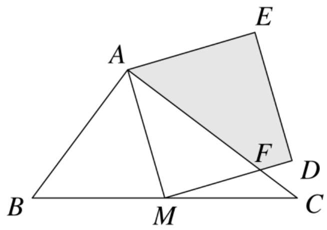
28. Alternativa E

Tomando como exemplo todos os números formados com os algarismos de 1 a 3, temos a lista 123, 132, 213|231, 312, 321. O último número da primeira metade é 213 e o primeiro da segunda metade é 231, isto é, basta olhar para o bloco central, formado pelos números que começam com 2 e achar o maior número da sua primeira metade. Olhando para a lista dos números formados com os algarismos de 1 a 4, vemos que o maior número da primeira metade é exatamente o último número que começa com 2, ou seja, 2431. No caso dos números formados pelos algarismos de 1 a 7, o bloco central é o dos números que começam com 4. O primeiro desses números é **4**123567 e o último é o número **4**765321. A lista de todos os números com os seis algarismos 1,2,3,5,6 e 7 tem sua primeira metade terminando com o maior número que começa com 3, ou seja, 376521. Portanto, o maior número da primeira metade da lista original é 4376521.

Solução alternativa

Existem 7! números com 7 algarismos distintos. Ao dividir a lista com todos esses números ao meio, teremos $\frac{7!}{2} = 7 \cdot 3 \cdot 5! = 21 \cdot 5!$ números em cada metade. Da lista, fixado um algarismo inicial, verificamos que há $6 \cdot 5!$ números começando com este algarismo. Vemos, assim, que há $3 \cdot 6 \cdot 5! = 18 \cdot 5!$ números iniciando com 1, 2 ou 3. Logo, a primeira metade da lista possui vários números começando com o algarismo 4, na verdade $\frac{6}{2} \cdot 5! = 3 \cdot 5!$ números. Desses números, há 5! começando com 41, 5! começando com 42 e 5! começando com 43, completando os $3 \cdot 5!$ números. Portanto, o maior número da primeira lista é o número 4376521.

29. Na figura, o triângulo ABC tem AB = 6 cm, AC = 8 cm e BC = 10 cm. Sendo M o ponto médio do lado BC, o lado MD do quadrado $AMDE$ encontra o lado AC no ponto F. Qual é a área do quadrilátero $AFDE$ em cm^2 ?



(A) $\frac{125}{8}$ (B) $\frac{126}{8}$ (C) $\frac{127}{8}$ (D) $\frac{128}{8}$ (E) $\frac{129}{8}$

29. Alternativa A
Como AB = 6, AC = 8 e BC = 10, temos $BC^2 = AB^2 + AC^2$, logo o triângulo ABC é retângulo em A, pela recíproca do teorema de Pitágoras. Sendo M o ponto médio da hipotenusa BC, temos $AM = MC = 5$. Assim, o triângulo AMC é isósceles, tal que $\mathrm{m}\left(M\hat{A}C\right) = \mathrm{m}\left(M\hat{C}A\right)$ e o triângulo retângulo AMF é semelhante ao triângulo CAB, de modo que $\frac{AM}{AC} = \frac{MF}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{MF}{6} \Leftrightarrow MF = \frac{15}{4}$. A área do triângulo AMF é $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8}$. Portanto, a área do quadrilátero $AFDE$ é $5^2 - \frac{75}{8} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}$ cm^2.

30. Há 2014 pessoas numa fila, sendo cada uma delas um mentiroso (nunca diz a verdade) ou um virtuoso (sempre diz a verdade). Cada uma delas afirma que há mais mentirosos depois dela do que virtuosos antes dela. Quantos mentirosos há na fila?

(A) 0 (B) 1 (C) 1007 (D) 1008 (E) 2014

30. Alternativa C
Seja k o número de virtuosos na fila. Olhando para a fila, da esquerda para a direita, aparecem os virtuosos 1, 2, 3, ... até o de número k. Este afirma, verdadeiramente, que há mais mentirosos atrás dele do que virtuosos à sua frente. Como o número de virtuosos à sua frente é $k-1$, o número de mentirosos atrás dele é maior do que $k-1$. Mas o número total de mentirosos é igual a $2014-k$ e este número não é inferior ao número de mentirosos depois do k-ésimo virtuoso. Portanto, $2014-k > k-1 \Leftrightarrow 2015 > 2k \Leftrightarrow k < \frac{2015}{2} \Leftrightarrow k \le 1007$ (k é um número inteiro). Supondo $k < 1007$, concluímos que $k < 1007 \Leftrightarrow -k > -1007 \Leftrightarrow 2014-k > 1007$, isto é, o número de mentirosos é maior ou igual a 1008. Neste caso, o primeiro mentiroso à esquerda teria 1007 mentirosos atrás de si e, ao afirmar que o número de virtuosos à sua frente (que seria então no máximo 2014 – 1008 = 1006) é menor do que o número de mentirosos atrás de si, estaria dizendo a verdade, coisa que ele não pode fazer (absurdo). Logo, o número 2014 – k de mentirosos é igual a 2014 – 1007 = 1007.