Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível C – 2020 – Respostas

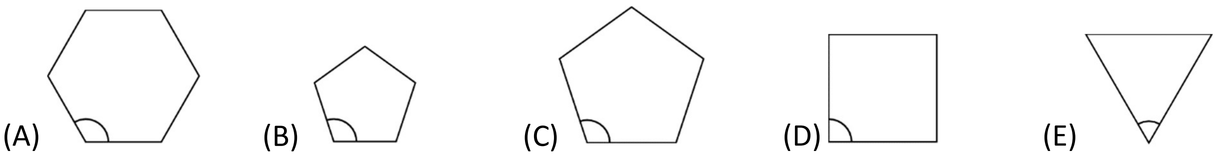
3 pontos

1. Quantos dentre os números 2, 20, 202, 2020 são primos?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

1. Resposta: alternativa B
O único número par, positivo e primo é o número 2. Dentre os números apresentados, somente um é primo.

2. Em qual dos polígonos regulares abaixo o ângulo marcado é o maior?



2. Resposta: alternativa A
A medida do ângulo interno de um polígono regular é tanto maior quanto maior o número de lados. No caso, o hexágono tem o maior ângulo interno.
Comentário: as medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono regular e do hexágono regular são, respectivamente, 60º, 90º, 108º, 120º.

3. Miguel resolve seis problemas de Matemática todos os dias, enquanto Lázaro resolve quatro todos os dias. Quantos dias Lázaro leva para resolver o mesmo número de problemas que Miguel resolve em quatro dias?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

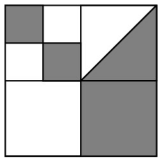
3. Resposta: alternativa C
Em quatro dias, Miguel resolve $6 \times 4 = 24$problemas. Para resolver 24 problemas, Lázaro leva $24 \div 4 = 6$ dias.

4. Qual das frações a seguir tem o maior valor?

(A) $\frac{8+5}{3}$ (B) $\frac{8}{3+5}$ (C) $\frac{3+5}{8}$ (D) $\frac{8+3}{5}$ (E) $\frac{3}{8+5}$

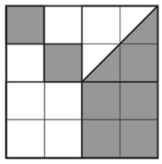
4. Resposta: alternativa A
$\frac{8+5}{3}=\frac{13}{3}>4$, $\frac{8}{3+5}=\frac{8}{8}=1$, $\frac{3+5}{8}=\frac{8}{8}=1$, $\frac{8+3}{5}=\frac{11}{5}<3$ e $\frac{3}{8+5}=\frac{3}{13}<1$. Logo, a fração de maior valor é $\frac{8+5}{3}$.

5. Num desses quadrados menores também foi desenhada uma diagonal. Qual fração do quadrado original foi escurecida?



(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

5. Resposta: alternativa E
Primeiramente, vemos que o quadrado original foi dividido em quatro quadrados menores iguais. Um desses quadrados também foi dividido em quatro, sendo que dois desses menores foram escurecidos, logo a metade desse quadrado foi escurecida. O outro quadrado de cima foi dividido ao meio por uma diagonal e por isso também tem sua metade escurecida. Na parte de baixo, há um quadrado inteiramente branco e um inteiramente escurecido. Logo, a parte de baixo também está escurecida pela metade. Assim, metade do quadrado original está escurecida.



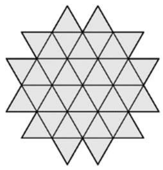
Solução alternativa: podemos quadricular o quadrado original em 16 quadradinhos, conforme mostrado na figura e contar os quadradinhos e metades dos quadradinhos escuros. Há sete quadradinhos inteiros e duas metades, totalizando oito quadradinhos. Logo, metade do quadrado original foi escurecida.

6. Quatro times de futebol disputam um campeonato. Cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros times. Em cada partida, o time vitorioso ganha 3 pontos, o derrotado recebe 0 ponto e, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Findo o campeonato, qual dos números a seguir **NÃO** pode ser a soma de todos os pontos obtidos por um time?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

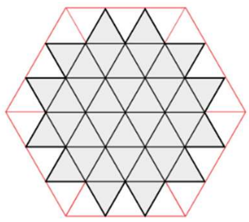
6. Resposta: alternativa E
Vamos representar os resultados para um time qualquer usando três letras: V, E e P (vence, empata, perde, não importando em que ordem). Temos as seguintes possibilidades: VVV, VVE, VVP, VEE, VPP, VEP, EEE, EEP, EPP, PPP e as pontuações para esses nove resultados são, respectivamente, 9, 7, 6, 5, 3, 4, 3, 2, 1, 0.

7. A figura ao lado é formada por 36 triângulos iguais. Pelo menos quantos triângulos a mais, iguais a esses, deveriam ser usados para transformar a figura em um hexágono?



(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

7. Resposta: alternativa D
Vemos, na figura, como completar o desenho usando o menor número de triângulos: 18.



Solução alternativa: podemos pensar na figura como um conjunto de hexágonos de lados 1, 2 e 3. O hexágono de lado 1 é formado por 6 triângulos. O hexágono de lado 2 tem 4 vezes essa área, ao seu redor, o hexágono de lado 3, que falta completar na figura, tem uma área igual a 9 vezes a área do hexágono de lado 1. Portanto, é formado por $9 \times 6 = 54$ triângulos. Como a figura já tem 36 triângulos, faltam usar 54 – 36 = 18 triângulos.

8. Carlos quer multiplicar três números diferentes escolhidos da lista $-5, -3, -1, 2, 4$ e 6. Qual é o menor resultado que ele pode obter?

(A) -200 (B) -120 (C) -90 (D) -48 (E) -15

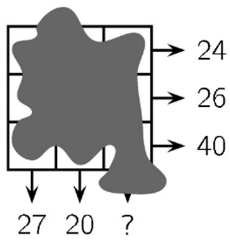
8. Resposta: alternativa B
$6 \times (-5) \times 4 = -120.$

9. Se João vai para a escola de ônibus e volta a pé, ele leva 3 horas no total. Se ele vai e volta de ônibus, ele leva 1 hora no total. Quanto tempo ele levaria para ir e voltar da escola a pé?

(A) 3,5 horas (B) 4 horas (C) 4,5 horas (D) 5 horas (E) 5,5 horas

9. Resposta: alternativa D
João leva meia hora para ir e meia hora para voltar quando anda de ônibus, pois vai e volta em uma hora. Quando vai de ônibus e volta a pé, leva três horas. Portanto, para ir ou voltar a pé ele leva $3 - 0{,}5 = 2{,}5$ horas. Logo, para ir e voltar da escola a pé, João leva $2{,}5 + 2{,}5 = 5$ horas.

10. Foi escrito um número em cada uma das casas do tabuleiro 3×3 ao lado, mas eles foram cobertos por uma mancha de tinta. Entretanto, as somas dos números em cada uma das três linhas e em duas colunas são conhecidas, indicadas pelas flechas na figura. Qual é a soma dos números da terceira coluna?

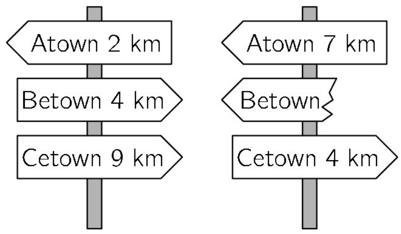


(A) 41 (B) 43 (C) 44 (D) 45 (E) 47

10. Resposta: alternativa B
Os números que aparecem nas três linhas são os números que aparecem nas três colunas, logo a soma de todos os números é a mesma quando somamos todas as linhas ou somamos todas as colunas. A soma de todos os números é $24 + 26 + 40 = 90$. Logo a soma dos números da terceira coluna é $90 - 27 - 20 = 43$.

4 pontos

11. A estrada mais curta de Atown para Cetown passa por Betown. Nessa estrada aparecem as placas de sinalização ao lado. Qual é a distância que estava indicada no pedaço quebrado de uma placa?



(A) 1 km (B) 3 km (C) 4 km (D) 5 km (E) 9 km

11. Resposta: alternativa A
Quem vai para Cetown pelo caminho proposto encontra a primeira sinalização dizendo que Atown ficou 2 km para trás e tem que andar 4 km até chegar em Betown. Ao encontrar a segunda sinalização, fica sabendo que deixou Atown 7 km para trás, ou seja, andou 7 – 2 = 5 km desde que

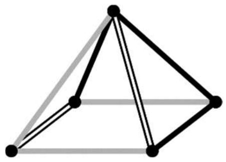
viu a primeira sinalização. Portanto, deixou Betown para trás em 5 – 4 = 1 km. É isto que deveria estar escrito na placa quebrada.

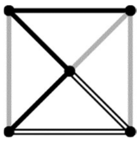
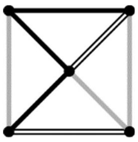
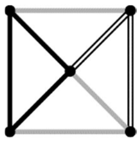
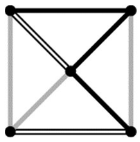
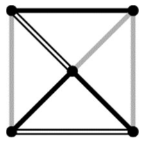
12. Ana planejou andar uma média de 5 km por dia em março. No fim do dia 16 de março ela verificou que tinha andado 95 km até então. Qual é a distância média diária que ela deverá andar nos dias restantes de modo a cumprir seu plano?

(A) 5,4 km (B) 5 km (C) 4 km (D) 3,6 km (E) 3,1 km

12. Resposta: alternativa C
Março tem 31 dias, logo Ana deve andar $31 \times 5 = 155$km nesse mês. Ela andou 95 km até o dia 16, logo deve andar 155 – 95 = 60 km nos 15 dias restantes. Isso dá uma média da $60 \div 15 = 4$ km por dia.

13. Qual das figuras abaixo mostra o que você irá ver se olhar de cima a pirâmide representada ao lado?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

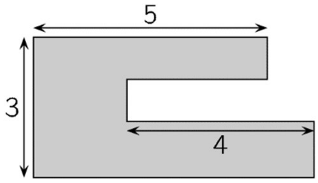
13. Resposta: alternativa B
Olhando de cima veremos um quadrado e um X dentro desse quadrado. No X, dois traços pretos vizinhos, e girando no sentido anti-horário, o traço cinza primeiro e o traço riscado em seguida. Com isso, eliminamos as alternativas A e D. Os dois traços pretos do X se ligam ao lado cinza do quadrado. Com isso eliminamos as alternativas C e E. Resta apenas a alternativa B.

14. Numa classe, os alunos nadam somente ou dançam somente ou fazem as duas coisas. Três quintos dos alunos da classe nadam e três quintos dançam. Há exatamente cinco alunos que fazem as duas coisas, isto é, nadam e dançam. Quantos alunos há na classe?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35

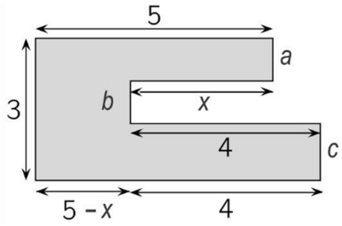
14. Resposta: alternativa C
Seja x o número de alunos da classe. O número de alunos da classe é igual ao número de alunos que nadam mais o número de alunos que dançam menos o número de alunos que fazem as duas coisas. Temos, então, $x = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}x - 5 \Leftrightarrow x = \frac{6x}{5} - 5 \Leftrightarrow \frac{6x}{5} - x = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 5 \Leftrightarrow x = 25$.

15. O jardim da casa da Sônia tem a forma representada ao lado. Os lados do jardim são paralelos ou perpendiculares. Algumas das medidas desses lados são mostradas na figura. Qual é o perímetro do jardim?



(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

15. Resposta: alternativa C



Considerando as dimensões indicadas na figura, o perímetro do jardim é igual a $3+5+a+x+b+4+c+4+5-x=21+a+b+c=21+3=24$.

16. Andrew comprou 27 cubinhos iguais, cada um deles com duas faces adjacentes pintadas de vermelho. Ele quer usar todos esses cubinhos para construir um cubo maior. Qual é o maior número de faces completamente vermelhas que ele poderá obter para esse cubo?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

16. Resposta: alternativa C

As faces vermelhas do cubo não podem ser como as que aparecem na figura 1, pois nesse caso seriam necessários cubinhos com três faces vermelhas para serem colocados nos vértices do cubo. Logo, as faces vermelhas devem formar uma cinta, como na figura 2. Os cubinhos com duas faces vermelhas ficam nas arestas e os demais ficam com apenas uma face vermelha exposta. O número máximo que faces vermelhas que podem obtidas é 4.

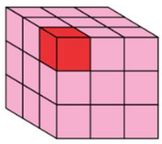


figura 1

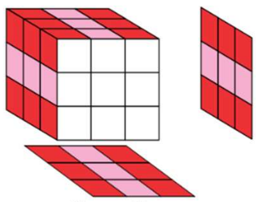
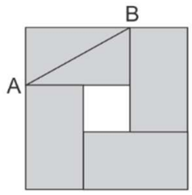


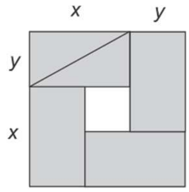
figura 2

17. Um quadrado é formado por quatro retângulos idênticos e um quadrado menor, como na figura. A área do quadrado é 49 cm^2 e o comprimento da diagonal AB de um dos retângulos é 5 cm. Qual é a área do quadrado menor?



(A) 1 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 9 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 25 cm^2

17. Resposta: alternativa A



Sejam x, y, $x > y$, as dimensões dos retângulos. Então, a medida do lado do quadrado maior é $x + y$ e a medida do lado do quadrado branco menor é $x - y$. Sabemos que a área do quadrado maior é 49, logo $(x+y)^2 = 49$ e sabemos que a diagonal de cada retângulo mede 5, logo, pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 + y^2 = 5^2 = 25$. Sabemos também que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, logo $49 = 25 + 2xy \Leftrightarrow 2xy = 24 \Leftrightarrow xy = 12$. Como $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, concluímos que $(x-y)^2 = 25 - 2 \cdot 12 = 1$, ou seja, a área do quadrado menor branco é 1 cm^2.

18. O salário de Vagner é 20% do salário de seu chefe. De quanto deveria ser aumentado o salário de Vagner para ser igual ao salário de seu chefe?

(A) 80% (B) 120% (C) 180% (D) 400% (E) 520%

18. Resposta: alternativa D

Se *x* é o salário do chefe de Vágner, então o salário de Vágner é 20% de *x*, ou seja, $0{,}2x$. O salário de Vágner deve ser aumentado de um percentual y % para ficar igual ao salário de seu chefe, ou seja,

$$0{,}2x + y\% \text{ de } 0{,}2x = 0{,}2x + \frac{y}{100} \cdot 0{,}2x = 0{,}2\left(1 + \frac{y}{100}\right) = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{100} = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

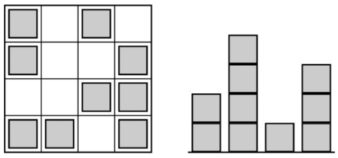
$$\Leftrightarrow \frac{y}{100} = 4 \Leftrightarrow y = 400$$

O salário de Vágner deveria ser aumentado de 400%.

Observação: todos esses cálculos podem ser resumidos. Se *k* é o fator que deve multiplicar o salário de Vágner para este ficar igual ao salário do chefe, devemos ter $k \cdot 0{,}2x = x \Leftrightarrow k = \frac{1}{0{,}2} = 5$.

Se 1 era o salário e deve se tornar 5, então o aumento é de 4 ou, o que dá no mesmo, 400%.

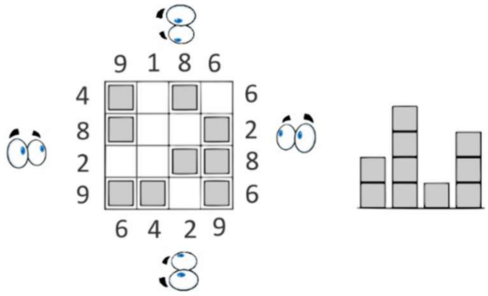
19. Irene fez uma “cidade” usando cubos iguais de madeira. Temos, ao lado, uma vista de cima e uma vista lateral dessa “cidade”. Não sabemos qual lateral da “cidade” está sendo mostrada. Qual é a maior quantidade de cubos que Irene pode ter usado para fazer sua montagem ?



(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 22 (E) 21

19. Resposta: alternativa B

Temos, ao lado, as quatro possíveis posições do observador, com as respectivas quantidades máximas de cubos possíveis para a silhueta apresentada. A maior quantidade de cubos nessas condições é 9 + 1 + 8 + 6 = 24.



20. Amélia tem um tira de papel com cinco casas numeradas de 1 a 5, conforme a figura. Ela dobra a tira de tal forma que as casas se superpõem em cinco camadas. Qual das sequências de camadas, de cima para baixo, não é possível obter?

1	2	3	4	5

(A) 3, 5, 4, 2, 1 (B) 3, 4, 5, 1, 2 (C) 3, 2, 1, 4, 5 (D) 3, 1, 2, 4, 5 (E) 3, 4, 2, 1, 5

Resposta: alternativa E

A casa 3 separa a tira nas casas adjacentes 1 e 2 de um lado e as casas adjacentes 4 e 5 do outro lado.

Abaixo de 3 pode vir 1 e 2 ou 2 e 1 ou 4 e 5 ou 5 e 4; isto é, os pares 1, 2 e 4 e 5 não podem ser quebrados. Por isso a sequência 3, 4, 2, 1, 5 não é possível.

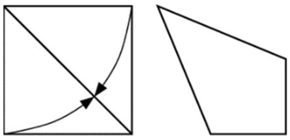
5 pontos

21. Doze cubos coloridos são enfileirados lado a lado. Há três cubos azuis, dois amarelos, três vermelhos e quatro verdes, mas não nessa ordem. Há um cubo vermelho numa extremidade e um amarelo na outra. Os cubos vermelhos estão todos juntos e o cubos verdes também estão todos juntos. O décimo cubo a partir da esquerda é azul. Qual é a cor do sexto cubo a partir da esquerda?

(A) verde (B) amarela (C) azul (D) vermelha (E) vermelha ou azul

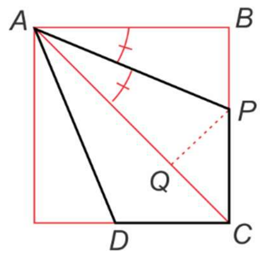
21. Resposta: alternativa A
Como o décimo cubo da esquerda para a direita é azul e os três cubos vermelhos têm que estar juntos, além de um deles ficar na extremidade da fila, concluímos que forçosamente os três cubos vermelhos ficam à esquerda. O bloco de quatro cubos verdes só poderá ficar entre a terceira posição e a décima posição (4ª, 5ª, 6ª, 7ª ou 5ª,6ª, 7ª ,8ª ou 6ª ,7ª , 8ª, 9ª). Em qualquer uma dessas posições o sexto cubo a partir da esquerda pertencerá ao bloco verde. Logo, sua cor é verde.

22. Zilda pegou uma folha de papel quadrada e fez duas dobras levando dois lados consecutivos da folha até uma diagonal da mesma, como mostrado na figura, obtendo um quadrilátero. Qual é a medida do maior ângulo desse quadrilátero?



(A) $112{,}5^{\circ}$ (B) 120° (C) 125° (D) 135° (E) 150°

22. Resposta: alternativa A
Ao dobrar a folha levando o lado AB à diagonal do quadrado, temos que o ponto B é levado ao ponto Q. Vemos, também, que são congruentes os triângulos *ABP* e *AQP*, logo são congruentes os ângulos assinalados. Como *AC* é diagonal do quadrado, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 45° e, consequentemente, o ângulo $P\hat{A}C$ mede a metade, $22{,}5^{\circ}$. Pela simetria da figura, o ângulo $C\hat{A}D$ tem a mesma medida. Logo, o ângulo $P\hat{A}D$ mede 45°. Assim, no quadrilátero *ADCB* temos



$$m(\hat{A}) = 45^0, m(\hat{C}) = 90^0, m(\hat{P}) = m(\hat{Q}) = \frac{360^0-45^0-90^0}{2} = 112,5^0.$$

23. Quantos números A de quatro algarismos existem, de modo que a metade de A é divisível por 2, um terço de A é divisível por 3 e um quinto de A é divisível por 5?

(A) 1 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 11

23. Resposta: alternativa D

Se a metade de A é divisível por 2, então A é divisível por 4; se um terço de A é divisível por 3, então A é divisível por 9 e se um quinto de A é divisível por 5, então A é divisível por 25. Logo, A é divisível por $4 \times 9 \times 25 = 900$. Os números de quatro algarismos divisíveis por 900 são 1800, 2700, ..., 9900, totalizando 10 números.

24. No final de uma competição de dança, cada um dos três juízes deu para os cinco concorrentes um dos números de pontos a seguir: 0, 1, 2, 3, 4. Não houve concorrentes com notas iguais dadas por um mesmo juiz. Um desses concorrentes, o Adam, anotou numa tabela a soma dos pontos de todos os participantes e algumas notas isoladas. Quantos pontos Adam obteve do juiz III?

	Adam	Berta	Clara	David	Emil
I	2	0			
II		2	0		
III					
Soma	7	5	3	4	11

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

24. Resposta: alternativa B

A soma dos pontos de Berta é 5, logo recebeu 3 pontos do juiz III. Clara obteve um total de 3 pontos, que só pode ser a soma de 1 e 2 pontos (verifique que não pode ser a soma de 0 e 3 pontos), na posição indicada na tabela ao lado. David obteve 4 pontos que só pode ser a soma de 1, 3 e 0 pontos (verifique que não podem ser 2, 2, 0 nem 4, 0, 0) na posição indicada. Logo, Emil recebeu 4 pontos dos juízes I e III (já que o juiz III já tinha dado 3 pontos antes) e 3 pontos do juiz II. Completando a tabela, vemos que Adam obteve 1 ponto do juiz III.

	Adam	Berta	Clara	David	Emil
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
Sum	7	5	3	4	11

25. Sônia escreve um número inteiro positivo em cada um dos lados de um quadrado. Ela escreve também em cada vértice o produto dos números que foram escritos nos lados unidos por esse vértice. A soma de todos os números escritos nos vértices é 15. Qual é a soma dos números escritos nos lados do quadrado?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

25. Resposta: alternativa C

Se a, b, c, d são os números inteiros positivos escritos nos lados nessa ordem, então *ab*, *bc*, *cd* e *ad* são os números escritos nos vértices. A soma destes números é

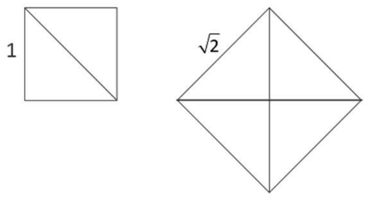
$ab + bc + cd + ad = a(b+d) + c(b+d) = (a+c)(b+d) = 15$.

Como $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$ podemos escrever, sem perda de generalidade, que $a + c = 3$ e $b + d = 5$. Logo $a + b + c + d = 8$.

26. Sofia tem 52 triângulos retângulos isósceles iguais. Ela quer fazer um quadrado usando alguns desses triângulos. Ela pode fazer quadrados de quantos tamanhos diferentes?

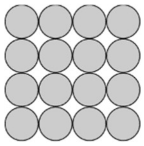
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

26. Resposta: alternativa C



Sofia pode fazer quadrados juntando 2 triângulos pelas hipotenusas ou 4 triângulos pelos catetos, conforme a figura ao lado. O primeiro tipo tem lado 1 e o segundo tem lado $\sqrt{2}$. Juntando quadrados do primeiro tipo, Sofia pode fazer quadrados com lados 1, 2, 3, 4, 5 e juntando quadrados do segundo tipo ela pode fazer quadrados de lados $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$. Portanto, a quantidade total de tamanhos de lados de quadrados é 5 + 3 = 8.

27. Cleuza monta uma pirâmide com esferas iguais. A base da pirâmide é um quadrado de 4×4 esferas, representada ao lado. As demais camadas são compostas de 3×3 esferas, 2×2 esferas e uma esfera no topo. Em cada ponto de contacto entre duas esferas, ela coloca um pingo de cola. Quantos pingos de cola Cleuza deve colocar no total?



(A) 72 (B) 85 (C) 88 (D) 92 (E) 96

27. Resposta: alternativa E

Para montar a base da figura, Cleuza precisa 3 pingos de cola para montar uma linha e 3 pingos de cola para cada coluna. Como são 4 linhas e 4 colunas, irá usar $2 \times 4 \times 3 = 24$ pingos de cola. A camada superior de 3×3 esferas é montada com $2 \times 3 \times 2 = 12$ pingos e a 2×2 é montada com $2 \times 2 \times 1 = 4$ pingos. Para colar a esfera do topo na camada 2×2, Cleuza irá usar 4 pingos de cola (a esfera do topo toca as 4 esferas de baixo). Para colar a camada 2×2 na camada 3×3, cada uma das 4 esferas de cima irá tocar em 4 esferas de baixo, totalizando $4 \times 4 = 16$ pingos e, finalmente, para colar a camada 3×3 na camada 4×4, cada uma das 9 esferas de cima irá tocar em 4 esferas de baixo, totalizando $9 \times 4 = 36$ pingos. Portanto, Cleuza irá usar no total $24 + 12 + 4 + 4 + 16 + 36 = 96$ pingos de cola.

28. Em cada um dos quatro cantos de uma piscina, com 10 m de largura por 25 metros de comprimento, há uma criança. O instrutor de natação está fora da piscina, numa das bordas. Quando ele chama as crianças, exatamente três delas partem e andam a menor distância possível na borda da piscina para encontrá-lo. A soma das distâncias percorridas por elas é 50 m. Qual é a menor distância que o instrutor deve andar para chegar até a quarta criança?

(A) 10 m (B) 12 m (C) 15 m (D) 20 m (E) 25 m

28. Resposta: alternativa D

O instrutor não pode estar nos cantos (vértices do retângulo), nem nas bordas menores. Supondo que esteja numa borda menor, à distância *x* de um vértice. Então as menores distâncias dos quatro vértices até o ponto em que está o instrutor são *x*, 25 + *x*, 10 – *x* e 35 – *x*. A soma de três dessas distâncias é 50, o que nos possibilita resolver quatro equações, a saber:

$25 + x + 10 - x + 35 - x = 50 \Leftrightarrow x = 20$
Como $0 < x < 10$, nenhuma dessas equações retrata a situação. Supondo que o instrutor esteja num ponto da borda maior à distância *x* de um vértice, as quatro distâncias são *x*, 25 – *x*, 10 + *x* e 35 – *x*. Vamos resolver as quatro equações possíveis e em seguida calcular a distância que o instrutor deve correr:
$x + (25 - x) + (10 + x) = 50 \Leftrightarrow x = 15; 35 - x = 20$
$x + (25 - x) + (35 - x) = 50 \Leftrightarrow x = 10; 10 + x = 20$
$x + (10 + x) + (35 - x) = 50 \Leftrightarrow x = 5; 25 - x = 20$
$(25 - x) + (10 + x) + (35 - x) = 50 \Leftrightarrow x = 20; x = 20$

29. Ana, Beto e Carla disputaram uma corrida. Eles partiram no mesmo instante, com velocidades constantes. Quando Ana acabou, Beto ainda tinha 15 metros para correr e Carla tinha 35 metros. Quando Beto terminou, Carla ainda tinha que correr 22 metros. De quantos metros era a corrida?

(A) 135 (B) 140 (C) 150 (D) 165 (E) 175

29. Resposta: alternativa D
Sabemos que, em movimentos uniformes, a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo e à velocidade. Quando Beto correu os últimos 15 metros, Carla correu 35 – 22 = 13 metros, ou seja, $\frac{v_{Beto}}{v_{Carla}} = \frac{15}{13}$. No primeiro momento, Ana correu toda a distância *d*, enquanto Beto correu *d* – 15 e Carla correu *d* – 35. Como foi, essas distâncias são diretamente proporcionais às velocidades dos corredores, logo $\frac{d-15}{d-35} = \frac{15}{13} \Leftrightarrow 13d - 195 = 15d - 525 \Leftrightarrow 2d = 330 \Leftrightarrow d = 165$ metros.

30. As afirmações abaixo dão as pistas para identificar um número *N* de quatro algarismos.

4 1 3 2 Dois algarismos estão certos, mas estão em lugares errados.

9 8 2 6 Um algarismo está correto e está no lugar certo.

5 0 7 9 Dois algarismos estão certos, um está no lugar certo e o outro no lugar errado.

2 7 4 1 Um algarismo está certo, mas está no lugar errado.

7 6 4 2 Nenhum dos algarismos está certo.

Qual é o algarismo das unidades do número *N*?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 9

30. Resposta: alternativa C

Da 5ª afirmativa e da 1ª afirmativa, concluímos que 1 e 3 são algarismos do número. O 1 não é algarismo das centenas e o 3 não é das dezenas. Da 5ª e 4ª afirmativas, concluímos que 1 não é o algarismo das unidades, logo é algarismo do milhar ou algarismo das dezenas. Portanto, o número é da forma 1XYZ para X = 3 ou Z = 3 ou da forma XY1Z, sendo X = 3 ou Y = 3 ou Z = 3.
Da 5ª e 2ª afirmativas, temos que se 9 é algarismo tem que ser dos milhares e se 8 for algarismo, tem que ser das centenas. Mas é um ou outro. Na 3ª afirmativa não aparece o 8, logo 9 é algarismo e é da ordem dos milhares. Portanto, o número é da forma 9X1Y, lembrando que X = 3 ou Y = 3. Ainda da 3ª afirmativa, como o 5 não pode ser dos milhares, concluímos que 0 é o algarismo das centenas. Logo, N = 9013.

Prova nível C

(Cadet)

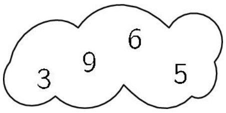
9º ano

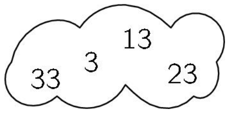
Ensino Fundamental

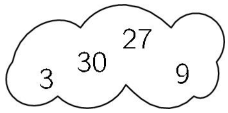
Problemas de 3 pontos

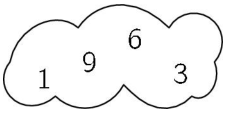
Questão 1

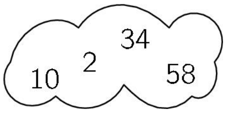
1. Qual nuvem contém quatro números pares?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

1. Resposta: Alternativa E

Quatro números pares: 2, 10, 34, 58

Questão 2

Quantas horas existem em dez quartos de hora?

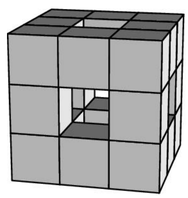
(A) 40 (B) 5 e meia (C) 4 (D) 3 (E) 2 e meia

2. Resposta: Alternativa E

Uma hora tem quatro quartos de hora. Logo, 10 quartos de hora correspondem a $\frac{10}{4} = 2{,}5$ horas, ou seja, a 2 horas e meia .

Questão 3

Um cubo $3 \times 3 \times 3$ foi construído com cubos $1 \times 1 \times 1$. Então alguns cubos foram removidos da frente para o fundo, da esquerda para a direita e do topo até a base, conforme a figura. Quantos cubos $1 \times 1 \times 1$ restaram?



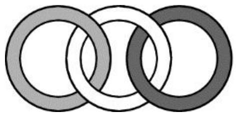
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

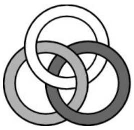
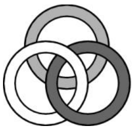
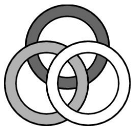
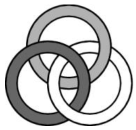
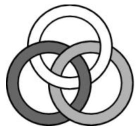
3. Resposta: Alternativa C

Como o cubo tem três camadas, foi retirado um cubinho de cada face e o único cubinho central, num total de sete cubinhos. O número total de cubinhos era $3 \times 3 \times 3 = 27$, portanto restaram $27 - 7 = 20$ cubinhos.

Questão 4

Três anéis estão interligados como mostrado na figura. Qual das figuras a seguir mostra os três anéis ligados da mesma maneira?



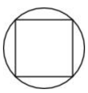
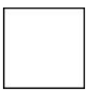
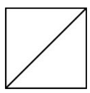
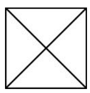
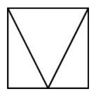
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Resposta: Alternativa D

O anel branco está entrelaçado com o anel cinza claro e o anel cinza escuro, mas estes dois não se entrelaçam.

Questão 5

Qual dos desenhos a seguir não pode ser feito sem você tirar o lápis do papel e sem passar o lápis pela mesma linha mais de uma vez?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Resposta: Alternativa D

Por eliminação imediata das demais alternativas, observamos que o desenho em (D) não pode ser feito sem que se tire o lápis do papel ou se passe o lápis mais de uma vez sobre alguma linha.

Observação: Em desenhos e diagramas compostos de linhas e pontos, para que possam ser desenhados nas condições dadas, só pode haver dois pontos com números ímpares de linhas chegando (ou saindo) desses pontos (como nos casos (C) e (E), de modo que um desses pontos seja o início do percurso e o outro seja o final. No caso (D) isto é impossível, pois há quatro pontos com número ímpar de linhas a eles conectados.

Esse fato pode ser demonstrado, mas não neste nível de prova.

Questão 6

Num encontro de cinco amigos, cada um deles deu um doce para cada um dos amigos. Então todos comeram os doces que ganharam. Como resultado, o número total de doces diminuiu pela metade. Quantos doces os cinco amigos juntos tinham no começo?

(A) 20 (B) 24 (C) 30 (D) 40 (E) 60

6. Resposta: Alternativa D

Cada um dos cinco amigos deu quatro doces, ou seja, 20 doces foram dados. Todos esses doces foram comidos, deixando a quantidade total de doces pela metade. Logo, no começo, havia 40 doces.

Questão 7

Numa corrida, Lola chegou antes de Manfredo, Vítor chegou depois de Jane, Manfredo chegou antes de Jane e Edu chegou antes de Vítor. Quem chegou por último na corrida?

(A) Vítor (B) Manfredo (C) Lola (D) Jane (E) Edu

7. Resposta: Alternativa A

Interpretando as informações numa ordem mais fácil de entender, percebemos que Lola chegou antes de Manfredo, Manfredo chegou antes de Jane e Jane chegou antes de Vitor. Sabemos também que Edu chegou antes de Vitor, logo Vitor chegou depois de todos. Observe que não é possível saber a posição de Edu em relação aos outros corredores.

Questão 8

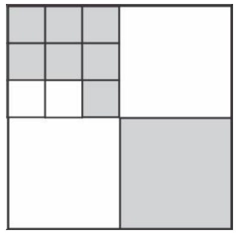
As páginas do livro que Julieta está lendo são todas numeradas a partir do 1. Nos números dessas páginas, o dígito 0 aparece exatamente cinco vezes e o dígito 8 aparece exatamente seis vezes. Qual é o número da última página desse livro?

(A) 48 (B) 58 (C) 60 (D) 68 (E) 88

8. Resposta: Alternativa B

O zero aparece em 10, 20, 30, 40 e 50. Logo o número de páginas é menor do que 60. O oito aparece em 8, 18, 28, 38, 48, 58. A última página tem número par. Logo, esse número é 58.

Questão 9



Um quadrado foi dividido em quadrados menores, conforme a figura. Qual fração desse quadrado foi pintada de cinza?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{5}{12}$

9. Resposta: Alternativa D

Podemos pensar no quadrado dividido em $4 \times 9 = 36$ quadradinhos. A área cinza corresponde a $7 + 9 = 16$ desses quadradinhos, o que corresponde $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ da área do quadrado.

Solução alternativa: o quadrado cinza maior corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior. Os sete quadradinhos cinza correspondem a $\frac{7}{9}$ do quadrado cinza maior. Logo, a fração pintada de cinza foi $\frac{1}{4} + \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{7}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Questão 10

André fez seis pilhas com o mesmo número de maçãs cada uma. Bóris tinha o mesmo número de maçãs e as distribuiu em cinco pilhas iguais. Bóris percebeu que cada uma de suas pilhas tinha duas maçãs a mais que cada uma das pilhas de André. Quantas maçãs tem André?

(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

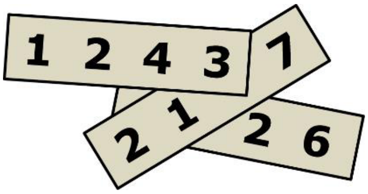
10. Resposta: Alternativa A

Seja x o número de maçãs de André. Cada pilha de André tinha $\frac{x}{6}$ maçãs. Já as pilhas de Bóris tinham $\frac{x}{5}$ maçãs. Logo $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = 2 \Leftrightarrow \frac{6x - 5x}{30} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{30} = 2 \Leftrightarrow x = 60$.

Problemas de 4 pontos

Questão 11

Um número de quatro algarismos foi escrito em cada um de três pedaços de papel. Esses pedaços foram empilhados de modo que três dos algarismos escritos ficaram escondidos, conforme a figura. Se a soma dos três números escritos é igual a 10 126, quais são os algarismos ocultos?



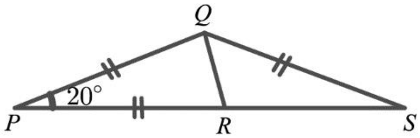
(A) 5, 6 e 7 (B) 4, 5 e 7 (C) 4, 6 e 7 (D) 4, 5 e 6 (E) 3, 5 e 6

11. Resposta: Alternativa A

A soma dos dois números com algarismos cobertos é 10126 – 1243 = 8883. A soma do algarismo da dezena do número do meio com 2 e com 1, que vem de 7 + 6 = 13, é 8, logo esse algarismo é 8 – 2 – 1 = 5. Assim, os dois algarismos ocultos do número de trás formam o número 88 – 21 = 67. Logo, os algarismos ocultos são 5, 6 e 7.

Questão 12

Na figura, $PQ = PR = QS$ e $m(\widehat{QPR}) = 20°$. Qual é a medida do ângulo RQS?



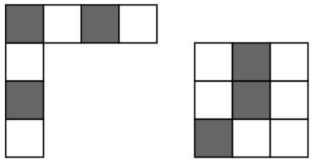
(A) 50° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 75°

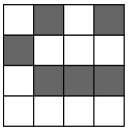
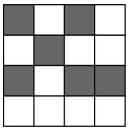
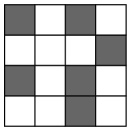
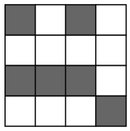
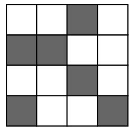
12. Resposta: Alternativa B

O triângulo PRQ é isósceles de base $\overline{QR}$, logo $m(\widehat{PQR}) = m(\widehat{PRQ}) = \dfrac{180° - 20°}{2} = 80°$. O triângulo PSQ é isósceles de base $\overline{PS}$ logo $m(\widehat{QPS}) = m(\widehat{QSP}) = 20°$. No triângulo QRS, temos $m(\widehat{QRS}) = 180° - m(\widehat{PRQ}) = 180° - 80° = 100°$. Logo, $m(\widehat{RQS}) = 180° - 100° - 20° = 60°$.

Questão 13

Qual dos quadrados a seguir não pode ser composto com as duas peças dadas ao lado?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Resposta: Alternativa E

A peça à esquerda tem uma simetria que não aparece na figura (E) em nenhuma posição, logo essa figura não pode ser composta com as duas peças. As demais figuras podem ser compostas fazendo-se as devidas translações e rotações das duas peças dadas.

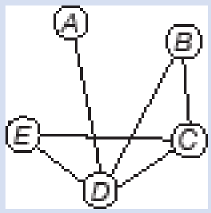
Questão 14

Alana, Bela, Clara, Dora e Érica se encontraram numa festa e apertaram as mãos, exatamente uma vez, de todas as pessoas que elas já conheciam neste grupo. Alana deu um aperto de mão, Bela deu dois, Clara deu três e Dora deu quatro apertos de mãos. Quantos apertos de mão deu Érica?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14. Resposta: Alternativa B

Dora deu quatro apertos de mão, ou seja, apertou a mão de todos. Logo, Dora apertou a mão de Érica. Alana deu um único aperto de mão, que foi com Dora. Clara deu três apertos de mão e só não o fez com Alana. Logo, apertou a mão de Érica. Bela deu dois apertos de mão, logo foram com Clara e Dora. Assim, Érica deu dois apertos de mão. O diagrama ao lado ilustra a situação.



Questão 15

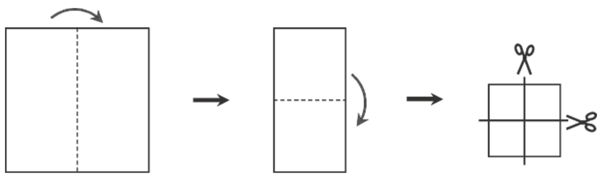
Jana está jogando basquete. Depois de uma série de 20 lançamentos, Jana conseguiu 55% de acertos. Cinco lançamentos depois, seu índice de acertos atingiu 56%. Quantos desses cinco últimos lançamentos ela acertou?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Resposta: Alternativa C

Nos primeiros 20 lançamentos, Jana acertou 55% dos lançamentos, ou seja, acertou $0{,}55 \times 20 = 11$ vezes. Nos 25 lançamentos, Jana acertou 56% deles, ou seja, acertou $0{,}56 \times 25 = 14$ vezes. Portanto, nos cinco últimos lançamentos, ela acertou $14 - 11 = 3$ lançamentos.

Questão 16

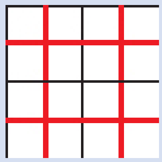


Cátia dobrou uma folha quadrada de papel exatamente na metade duas vezes e em seguida a cortou duas vezes pela metade, conforme indicado na figura. Ao final, quantos dos pedaços obtidos eram quadrados?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

16. Resposta: Alternativa C

Na figura, as linhas pretas mostram as dobras feitas e as vermelhas mostram os cortes feitos. Fica evidente então que, dos pedaços obtidos, há quatro quadrados iguais pequenos e um quadrado maior, no centro. No total, foram obtidos cinco quadrados.



Questão 17

Miguel tem cães, vacas, gatos e cangurus no seu sítio. Ao todo são 24 animais, sendo que $\frac{1}{8}$ deles são cães, $\frac{3}{4}$ NÃO são vacas e $\frac{2}{3}$ NÃO são gatos. Quantos cangurus há no sítio?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

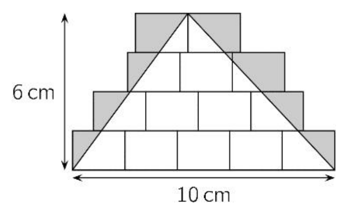
17. Resposta: Alternativa D

O número de cães é $\frac{1}{8} \times 24 = 3$. O número de animais que não são vacas, isto é, são cães, gatos ou cangurus, é $\frac{3}{4} \times 24 = 18$. Logo, o número de gatos e cangurus é $18 - 3 = 15$. O número de animais que não são gatos, ou seja, são cães, vacas ou cangurus, é $\frac{2}{3} \times 24 = 16$. Logo, o número de vacas e cangurus é $16 - 3 = 13$. Assim, o número de vacas mais o número de gatos mais duas vezes o número de cangurus é $15 + 13 = 28$. Como o número de vacas mais número de gatos mais número de cangurus é $24 - 3 = 21$, concluímos que o número de cangurus é $28 - 21 = 7$.

Solução alternativa: O número de cães é $\frac{1}{8} \times 24 = 3$, o número de vacas é $\left(1 - \frac{3}{4}\right) \times 24 = \frac{1}{4} \times 24 = 6$ e o número de gatos é $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 24 = \frac{1}{3} \times 24 = 8$. Então o número de cangurus é $24 - 3 - 6 - 8 = 7$.

Questão 18

Na figura, os retângulos são iguais e o triângulo cujos vértices coincidem com alguns vértices desses retângulos tem base de 10 cm e altura de 6 cm. A região dentro dos retângulos e fora do triângulo foi pintada de cinza. Qual é a área dessa região?



(A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 14 cm^2 (D) 15 cm^2 (E) 21 cm^2

18. Resposta: Alternativa B

A área do triângulo é igual a $\frac{6 \times 10}{2} = 30$ cm^2. Os 14 retângulos iguais têm dimensões $\frac{6}{4} = 1{,}5$ cm $\times$ $\frac{10}{5} = 2$ cm cada um, logo a área coberta por eles é igual a $14 \times 2 \times 1{,}5 = 42$ cm^2. Portanto, a área da região cinza é $42 - 30 = 12$ cm^2.

Questão 19

Júlio tem duas velas cilíndricas com alturas e diâmetros diferentes. Uma delas dura 6 horas e a outra dura 8 horas. Ele acendeu as duas velas ao mesmo tempo e três horas depois as duas velas estavam com a mesma altura. Qual era a razão entre as duas alturas originais das duas velas?

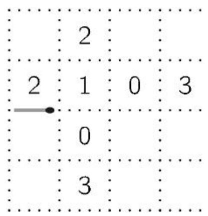
(A) 4 : 3 (B) 8 : 5 (C) 5 : 4 (D) 3 : 5 (E) 7 : 3

19. Resposta: Alternativa C

A cada hora, uma das velas perde $\frac{1}{6}$ de sua altura h e a outra perde $\frac{1}{8}$ de sua altura H. Três horas depois de acendidas simultamente, a primeira perdeu $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ de h e a outra perdeu $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ de H. Nesse momento, a altura da primeira é $\frac{h}{2}$ e a altura da segunda é $H - \frac{3H}{8} = \frac{5H}{8}$. Como estas alturas são iguais, podemos escrever $\frac{h}{2} = \frac{5H}{8} \Leftrightarrow \frac{H}{h} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Questão 20

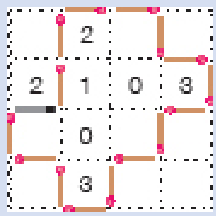
Aily forma um caminho com palitos de fósforos colocados sobre os lados de um quadriculado, conforme a figura. Os números em alguns quadrados do quadriculado indicam o número de palitos ao redor desses quadrados. Se caminho termina no lado esquerdo do palito inicial e tem o menor número de palitos possível, quantos palitos há nesse caminho?



(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

20. Resposta: Alternativa C

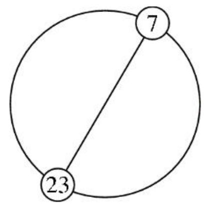
De acordo com as regras, os fósforos podem ser colocados de uma única maneira, se quisermos usar o menor número possível de palitos. Portanto, o número de palitos do caminho é 16.



Problemas de 5 pontos

Questão 21

Os números inteiros de 1 a *n*, inclusive, estão escritos, igualmente espaçados, ao redor de um círculo. As posições dos números 7 e 23 são extremidades de um dos diâmetros do círculo, conforme figura. Qual é o valor de *n*?



(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

21. Resposta: Alternativa B

No sentido horário, entre 7 e 23 estão os números 8, 9, ..., 22, num total de $22 - 8 + 1 = 15$ números. Então do outro lado há outros 15 números. Logo, foram escritos $n = 2 \times 15 + 2 = 32$ números.

Questão 22

Lia gastou todo seu dinheiro comprando 50 garrafas de água por um real cada uma. Ela vende as garrafas por um mesmo preço, um pouco maior do que pagou. Depois de vender 40 garrafas, ela tem 10 reais mais do que tinha ao comprar as garrafas. Depois que ela vender todas as garrafas, quanto ela terá?

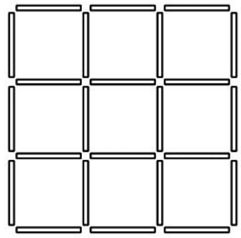
(A) 70 reais (B) 75 reais (C) 80 reais (D) 90 reais (E) 38 reais

22. Resposta: Alternativa B

Lia vendeu 40 garrafas por $50 + 10 = 60$ reais. Logo, o preço pelo qual ela vende é $\frac{60}{40} = 1{,}50$ por garrafa. Assim, o valor total da venda das garrafas será $50 \times 1{,}50 = 75$ reais.

Questão 23

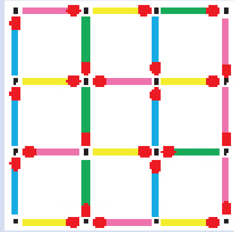
Natália tem vários palitos de comprimentos iguais. Os palitos são azuis, vermelhos, amarelos ou verdes. Ela quer montar um quadriculado 3×3, como o mostrado ao lado, de modo que cada quadrado 1×1 do quadriculado tenha os quatro lados com cores diferentes. Qual é o menor número de palitos verdes que ela poderá usar?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

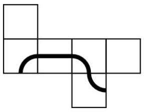
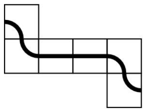
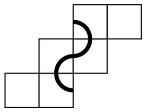
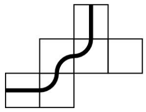
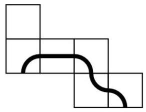
23. Resposta: Alternativa C

Um palito verde pode ser compartilhado no máximo por dois quadrados. Como há nove quadrados, vemos que quatro palitos verdes não são suficientes, pois faltaria um quadrado com palito verde. Portanto, são necessários pelo menos cinco palitos verdes. Na figura ao lado vemos uma possível construção com os palitos coloridos.



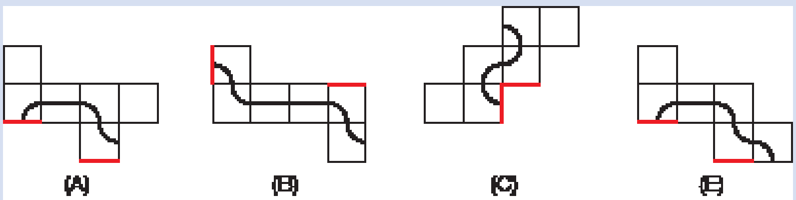
Questão 24

Cada uma das figuras a seguir é a planificação de um cubo. Somente um dos cubos resultantes dessas planificações tem uma linha fechada desenhada sobre a sua superfície. Qual é a planificação que produz esse cubo?

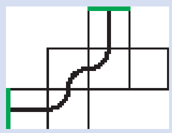
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

24. Resposta: Alternativa D

Ao ser montado o cubo, deverá aparecer sobre a sua superfície uma linha fechada que pode ser percorrida sem interrupções. Na figura abaixo, indicamos em vermelho as arestas que deverão coincidir ao dobrarmos as planificações para montar os cubos. Se houver quebra da linha nas duas faces ligadas por essas arestas, a linha não é contínua, logo as planificações correspondentes não servem.



A montagem da planificação em (D) irá produzir um cubo com uma linha fechada contínua por todas as suas faces, já que as arestas que serão unidas, em verde, irão conectar as duas extremidades da curva.



Questão 25

Elizabete tem uma cesta com 60 chocolates. Ela comeu um décimo dos chocolates na segunda-feira, um nono do que restou na terça-feira, um oitavo do resto na quarta-feira, um sétimo na quinta-feira e assim por diante, até parar no dia em que ela comeu a metade dos chocolates que haviam sobrado no dia anterior. Quantos chocolates sobraram?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

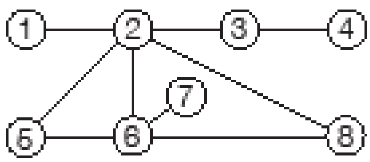
25. Resposta: Alternativa E

No primeiro dia, Elizabete comeu $\frac{1}{10}$ dos chocolates, restando $\frac{9}{10} \times 60$ chocolates. No dia seguinte, comeu $\frac{1}{9}$ do que havia sobrado, restando $\frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times 60$ chocolates; no terceiro dia comeu $\frac{1}{8}$ da sobra do dia anterior, restando $\frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times 60$ e assim por diante, até que restou metade do que sobrou no dia anterior, ou seja, $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times 60$. Esse cálculo é simples, pois cancelamos os fatores comuns aos numeradores e denominadores, obtendo $\frac{1}{10} \times 60 = 6$.

Solução alternativa: basta ir calculando o consumo diário, que é constante, de 6 chocolates. A explicação está no caráter telescópico do produto acima. O restante em cada um dos dias é 54, 48, 42, 36, 30, 24, 18, 12, 6.

Questão 26

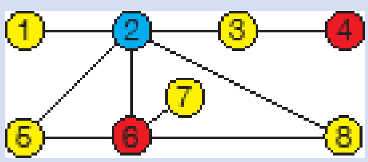
Pedro vai pintar os oito círculos da figura de vermelho, amarelo ou azul, de modo que dois círculos ligados por um segmento não tenham a mesma cor. Quais são os dois círculos que terão necessariamente a mesma cor?



(A) 5 e 8 (B) 1 e 6 (C) 2 e 7 (D) 4 e 5 (E) 3 e 6

26. Resposta: Alternativa A

Os círculos 2 e 6 têm cores diferentes. Os círculos 5 e 8 são ambos ligados aos círculos 2 e 6, logo só podem ter a terceira cor, igual para os dois. O exemplo ao lado mostra que as demais alternativas não são necessariamente verdadeiras.



Questão 27

A razão entre as poupanças de Lia e Flora era 5 : 3. Então Lia comprou um par de sapatos por 160 reais e a razão entre as poupanças mudou para 3 : 5. Quantos reais tinha Lia antes de comprar os sapatos?

(A) 192 (B) 200 (C) 250 (D) 400 (E) 420

27. Resposta: Alternativa C

Se x e y são as quantias que tinham Lia e Flora, respectivamente, então $\frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = \frac{3x}{5}$. Depois do gasto de 160 reais de Lia, temos $\frac{x-160}{y} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = \frac{5(x-160)}{3}$. Logo $\frac{3x}{5} = \frac{5(x-160)}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9x = 25x - 25 \times 160 \Leftrightarrow 16x = 25 \times 160 \Leftrightarrow x = 250$ reais.

Solução alternativa: Lia tinha $5k$ reais e Flora $3k$ reais. Então $\frac{5k-160}{3k} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 25k - 800 = 9k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k = 50$. Logo, Lia tinha $5 \times 50 = 250$ reais.

Questão 28

Algumas equipes com três jogadores participam de um torneio de xadrez. Cada jogador de uma equipe joga exatamente uma vez contra cada um dos jogadores das demais equipes. Por motivos organizacionais, não mais do que 150 partidas podem ser jogadas. No máximo, quantas equipes podem participam do torneio?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

28. Resposta: Alternativa A

Seja n o número de equipes que podem participar do torneio. Cada um dos $3n$ jogadores pode jogar com cada um dos 3 jogadores das $n - 1$ equipes restantes. Portanto, o número de jogos é $\frac{3n \cdot 3(n-1)}{2}$ (dividimos por 2 porque cada jogo é contado duas vezes). Como o número de partidas (ou jogos) deve ser menor do que 150, temos:

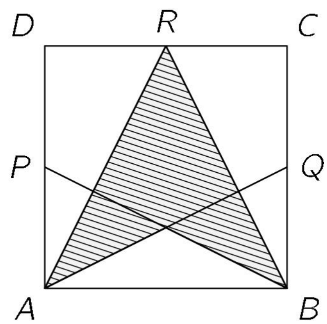
$\frac{3n \cdot 3(n-1)}{2} \quad 150 \Leftrightarrow 9n^2 - 9n \quad 300 \Leftrightarrow 3n^2 - 3n \quad 100$. (*) Para resolver essa desigualdade, achamos, inicialmente as raízes da equação $3n^2 - 3n - 100 = 0$ que são $n = \frac{3 - \sqrt{1209}}{6}$ e $n = \frac{3 + \sqrt{1209}}{6}$.

Como n é um número inteiro positivo, a desigualdade é satisfeita pelos inteiros positivos menores do que $\frac{3 + \sqrt{1209}}{6}$. Temos $\sqrt{1209} < 35$ pois $35^2 = 1225$, logo $\frac{3 + \sqrt{1209}}{6} < \frac{3 + 35}{6} = 6{,}33\ldots$. Como queremos o maior valor possível de n, obtemos $n = 6$.

Observação: para os alunos que não sabem resolver formalmente uma inequação de segundo grau, é possível substituir os valores n dados na expressão à esquerda (*), estimar o valor da expressão e verificar qual é o maior valor inteiro de n que torna a desigualdade verdadeira.

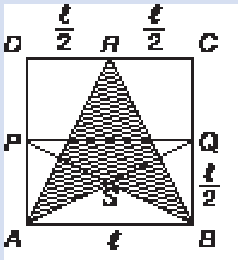
Questão 29

A figura mostra o quadrado $ABCD$ com P, Q e R sendo os pontos médios dos lados DA, BC e CD, respectivamente. Que fração do quadrado $ABCD$ está sombreada?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{16}$ (E) $\frac{3}{8}$

29. Resposta: Alternativa E



Seja ℓ a medida do lado do quadrado *ABCD*. Então $DR = RC = \frac{\ell}{2}$ e as áreas dos triângulos *ARD* e *RBC*, retângulos em *D* e *C*, respectivamente, são iguais a $\frac{\frac{\ell}{2} \times \ell}{2}$. Portanto, a soma dessas duas áreas é $2 \times \frac{\frac{\ell}{2} \times \ell}{2} = \frac{\ell^2}{2}$.

Seja *S* a intersecção dos segmentos *AQ* e *BP*, diagonais do retângulo *ABQP*, de dimensões $\frac{\ell}{2}$ e ℓ. A área do triângulo *ABS* é um quarto da área desse retângulo, ou seja, $\frac{1}{4} \times \frac{\ell}{2} \times \ell = \frac{\ell^2}{8}$. Portanto, a área da região sombreada é igual à área do quadrado menos a área desses três triângulos, ou seja, é igual a $\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{8} = \frac{8\ell^2 - 4\ell^2 - \ell^2}{8} = \frac{3\ell^2}{8}$. Logo a fração sombreada do quadrado tem área igual a $\frac{3}{8}$ da área do quadrado.

Questão 30

Há 700 passageiros viajando num trem composto de 18 vagões. Em qualquer bloco de cinco vagões consecutivos há 199 passageiros no total. No total, quantos passageiros há nos dois vagões do meio?

(A) 70 (B) 77 (C) 78 (D) 96 (E) 103

30. Resposta: Alternativa D

Sejam as quantidades de passageiros $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{16}, v_{17}, v_{18}$ nos 18 vagões. Temos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} = 199$. Como há 700 passageiros no total, temos $v_{16} + v_{17} + v_{18} = 700 - (v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_{14} + v_{15}) = 700 - 3 \times 199 = 103$.

Os dois vagões do meio são v_9 e v_{10}. Note que:

$v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17} + v_{18} = v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17} \Leftrightarrow v_{18} = v_{13}$

$v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17} = v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} \Leftrightarrow v_{17} = v_{12}$

$v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} \Leftrightarrow v_{16} = v_{11}$

De forma análoga, temos

$v_{13} = v_8$

$v_{12} = v_7$

$v_{11} = v_6$

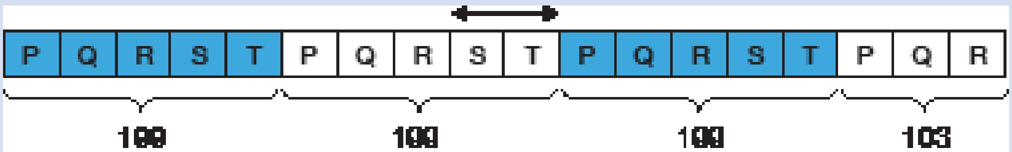
Logo $v_{16} + v_{17} + v_{18} = v_6 + v_7 + v_8 = 103$.

Assim, no bloco intermediário acima temos

$v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} = 199 \Leftrightarrow 103 + v_9 + v_{10} = 199 \Leftrightarrow v_9 + v_{10} = 96$.

Solução simplificada: Seja o número de passageiros nos cinco primeiros vagões igual a P, Q, R, S e T respectivamente e X, no sexto vagão. Temos $P + Q + R + S + T = 199 + Q + R + S + T + X$, logo $P = X$. De forma semelhante, vemos que, de fato, os números de passageiros nos vagões formam uma sequência periódica, conforme mostrado na figura. Os dois vagões do meio têm S e T passageiros, respectivamente.

Como temos 700 passageiros no trem, concluímos que o número de passageiros no último grupo é $P + Q + R = 700 - 3 \times 199 = 103$. Portanto, $S + T = (P + Q + R + S + T) - (P + Q + R) = 199 - 103 = 96$.



CANGURU DE MATEMÁTICA BRASIL – NÍVEL C – 2018 - Respostas

Problemas de 3 pontos

1. Qual é o valor de $(20+18)\div(20-18)$?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 34 (E) 36

1. Resposta: alternativa B
$(20+18)\div(20-18)=38\div2=19$.

2. Quando as letras da palavra MATA são escritas verticalmente, uma abaixo da outra, a palavra tem uma linha vertical de simetria. Qual das palavras abaixo tem uma linha vertical de simetria, quando escrita da mesma forma?

(A) ARCO (B) MALA (C) BOTA (D) MULA (E) TIMO

2. Resposta: alternativa E
As letras R, C, L, B não têm simetria vertical. As letras A, O, M, T, U, I têm. A palavra com simetria vertical tem que ter todas as suas letras com essa simetria. A palavra é TIMO.

3. Os lados de um triângulo medem 6, 10 e 11. Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro. Qual é o comprimento de cada lado desse triângulo?

(A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 27

3. Resposta: alternativa B
O perímetro do triângulo dado é 6 + 10 + 11 = 27. O triângulo equilátero com esse perímetro tem lado de medida igual a $\frac{27}{3}=9$.

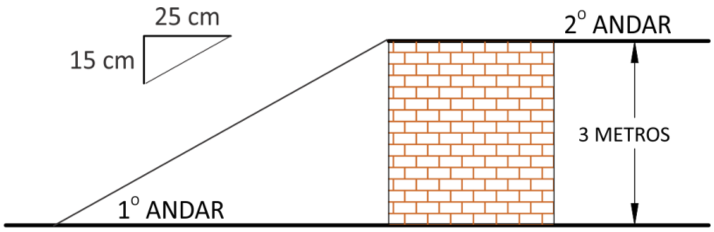
4. Qual número deve ser escrito no lugar do símbolo # na igualdade $2\cdot18\cdot14=6\cdot\#\cdot7$ de modo a torná-la verdadeira?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

4. Resposta: alternativa D

$$2\cdot18\cdot14=6\cdot\#\cdot7\Leftrightarrow\frac{2\cdot18\cdot14}{6\cdot7}=\#\Leftrightarrow\frac{2\cdot\cancelto{3}{18}\cdot\cancelto{2}{14}}{\cancel{6}\cdot\cancel{7}}=\#\Leftrightarrow\#=12.$$

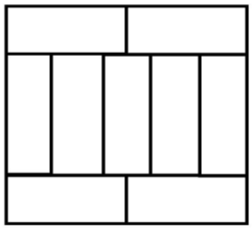
5. Na construção de um edifício, as escadas foram feitas com degraus de 25 cm de largura e 15 cm de altura, conforme figura ao lado. Quantos degraus tem a escada que leva do primeiro ao segundo andar?



(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

5. Resposta: alternativa D
A escada tem 3 m = 300 cm de altura. Cada degrau tem 15 cm de altura. Portanto, terão que ser construídos $\frac{300}{15} = 20$ degraus.

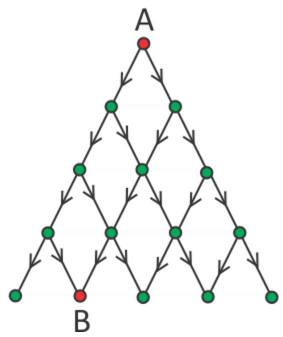
6. Um retângulo é composto de nove retângulos iguais, cujos lados maiores medem 10 cm. Qual é o perímetro desse retângulo maior?



(A) 40 cm (B) 48 cm (C) 76 cm (D) 81 cm (E) 90 cm

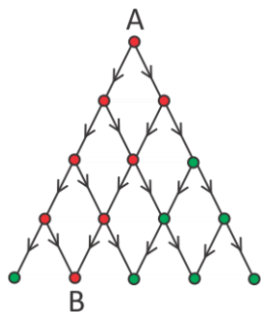
6. Resposta: alternativa C
Seja x a medida do lado menor de cada retângulo. Comparando a fileira de baixo com a fileira do meio, temos $10+10=5x \Leftrightarrow x=4$. O perímetro do retângulo maior é $2(10+10+4+10+4)=2\cdot 38=76$ cm.

7. Uma formiguinha quer andar do ponto A ao ponto B caminhando de cima para baixo, ao longo dos segmentos indicados pelas setas. Quantos caminhos diferentes ela pode fazer?

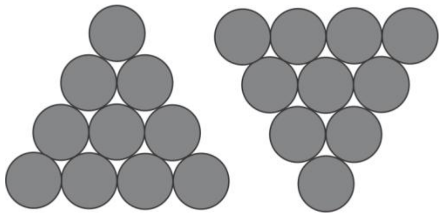


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Resposta: alternativa C
Na figura à direita, em vermelho, vemos as bolinhas pelas quais a formiguinha pode passar, saindo de A para chegar até B. Podemos contar quatro caminhos diferentes.

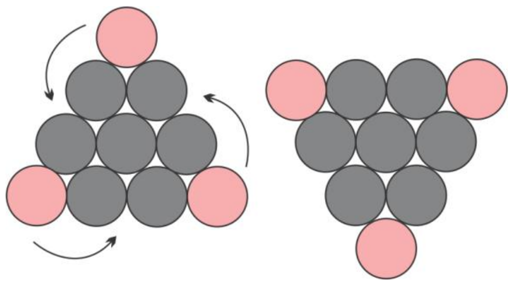


8. Joana fez o triângulo com dez moedas, visto à esquerda. Seu irmão moveu algumas moedas e obteve o triângulo à direita. No mínimo, quantas moedas ele moveu?

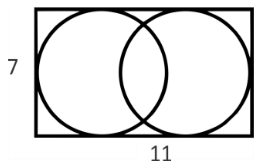


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

8. Resposta: alternativa A
Os dois padrões diferem apenas pelas três moedas indicadas. Basta mover essas três para transformar um padrão no outro.

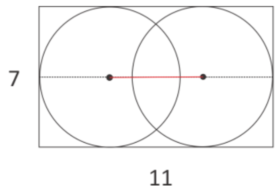


9. Um retângulo com dimensões 7×11 contém duas circunferências que tangenciam três lados desse retângulo, conforme mostrado na figura. Qual é a distância entre os centros das circunferências?

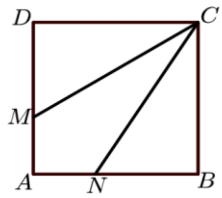


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

9. Resposta: alternativa D
O diâmetro das circunferências é igual à altura do retângulo. Logo, elas têm raio igual a $\frac{7}{2}$. Os centros das duas circunferências estão numa reta paralela ao comprimento do retângulo e distam um raio de cada lado do retângulo. Portanto, a distância entre esses pontos é $11 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 11 - 7 = 4$.

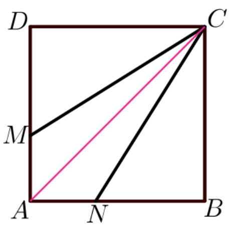


10. Os lados do quadrado *ABCD* medem 3 cm. Os pontos *M* e *N* estão sobre os lados *AD* e *AB* de modo que os segmentos *CM* e *CN* dividem o quadrado em três figuras de áreas iguais. Qual é a medida do segmento *DM*?



(A) 0,5 cm (B) 1 cm (C) 1,5 cm (D) 2 cm (E) 2,5 cm

10. Resposta: alternativa D
Pela simetria da figura, concluímos que o segmento *AC* divide o quadrilátero *ANCM* em dois triângulos de mesma área. Os triângulos *DMC* e *MAC* têm a mesma altura e a área do triângulo *DMC* é o dobro da área do triângulo *MAC*, pois o quadrilátero *ANCM* tem a mesma área que o triângulo *DMC* e o dobro da área do triângulo *MAC*. Logo, *DM* é o dobro de *MA*. Portanto, $DM + MA = 3 \Leftrightarrow 2MA + MA = 3 \Leftrightarrow 3MA = 3 \Leftrightarrow MA = 1$. Logo, $DM + 1 = 3 \Leftrightarrow DM = 2$ cm.



Problemas de 4 pontos

11. Marta multiplicou corretamente dois números de dois algarismos, mas em seguida ela rabiscou três desses algarismos, conforme mostrado na figura. Qual é a soma dos três algarismos que ela rabiscou?

(A) 5 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 14

11. Resposta: alternativa B
Como o algarismo das unidades do produto é 2 e o algarismo das unidades do multiplicando é 3, concluímos que o algarismo das unidades do multiplicador é 4, logo o multiplicador é 24. O algarismo das dezenas do multiplicando não pode ser 2 ou mais, pois 23 x 24 dá mais de trezentos e pouco. Logo, o multiplicando é 13 e 13 x 24 = 312, isto é, o algarismo das dezenas do produto é 1. A soma dos três algarismos apagados é 1 + 4 + 1 = 6.

12. Um tabuleiro tem exatamente 40 casas e mais de uma linha. André escolheu a linha do meio e pintou todas as suas casas. Quantas casas do tabuleiro ele não pintou?

(A) 20 (B) 30 (C) 32 (D) 35 (E) 39

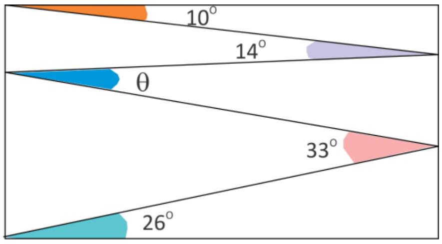
12. Resposta: alternativa C
O número total de casas de um tabuleiro é igual ao produto do número de linhas pelo número de colunas. Como há uma linha do meio, o número de linhas é ímpar. Sabendo que 40 = 1 x 40 = 5 x 8, concluímos que o número de linhas é 5 e o número de colunas é 8. Como André pintou somente as casas da linha do meio, ele pintou 8 casas. Logo, ele não pintou 40 – 8 = 32 casas.

13. Um leão está escondido em um dos três quartos de uma casa. Na porta do quarto 1 está escrito: “O leão está aqui.” Na porta do quarto 2 está escrito: “O leão não está aqui” e na porta do quarto 3 lê-se: “$2^3 = 3^2$”. Somente uma das sentenças é verdadeira. Qual é o quarto em que o leão está?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) Qualquer um dos três. (E) No 1 ou no 2.

13. Resposta: alternativa C
A sentença $2^3 = 3^2$ é falsa. Há mais uma sentença falsa e há uma sentença verdadeira. Supondo que a sentença na porta 2 “O leão não está aqui.” seja verdadeira, então a sentença na porta 1 “O leão está aqui.” é falsa. Daí se conclui que o leão não está nos quartos 2 e 1, logo está no quarto 3.
Supondo que a sentença na porta 2 “O leão não está aqui.” seja falsa, então a sentença na porta 1 “O leão está aqui.” é verdadeira. Isto é absurdo, pois o leão estaria nos quartos 2 e 1. Logo, o leão está no quarto 3.

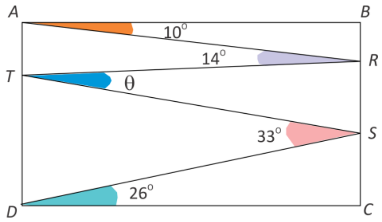
14. Valéria traçou uma linha em zigue-zague no interior de um retângulo, criando ângulos de 10^o, 14^o, θ, 33^o e 26^o, conforme mostrado na figura ao lado. Qual é o valor de θ?



(A) 11^o (B) 12^o (C) 16^o (D) 17^o (E) 33^o

14. Resposta: alternativa A

Os triângulos *ABR* e *DCS*, são retângulos, logo *ARB* mede $90^O - 10^O = 80^O$ e *DSC* mede $90^O - 26^O = 64^O$. Portanto, *TRS* mede $180^O - 14^O - 80^O = 86^O$ e *TSR* mede $180^O - 33^O - 64^O = 83^O$.
Logo, no triângulo *TRS*, temos $\theta = 180^O - 86^O - 83^O = 11^O$.



15. Alice escreveu uma lista de números primos menores do que 100, usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, exatamente uma vez cada um e nenhum outro algarismo. Qual número estava nessa lista com certeza? Obs.: o número 1 não é primo.

(A) 2 (B) 5 (C) 31 (D) 41 (E) 53

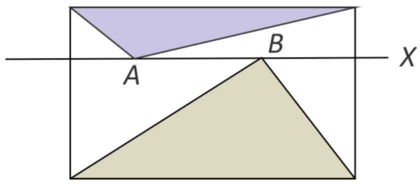
15. Resposta: alternativa D
Com os cinco algarismos, devemos escrever uma lista de números primos menores do que 100. Como 1 e 4 não são primos, temos que usá-los para compor primos. O algarismo 1 só pode se juntar a 3, formando 13 ou 31, ou a 4, formando o 41. O algarismo 4 pode se juntar a 1, como visto ou a 3, formando 43. Esta última opção não é possível, pois se juntarmos o 4 ao 3, o número 1 não terá parceiro. Portanto, na lista irá forçosamente aparecer o número 41. Possíveis listas: 2, 5, 41, 3 / 23, 41, 5 / 53, 41, 2, etc.

16. Um hotel no Nordeste faz sua propaganda dizendo que no lugar onde está localizado faz “350 dias de sol por ano”. Supondo que isso seja verdade, pelo menos quantos dias Rita tem que planejar ficar no hotel, no próximo ano, para ter certeza de que terá dois dias seguidos de sol?

(A) 17 (B) 21 (C) 31 (D) 32 (E) 35

16. Resposta: alternativa D
Como o ano tem 365 dias, concluímos que irão chover 365 – 350 = 15 dias no próximo ano. Rita pode ter sorte e fazer sol nos dois primeiros dias que estiver no hotel. Mas não dá para contar com isso. Se ela tiver muito azar, fará sol no primeiro dia, sem sol no segundo, sol no terceiro, etc., até o trigésimo dia, que será sem sol (quinze dias com sol, quinze dias sem sol). Então terá dois dias seguidos de sol. Assim, terá que ficar 32 dias.

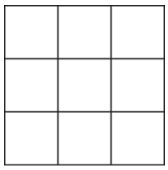
17. Na figura, a reta *X* é paralela à base do retângulo e os pontos *A* e *B*, internos ao retângulo, pertencem à reta. A soma das áreas dos retângulos sombreados é igual a 10 cm^2. Qual é área do retângulo?



(A) 18 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 22 cm^2 (D) 24 cm^2 (E) Depende das posições dos pontos *A* e *B*.

17. Resposta: alternativa B
O retângulo está dividido em dois retângulos: um acima da reta X e outro, abaixo. No retângulo de cima, a área sombreada é a área de um triângulo cuja base é um lado do retângulo e cuja altura é a largura desse retângulo. Assim, é igual à metade da área do retângulo. Embaixo, ocorre o mesmo. Portanto, a soma das duas áreas sombreadas, igual a 10 cm^2 cada uma, é igual a 20 cm^2.

18. Janaína numerou de 1 a 9 as casas do tabuleiro 3×3 ao lado. Então, ela somou os números escritos em cada uma das linhas e colunas e obteve os números 12, 13, 15, 16 e 17, numa certa ordem. Qual dos números abaixo é a soma que está faltando?



(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

18. Resposta: alternativa E
A soma dos números de 1 a 9 é 45. Ao somar os números escritos nas três linhas com os números escritos nas três colunas, Janaína encontrará o dobro desse número. Portanto, o número que está faltando é $90-(12+13+15+16+17)=90-73=17$.

19. Numa escola, $\frac{2}{3}$ dos alunos gostam de Matemática e $\frac{3}{4}$ dos alunos gostam de Português. Qual é a menor fração dos alunos que gostam de ambas as matérias?

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{7}$ (E) $\frac{8}{9}$

19. Resposta: alternativa B
Seja *x* o número de alunos da escola e *y* o número de alunos que gostam de ambas as matérias. Como $\frac{2}{3}x$ gostam de Matemática e $\frac{3}{4}x$ gostam de Português, temos que $\frac{2}{3}x-y$ gostam só de Matemática, $\frac{3}{4}x-y$ gostam só de Português e pode haver alguém que não goste de nenhuma dessas duas.
Assim, $\frac{2}{3}x-y+\frac{3}{4}x-y+y\le x \Leftrightarrow \frac{17}{12}x-y\le x \Leftrightarrow \frac{17}{12}x-x\le y \Leftrightarrow \frac{5}{12}x\le y$. Portanto, gostam das duas matérias, no mínimo, $\frac{5}{12}$ dos alunos.
Comentário: como $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}=1+\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=1$, podemos supor que se 1 representa o total de alunos, então a fração que deve ser subtraída da soma das frações dos que gostam de pelo menos uma das matérias deve ser $\frac{5}{12}$ ou mais (no caso de haver alunos que não gostam de nenhuma dessas duas matérias).

20. Numa reta, foram marcados 11 pontos diferentes. A soma das distâncias do primeiro ponto à esquerda até os demais é 2018. A soma das distâncias do segundo ponto à esquerda aos demais, incluindo o primeiro, é 2000. Qual é a distância entre o primeiro e o segundo pontos?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

20. Resposta: alternativa B
Sejam $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{10}$ as distâncias do primeiro ponto à esquerda aos demais pontos. Então,

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{10} = 2018.$$

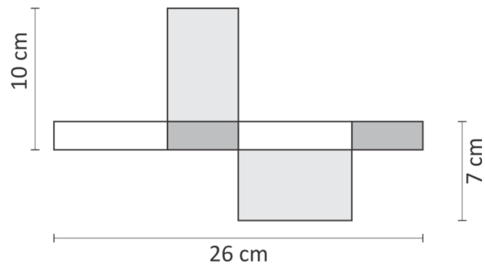
A distância do segundo ponto à esquerda ao terceiro ponto é igual a $d_2 - d_1$, ao quarto ponto $d_3 - d_1$, etc., até ao décimo primeiro ponto, igual a $d_{10} - d_1$. Portanto,

$$d_1 + (d_2 - d_1) + (d_3 - d_1) + \cdots + (d_{10} - d_1) = 2000 \Leftrightarrow (d_1 + d_2 + \cdots + d_{10}) - 9d_1 = 2000$$
$$\Leftrightarrow 2018 - 9d_1 = 2000 \Leftrightarrow 9d_1 = 2018 - 2000 = 18 \Leftrightarrow d_1 = 2.$$

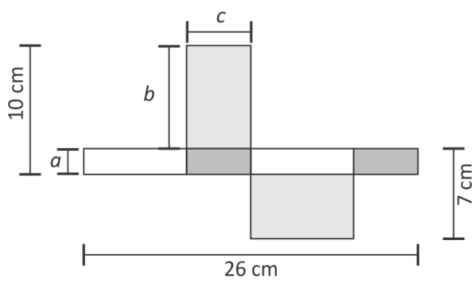
Problemas de 5 pontos

21. A figura mostra a planificação de uma caixa retangular. Qual é o volume dessa caixa, em centímetros cúbicos?

(A) 80 (B) 86 (C) 80 (D) 100 (E) 1820



21. Resposta: alternativa A
Sejam *a*, *b*, *c* as dimensões da caixa, indicadas na figura.
Da figura, temos:



$$\begin{vmatrix} a+b=10 \\ a+c=7 \\ 2(b+c)=26 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+b=10 \\ a+c=7 \\ b+c=13 \end{vmatrix}$$

Somando as três equações acima, temos:
$2(a+b+c) = 10+7+13 \Leftrightarrow a+b+c = 15$ e, subtraindo desta última igualdade as igualdades acima, encontramos $a = 2$, $b = 8$ e $c = 5$.
Logo o volume da caixa é $abc = 2 \cdot 8 \cdot 5 = 80\,\text{cm}^3$.

22. Ria deseja escrever um número em cada uma das casas que estão na borda de um tabuleiro 5×6. Em cada casa, o número a ser escrito deve ser igual à soma dos números escritos nas casas que têm um lado comum com essa casa. Dois dos números já foram escritos, como mostra a figura. Qual deverá ser o número escrito na casa assinalada com um X?

10					3
	x				

(A) -13 (B) -3 (C) 7 (D) 10 (E) 13

22. Resposta: alternativa C

Sejam *a*, *b*, *c*, *d*, *e* os números escritos no diagrama, como na figura. Temos

10	*b*	*c*	*d*	*e*	3
a					
	x				

$$\left|\begin{array}{l} 10 = a + b \\ b = 10 + c \end{array}\right. \Rightarrow 10 = a + 10 + c \Leftrightarrow c = -a \ (1)$$

e

$$\left|\begin{array}{l} d = c + e \\ e = d + 3 \end{array}\right. \Rightarrow d = c + d + 3 \Leftrightarrow c = -3 \ (2)$$

De (1) e (2) temos *a* = 3. Daí, basta ir completando as casas abaixo e depois à direita. Logo, *x* = 7.

10					
3					
-7					
-10					
-3	7				

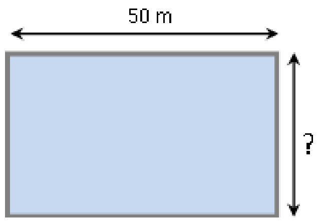
23. Numa escola, há três candidatos para a eleição para presidente do grêmio e 130 alunos estão votando. Adão tem 24 votos até agora, enquanto que Bento tem 29 votos e Carlos tem 37. Quantos votos a mais Carlos necessita para ser eleito?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

23. Resposta: alternativa E

Até agora 24 + 29 + 37 = 90 alunos já votaram, restando 130 – 90 = 40 alunos para votar ainda. Seja *x* um número de votos que Carlos precisa para ser eleito. Supondo que os 40 – *x* votos restantes sejam para o segundo colocado, então 37 + *x* tem que ser maior que o número de votos do segundo colocado, isto é, $37 + x > 29 + 40 - x$. Se 40 – *x* fosse distribuído entre o segundo e o terceiro colocados, o número de votos que Carlos precisaria seria menor, mas para garantir temos que considerar a situação que exige o maior número de votos. Temos, assim, $37 + x > 29 + 40 - x \Leftrightarrow 2x > 32 \Leftrightarrow x > 16$. Dentre os números apresentados, 17 é o menor número de votos que garante a eleição de Carlos.

24. Simone e Irene resolvem apostar uma corrida. Enquanto Simone dá cinco voltas completas ao redor da piscina, Irene vai três vezes e volta três vezes nadando ao longo do comprimento da piscina. A velocidade de Simone é o triplo da velocidade de Irene. Qual é a largura da piscina?

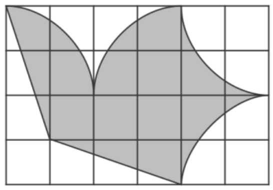


(A) 40 m (B) 42 m (C) 44 m (D) 45 m (E) 48 m

24. Resposta: alternativa A
Se x é a largura da piscina, então a cada volta Simone anda $2(x+50)$ metros. Durante um tempo t, Simone dá 5 voltas, isto é, corre $5 \cdot 2(x+50) = 10x + 500$ metros e Irene nada $6 \cdot 50 = 300$ metros. Se Irene nada com uma velocidade v, Simone corre a uma velocidade $3v$. Sabendo que a distância percorrida é o produto da velocidade pelo tempo, podemos escrever:

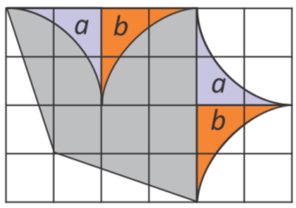
$$\left|\begin{array}{l} vt = 300 \\ 3vt = 500 + 10x \end{array}\right. \Rightarrow 3 \cdot 300 = 500 + 10x \Leftrightarrow 10x = 900 - 500 \Leftrightarrow x = 40 \text{ metros.}$$

25. No quadriculado ao lado, o desenho em cinza tem área de 192 cm^2. O perímetro do desenho é formado de segmentos de reta ou arcos de circunferência. Quais são as dimensões do quadriculado?

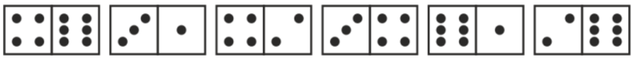


(A) $6\,cm \times 4\,cm$ (B) $12\,cm \times 8\,cm$ (C) $20\,cm \times 12\,cm$ (D) $24\,cm \times 16\,cm$ (E) $30\,cm \times 20\,cm$

25. Resposta: alternativa D
Transferindo as partes *a* e *b* da figura original, conforme indicado à direita, vemos que a área total cinza corresponde à área de 16 quadrados menos 4 quadrados (em branco), ou seja, 12 quadrados. Portanto, os quadrados que formam o quadriculado têm, cada um, área igual a $\frac{192}{12} = 16\,cm^2$, ou seja, têm lado 4 cm. Como o quadriculado tem 6 quadrados de comprimento por 4 quadrados de largura, podemos afirmar que é um quadriculado 24 cm x 16 cm.



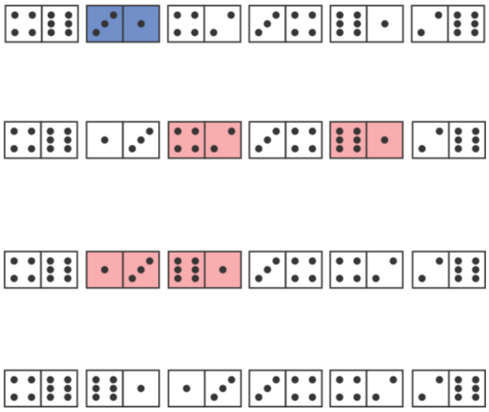
26. Paulo pretende colocar as peças ao lado em suas posições corretas, isto é, partes com pontos iguais devem estar em contato. Ele pode fazer isso por meio de dois movimentos: trocar duas peças de lugar, sem girar, ou girar somente uma peça. Qual é o menor número de movimentos que ele deve fazer para acertar os dominós?



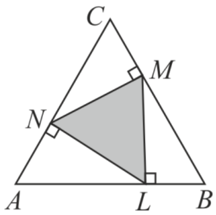
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Resposta: alternativa C

Há duas metades com 1, 2 e 3 pontos e três com 4 e 6 pontos. Isto significa que duas metades, uma com 4 e outra com 6 pontos, terão que ficar nos extremos. Então não mexemos nessas duas peças. Como as duas partes com o 1 e o 3 estão com orientações contrárias, fica claro que devemos fazer pelo uma rotação que corrija essas duas posições. Com uma única rotação da 2ª peça, fazemos isso (movimento 1). As duas metades com 6 devem se juntar e isto se consegue intercambiando a 2ª e a 5ª peças ou então, aproximamos o 6 intercambiando a 3ª e a 5ª peças, o que foi feito (movimento 2). Nas duas situações fica faltando um intercâmbio. No nosso caso, trocamos a posição da 2ª e 3ª peças (movimento 3).



27. Os pontos *N*, *M* e *L* estão sobre os lados do triângulo equilátero *ABC*, tais que $\overline{NM} \perp \overline{BC}$, $\overline{ML} \perp \overline{AB}$ e $\overline{LN} \perp \overline{AC}$, conforme mostrado na figura. A área do triângulo *ABC* é 36. Qual é a área do triângulo *LMN*?



(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

27. Resposta: alternativa B

No triângulo retângulo *MLB*, a medida do ângulo $M\hat{B}L$ é 60°. Logo a medida do ângulo $B\widehat{M}L$ é 30°. Portanto, a medida do ângulo $N\widehat{M}L$ é $180^{\circ} - 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$. O mesmo ocorre com os demais ângulos do triângulo *LMN*, que, portanto, é equilátero. Seja $LB = x$. Então $MB = 2x$ (note que o triângulo *MLB* é metade de um triângulo equilátero). Dada a simetria da figura, concluímos que os três triângulos brancos são congruentes, logo $CM = x$. Assim, o lado do triângulo equilátero *ABC* mede $3x$. Vemos, também, que:

$ML = \frac{\sqrt{3}}{2}MB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2x = \sqrt{3}x$. Assim, a razão de semelhança dos triângulos *ABC* e *LMN* é $\frac{3x}{\sqrt{3}x} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Portanto, $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta MNL} = \frac{36}{\text{área}\Delta MNL} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \text{área}\Delta MNL = \frac{36}{3} = 12$.

28. Ana, Bruna e Clara foram fazer compras. Bruna gastou apenas 15% do que gastou Clara e Ana gastou 60% a mais que Clara. No total, as três gastaram 55 reais. Quanto gastou Ana?

(A) 3 (B) 20 (C) 25 (D) 26 (E) 32

28. Resposta: alternativa E

Sendo *A*, *B* e *C* os valores gastos por Ana, Bruna e Clara, respectivamente, temos

$$\left|\begin{array}{l} A=1{,}6C \\ B=0{,}15C \\ A+B+C=55 \end{array}\right. \Rightarrow 1{,}6C+0{,}15C+C=55 \Leftrightarrow 2{,}75C=55 \Leftrightarrow C=\frac{55}{2{,}75}=20 \text{. Logo, } A=1{,}6\cdot 20=32 \text{.}$$

29. Vivi está praticando salto à distância. A média dos seus saltos anteriores era 3,80 metros, mas hoje, ao saltar 3,99 metros, sua média subiu para 3,81 metros. Que distância ela deverá saltar na próxima vez para poder aumentar sua média para 3,82 metros?

(A) 3,97 m (B) 4,00 m (C) 4,01 m (D) 4,03 m (E) 4,04 m

29. Resposta: alternativa C

Seja *S* a soma dos *n* saltos dados até ontem. Temos $\frac{S}{n}=3{,}8 \Leftrightarrow S=3{,}8n$ (1). Com o resultado de hoje, temos $\frac{S+3{,}99}{n+1}=3{,}81 \Leftrightarrow S+3{,}99=3{,}81n+3{,}81$ (2). De (1) e (2), temos:

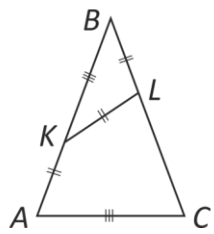
$3{,}8n+3{,}99=3{,}81n+3{,}81 \Leftrightarrow 3{,}81n-3{,}8n=3{,}99-3{,}81 \Leftrightarrow 0{,}01n=0{,}18 \Leftrightarrow n=18$.

Seja *d* a distância que Vivi deve saltar para a média aumentar para 3,82. Devemos ter

$$\frac{S+3{,}99+d}{n+2}=3{,}82 \Leftrightarrow \frac{3{,}8\cdot 18+3{,}99+d}{18+2}=3{,}82 \Leftrightarrow \frac{72{,}39+d}{20}=3{,}82$$

$$\Leftrightarrow d=76{,}40-72{,}39=4{,}01\text{m}$$

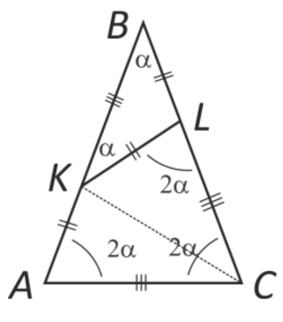
30. Num triângulo *ABC*, os pontos *K* e *L* estão sobre os lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, de modo que $AK=KL=LB$ e $KB=AC$. Qual é a medida do ângulo ABC ?



(A) 36° (B) 38° (C) 40° (D) 42° (E) 44°

30. Resposta: alternativa A

Como *AB* = *BC*, temos *BK* + *KA* = *BL* + *LC* e como *KA* = *BL* temos *BK* = *LC* = *AC*. Sabemos que nos triângulos isósceles os ângulos da base são congruentes. Se ABC mede α então BKL também mede α, logo o ângulo externo $C\hat{L}K$ do triângulo *BKL* mede 2α. Pelo caso LLL, os triângulos *KLC* e *KAC* são congruentes, logo $m\left(KAC\right)=m\left(K\hat{L}C\right)=2\alpha$. Como o triângulo *ABC* é isósceles de base *AC*, temos $m\left(BAC\right)=m\left(BCA\right)=2\alpha$.



Portanto, $\alpha+2\alpha+2\alpha=180^{\text{O}} \Leftrightarrow m\left(A\hat{B}C\right)=\alpha=\frac{180^{\text{O}}}{5}=36^{\text{O}}$.

Canguru de Matemática Brasil – 2017

Prova Nível C – Respostas

Problemas de 3 pontos

Questão 1

Que horas são 17 horas depois das 17h?

(A) 8h **(B)** 10h **(C)** 11h **(D)** 12h **(E)** 13h

1. Alternativa B
Das 17h até 24h (meia-noite) são 7 horas. Faltam 10 horas para completar as 17 horas. Logo, 17 horas depois das 17h são 10h da manhã.

Questão 2

Algumas garotas estavam dançando em roda. Antonia era a quarta à esquerda de Bianca e a sétima à direita de Bianca. Quantas garotas havia na roda?

(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 15

2. Alternativa A
À esquerda de Bianca havia três garotas entre ela e Antonia e à direita de Bianca havia seis garotas entre ela e Antonia. Portanto na roda havia $3 + 6 + 2 = 11$ garotas.

Questão 3

Que número devemos subtrair de –17 para obtermos –33?

(A) –50 **(B)** –16 **(C)** 16 **(D)** 40 **(E)** 50

3. Alternativa C
Temos $-17 - x = -33 \Leftrightarrow -17 + 33 = x \Leftrightarrow x = 16$.

Questão 4

O diagrama mostra um triângulo isósceles preenchido com faixas de mesma largura. O segmento que divide essas faixas é a altura do triângulo. A soma das áreas das partes em branco representa qual fração da área do triângulo?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{2}{5}$

4. Alternativa A
Para cada faixa, existe uma metade colorida e uma metade branca. A reunião de todas as faixas é o triângulo, logo a reunião de todas as metades das faixas é metade do triângulo. A soma das áreas das partes em branco é igual à metade da área do triângulo.

Questão 5

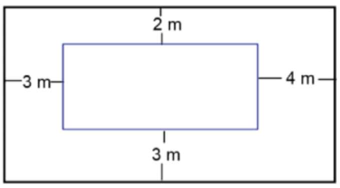
Qual igualdade abaixo é a correta?

(A) $\frac{4}{1} = 1{,}4$ **(B)** $\frac{5}{2} = 2{,}5$ **(C)** $\frac{6}{3} = 3{,}6$ **(D)** $\frac{7}{4} = 4{,}7$ **(E)** $\frac{8}{5} = 5{,}8$

5. Alternativa B
Temos os seguintes resultados corretos: $\frac{4}{1} = 4$; $\frac{5}{2} = 2{,}5$; $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{7}{4} = 1{,}75$ e $\frac{8}{5} = 1{,}6$.

Questão 6

A figura mostra dois retângulos cujos lados são paralelos. Qual é a diferença entre os perímetros dos dois retângulos?

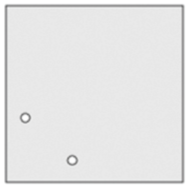


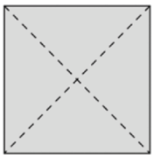
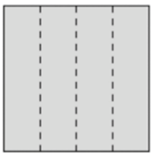
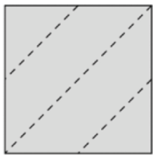
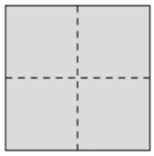
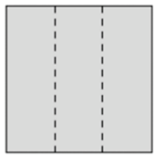
(A) 12 m **(B)** 16 m **(C)** 20 m **(D)** 21 m **(E)** 24 m

6. Alternativa E
O comprimento do retângulo menor tem 3 + 4 = 7 metros a menos do que o do retângulo maior e sua largura tem 2 + 3 = 5 metros a menos do que a do retângulo maior. Para calcular o perímetro de retângulos somamos duas vezes o comprimento e duas vezes a largura. Portanto, a diferença entre os dois perímetros é igual a 2 × (7 + 5) = 24 m.

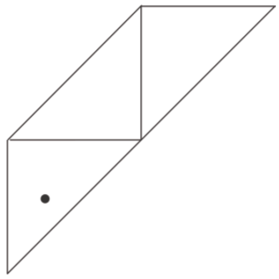
Questão 7

Bruna dobrou uma folha de papel duas vezes e fez um furo no papel ainda dobrado. Ao abrir a folha, ela observou o que está representado na figura à direita. Qual das figuras abaixo mostra nas linhas tracejadas como ela dobrou o papel?



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

7. Alternativa C
Como uma dobra no papel funciona como uma reflexão de espelho, os dois furos feitos no papel dobrado são simétricos em relação à dobra, que deve estar sobre uma diagonal da folha. Como o furo atravessou somente duas camadas de papel, a outra dobra produziu duas camadas que não foram atingidas pelo furo. Na figura ao lado, representamos a folha dobrada. Assim, depois de desdobrada, a folha apresenta um vinco sobre a diagonal e dois vincos menores simétricos em relação à diagonal.



Questão 8

A soma de três inteiros positivos distintos é 7. Qual é o produto desses três números?

(A) 5 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 12

8. Alternativa B
Temos $1 + 2 + 4 = 7$. Logo, $1 \times 2 \times 4 = 8$.
Observação: não há outra forma de expressar o número 7 como soma de três inteiros positivos distintos, a não ser mudando a ordem das parcelas. Mas o produto continua o mesmo, já que a ordem dos fatores não altera o produto.

Questão 9

Ivone tem 20 reais. Suas quatro irmãs têm 10 reais cada uma. Quantos reais ela deve dar a cada uma das suas irmãs de forma que todas as cinco irmãs fiquem com a mesma quantia?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 8 **(E)** 10

9. Alternativa A
Ivone dá x reais a cada irmã, portanto, ela fica com $20 - 4x$ reais e cada irmã fica com $10 + x$ reais. Como todas as quantias devem ser iguais, temos $20 - 4x = 10 + x \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2$.

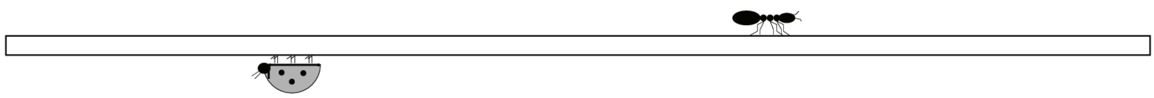
Questão 10

Ângela fez uma peça decorativa sobrepondo corações recortados em papeis brancos ou cinzentos. As áreas dos corações são 1 cm², 4 cm², 9 cm² e 16 cm². Qual é a área total das regiões cinzentas visíveis na figura que representa a peça criada por Ângela?

(A) 9 cm² **(B)** 10 cm² **(C)** 11 cm² **(D)** 12 cm² **(E)** 13 cm²

10. Alternativa B
A área da região cinzenta mais interna é igual a 4 – 1 = 3 cm² e a área da região cinzenta maior é 16 – 9 = 7 cm².
Portanto, a área total cinzenta da peça criada por Ângela é 3 + 7 = 10 cm².

Problemas de 4 pontos



Questão 11

Partindo da extremidade esquerda, uma formiguinha andou $\frac{2}{3}$ do comprimento de um cano. Uma joaninha, que havia partido da extremidade direita do mesmo cano, andou $\frac{3}{4}$ do comprimento deste. Nessa situação, qual fração do comprimento do cano representa a distância entre os dois bichinhos?

(A) $\frac{3}{8}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{5}{7}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{5}{12}$

11. Alternativa E
Para a formiguinha chegar ao fim do cano, falta andar $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ do mesmo. A distância da joaninha até o fim do cano é $\frac{3}{4}$. Então, a distância da formiguinha até a joaninha é $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$
$= \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$.

Questão 12

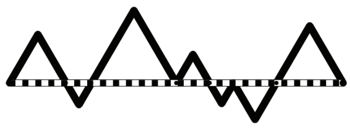
Num teatro infantil, um sexto da audiência era de adultos e dois quintos das crianças eram de meninos. Qual fração da audiência era de meninas?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{2}{5}$

12. Alternativa A
Se n era o número de pessoas da audiência, então $\frac{1}{6}$ de n era o número de adultos e $n - \frac{n}{6} = \frac{5n}{6}$ era o número de crianças. Como dois quintos das crianças eram de meninos, então três quintos das crianças eram de meninas. Logo, o número de meninas era $\frac{3}{5}$ de $\frac{5n}{6}$, ou seja, $\frac{3}{5} \cdot \frac{5n}{6} = \frac{n}{2}$. Assim, metade da audiência era composta de meninas.
Podemos solucionar o problema de uma forma mais direta: se um sexto era de adultos, então cinco sextos eram de crianças. Se dois quintos das crianças eram meninos, então três quintos eram de meninas. Como $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$, a fração da audiência de meninas era $\frac{1}{2}$.

Questão 13

Na figura, a linha interrompida e a linha preta formam vários triângulos equiláteros. O comprimento da linha interrompida é 20. Qual é o comprimento da linha preta?



(A) 25 **(B)** 30 **(C)** 35 **(D)** 40 **(E)** 60

13. Alternativa D
O comprimento da linha interrompida é a soma dos comprimentos de um lado de cada triângulo equilátero. Portanto, o comprimento da linha preta é o dobro do comprimento da linha interrompida, ou seja, igual a $2 \times 20 = 40$.

Questão 14

Ema, Íris, Rita e Zilda têm 3, 8, 12 e 14 anos de idade, não necessariamente nessa ordem. A soma das idades de Zilda e Ema é divisível por cinco e a soma das idades de Zilda e Rita também é divisível por cinco. Qual é a idade de Íris?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 12 **(E)** 14

14. Alternativa E
As únicas somas divisíveis por 5 são $3 + 12 = 15$ e $8 + 12 = 20$. Como a idade de Zilda aparece nas duas somas, concluímos que a idade de Zilda é 12 e as idades de Ema e Rita são 3 ou 8. Logo, Íris tem 14 anos.

Questão 15

Mais de 800 pessoas participaram da corrida do Canguru. Exatamente 35% dos corredores eram mulheres e havia 252 homens a mais do que mulheres. Quantos participaram da corrida?

(A) 802 **(B)** 810 **(C)** 822 **(D)** 824 **(E)** 840

15. Alternativa E

Se 35% dos corredores eram mulheres, então 100% – 35% = 65% dos corredores eram homens. Isso significa que havia 65% – 35% = 30% de homens a mais. Como 252 corresponde a 30% do total de corredores, o número total de participantes da corrida é $\frac{252}{30\%} = \frac{252}{0{,}3} = 840$.

Questão 16

Regina quer escrever um número em cada uma das casas do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de todos os números seja 35, a soma dos números nas três casas à esquerda seja 22 e a soma dos números nas três casas à direita seja 25. Ela já escreveu dois números. Qual é o produto dos dois números que ela irá escrever nas casas cinzentas?

3				4

(A) 0 **(B)** 39 **(C)** 48 **(D)** 63 **(E)** 108

16. Alternativa D

Sejam x e y os números escritos nas casas cinzentas. O número do centro somado com 3 e x resulta 22 e somado com 4 e y resulta 25. Como a soma dos cinco números é 35, concluímos que o número do meio é 22 + 25 – 35 = 12. Logo, $3 + x + 12 = 22 \Leftrightarrow x = 7$ e $12 + y + 4 = 25 \Leftrightarrow y = 9$. Portanto, $xy = 7 \cdot 9 = 63$.

3	x		y	4

Questão 17

Simão pegou uma corda e marcou os pontos em que vai cortá-la para obter nove pedaços iguais. Bárbara pegou a mesma corda e marcou os pontos para cortá-la em oito pedaços iguais. Carlos pegou essa corda e fez todos os cortes que haviam sido marcados por Simão e Bárbara. Quantos pedaços de corda foram obtidos por Carlos?

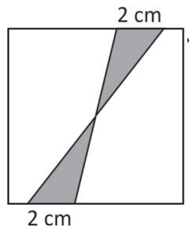
(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 19

17. Alternativa B

Os oito pontos da corda marcados por Bárbara determinam pedaços menores do que os originados pelos sete pontos marcados por Carlos e na corda esses pontos não coincidem (pense na situação em que esses pontos podem coincidir). Portanto, foram marcados 8 + 7 = 15 pontos, determinando 16 pedaços de corda. A figura ilustra este fato.

Questão 18

Dois segmentos de 2 cm de comprimento foram marcados em lados opostos de um quadrado de lado 8 cm. Segmentos ligando essas extremidades delimitam uma região cinzenta do quadrado, conforme a figura. Qual é a área dessa região, em cm^2?



(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 10

18. Alternativa D
A região cinzenta compõe-se de dois triângulos congruentes de base 2 cm. Como os dois têm alturas iguais e a soma dessas alturas é igual à medida do lado do quadrado, de 8 cm, concluímos que as alturas são de 4 cm. A soma das áreas dos triângulos é $2 \times \frac{2 \times 4}{2} = 8$ cm^2.

Questão 19

Pedro quer planejar um programa de corridas. Toda semana ele pretende correr duas vezes, sempre nos mesmos dois dias da semana, não consecutivos. Quantos programas diferentes ele pode montar?

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 14 **(D)** 16 **(E)** 18

19. Alternativa C
Para escolher um dia, Pedro tem sete possibilidades. Uma vez escolhido esse dia, o dia anterior e o dia seguinte não podem ser escolhidos, restando-lhe $7 - 3 = 4$ dias para escolher. Portanto, ele tem $7 \times 4 = 28$ escolhas. Devemos lembrar que a ordem dos dias não conta, pois escolher segunda-feira e quarta-feira é o mesmo que escolher quarta-feira e segunda-feira, por exemplo. Portanto, ele pode montar $\frac{28}{2} = 14$ programas diferentes.

Questão 20

Emília escreve um número inteiro em cada uma das casas do tabuleiro 3 x 3 ao lado de modo que as somas dos números escritos nas casas que têm um lado comum sejam iguais. Ela já escreveu dois números, conforme mostrado na figura. Qual é a soma de todos os nove números que serão escritos no tabuleiro?

2		
		3

(A) 18 **(B)** 20 **(C)** 21 **(D)** 22 **(E)** 23

20. Alternativa D

2	x	y
x	y	3
y	x	y

As duas casas vizinhas da casa com o 2 devem apresentar o mesmo número x e as três casas vizinhas à casa com o 3 devem apresentar o mesmo número y. Reproduzindo o mesmo raciocínio, podemos completar o preenchimento com essas letras, conforme figura ao lado. Como $2 + x = x + y$, concluímos que $y = 2$ e como $x + y = y + 3$ concluímos que $x = 3$. Logo, há cinco casas com o número 2 e quatro casas com o número 3. Somando todos os números, obtemos $5 \times 2 + 4 \times 3 = 22$.

Questão 21

Os números de graus das medidas dos ângulos internos de um triângulo são três inteiros diferentes. Qual é o menor valor possível da soma das medidas do menor e do maior desses ângulos?

(A) 61º **(B)** 90º **(C)** 91º **(D)** 120º **(E)** 121º

21. Alternativa C
A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180º. Para que a soma das medidas do menor ângulo e do maior ângulo seja a menor possível, a medida do ângulo intermediário deve ser a maior possível. Este ângulo não pode medir 90º, pois se isso ocorresse os outros dois teriam soma 90º e seriam menores do que o intermediário, o que é contraditório. Mas se o intermediário medir um grau a menos, ou seja, 89º então o maior mede 90º e o menor ângulo mede 1º. Concluímos então que para medidas inteiras em graus, a menor soma possível do menor e do maior ângulo interno de um triângulo é 90º + 1º = 91º.

Questão 22

Dez cangurus estão em fila, conforme a ilustração. Num dado momento, dois cangurus vizinhos que estão olhando um para o outro trocam de posição, sem mudar a direção do olhar. Em seguida, outros dois cangurus, na mesma situação, repetem a troca e assim sucessivamente, até que não seja mais possível repetir o movimento. No máximo, quantas trocas são possíveis?

(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 21

22. Alternativa C
Nenhum dos cangurus vai mudar a direção de seu olhar. Se considerarmos os cangurus da esquerda para a direita, vemos que o quarto canguru pode trocar de posição com os três cangurus à sua esquerda, o quinto também pode trocar de posição com os três à esquerda, o nono canguru pode trocar de posição com os seis cangurus à sua esquerda e o décimo canguru pode trocar de posição com os mesmos seis cangurus à sua esquerda. Portanto, o número máximo de trocas possíveis é 3 + 3 + 6 + 6 = 18.

Questão 23

Diana escolheu os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e vai somar 2 a alguns deles e 5 aos restantes de modo a obter o menor número de somas diferentes. Quantas somas diferentes ela irá obter?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

23. Alternativa B
Considere os seis números 1, 2, 3, 7, 8 e 9. Somando 2 ou 5 a cada um deles, obtemos seis números distintos. Logo existem pelo menos seis somas diferentes. Podemos de fato obter somente seis somas, fazendo: 1 + 5 = 4 + 2 = 6, 2 + 5 = 5 + 2 = 7, 3 + 5 = 6 + 2 = 8.

Questão 24

Os ônibus de uma certa linha partem do aeroporto com destino ao centro da cidade a cada três minutos. Um carro parte desse aeroporto no mesmo instante em que sai um ônibus e vai pelo mesmo caminho até o mesmo destino. Cada ônibus leva 60 minutos para fazer o percurso, mas o carro o faz em 35 minutos. Com exceção do ônibus que saiu junto, quantos ônibus dessa linha o carro ultrapassa até chegar ao destino?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 13

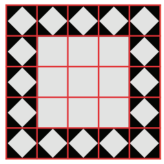
24. Alternativa A
A cada três minutos chega um ônibus no destino final. Quando o ônibus que saiu com o carro chegar ao seu destino, o carro que saiu com ele terá passado por esse ponto 60 – 35 = 25 minutos antes, tempo suficiente para que tenham chegado a esse mesmo ponto oito ônibus (já que 8 x 3 min = 24 min). Logo, o carro irá ultrapassar 8 ônibus.

Questão 25

Uma toalha de mesa quadrada apresenta um padrão geométrico, conforme a figura ao lado. Qual porcentagem da superfície da toalha é preta?

(A) 16% **(B)** 24% **(C)** 25% **(D)** 32% **(E)** 36%

25. Alternativa D



Podemos encaixar a figura num quadriculado 5 × 5, conforme a ilustração. As

casas do quadriculado são brancas ou brancas e pretas, das quais a metade da área é preta, conforme ilustrado à esquerda. Temos 25 casas, das quais 16 têm metade da área na cor preta ou, equivalentemente, a área preta da toalha corresponde a 8 casas do quadriculado. Assim, a porcentagem da toalha que é da cor preta é $\frac{8}{25} = 0{,}32 = 32\%$.

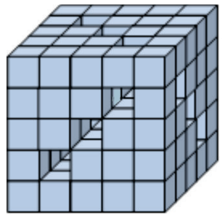
Questão 26

Cada termo da sequência 2, 3, 6, 8, 8,... é um algarismo obtido da seguinte forma: a partir do terceiro termo, é o último algarismo do produto dos termos precedentes. Qual é o 2017º termo dessa sequência?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

26. Alternativa A
Desenvolvendo um pouco mais a sequência, obtemos 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4,... . Vemos que o bloco 6,8,8,4,2,8 repete-se regularmente a partir do terceiro termo. Desconsiderando os dois primeiros termos que são atípicos, temos uma sequência de blocos de seis algarismos que se repetem. Encontrar o 2017º termo da sequência original é o mesmo que encontrar o 2015º termo da segunda sequência. Como 2015 dividido por seis dá quociente 335 e resto cinco, basta descobrir qual é o quinto termo do bloco que se repete, ou seja, o número 2.

Questão 27



Miguel tem 125 cubinhos iguais. Ele colou alguns deles formando um cubo maior com nove túneis através de todo o cubo, conforme mostrado na figura. Quantos dos cubinhos que ele tinha não foram usados?

(A) 36 **(B)** 39 **(C)** 42 **(D)** 45 **(E)** 52

27. Alternativa B
Cada túnel tem o comprimento de uma coluna de cinco cubinhos, mas esses túneis se encontram e o cubinho vazio na intersecção de três túneis é contado três vezes. Assim, o número de cubinhos vazios na direção de frente para o fundo do cubo maior é o de três túneis de cinco cubinhos, mas na direção esquerda para direita e topo para o piso o número de cubinhos vazios é quatro para cada túnel. Portanto, o número total de cubinhos que não foram usados por causa dos túneis é $3 \times 5 + 2 \times 3 \times 4 = 15 + 24 = 39$.

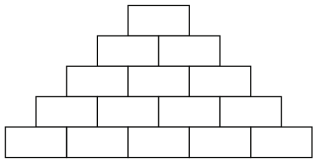
Questão 28

Dois atletas correm em direções opostas numa pista circular de 720 metros de comprimento. O primeiro leva quatro minutos para dar uma volta completa na pista, enquanto o segundo leva cinco minutos para isso. Quantos metros o segundo atleta corre entre dois encontros consecutivos com o primeiro atleta?

(A) 320 **(B)** 330 **(C)** 340 **(D)** 350 **(E)** 355

28. Alternativa A
O primeiro atleta leva quatro minutos para correr 720 metros, logo, corre $\frac{720}{4}$ metros em um minuto. O segundo atleta leva cinco minutos para correr os mesmos 720 metros, logo, corre $\frac{720}{5}$ metros por minuto. Se x é o tempo que eles levam entre dois encontros consecutivos, então x é o tempo em que a soma das distâncias percorridas pelos dois atletas é igual a uma volta. Para o primeiro atleta, essa distância é $\frac{720}{4}x$ e para o segundo atleta, a distância é $\frac{720}{5}x$. Assim, $\frac{720}{4}x + \frac{720}{5}x = 720 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{20}{9}x$. Então, entre dois encontros consecutivos, o segundo atleta corre $\frac{720}{5}x = \frac{720}{5} \cdot \frac{20}{9} = 320$ metros.

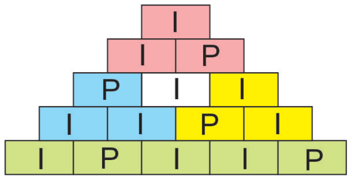
Questão 29



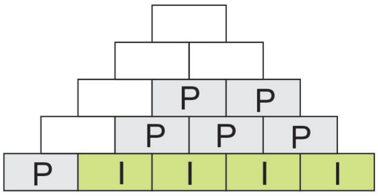
Joana quer escrever um número natural em cada retângulo do diagrama ao lado de modo que cada número escrito seja igual à soma dos dois números que aparecem nos retângulos logo abaixo do retângulo em que foi escrito o número. Qual é a maior quantidade de números ímpares que Joana pode escrever?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 11

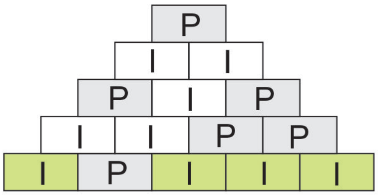
29. Alternativa D



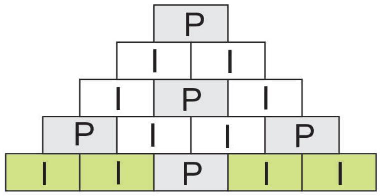
Na figura ao lado, vemos como obter dez números ímpares e cinco números pares no diagrama.
Vamos mostrar como esse é o menor número de pares e, portanto, o maior número de ímpares que Joana pode escrever.
Dados três números em que um deles é a soma dos outros dois, pelo menos um é par, já que a soma de dois números ímpares é par. Nas três regiões destacadas em cores acima da linha da base na figura, há pelo menos três números pares, um para cada região.
Supondo que três seja o menor número de pares, a linha da base deve conter somente ímpares, mas isso implica que todos os demais números são pares, ou seja, há 10 números pares, contrariando nossa hipótese. Admitindo que haja somente um número par na linha da base, temos três situações:



(1)



(2)

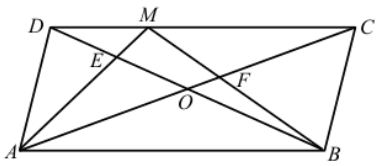


(3)

Na primeira, vemos que já existem 6 números pares antes de terminarmos o preenchimento. Na segunda, vemos que há exatamente 6 números pares. Na terceira, vemos que há 5 números pares. Logo, o maior número possível de ímpares que podem ser escritos no diagrama é 10.

Questão 30

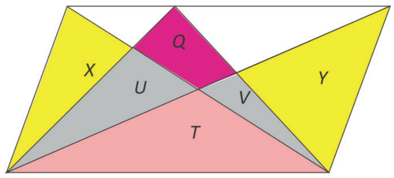
O paralelogramo *ABCD* tem área *S*. Seja *M* um ponto do lado *CD*, *E* a intersecção dos segmentos *AM* e *BD* e *F* a intersecção dos segmentos *BM* e *AC*. A soma das áreas dos triângulos *AED* e *BFC* é $\frac{1}{3}S$. Se *O* é o ponto de intersecção das diagonais, qual é a área do quadrilátero *EOFM*, em termos de S?



(A) $\frac{1}{6}S$ **(B)** $\frac{1}{8}S$ **(C)** $\frac{1}{10}S$ **(D)** $\frac{1}{12}S$ **(E)** $\frac{1}{14}S$

30. Alternativa D

Sejam *Q* a área do quadrilátero *EOFM*, *X* e *Y*, respectivamente as áreas dos triângulos *AED* e *BCF*, *U* e *V* respectivamente as áreas dos triângulos *AOE* e *BFO* e, ainda, *T* a área do triângulo *ABO*, conforme figura.



Sabemos que a área do paralelogramo é *S* e que as diagonais do mesmo o dividem em quatro triângulos de mesma área, ou seja, $X + U = Y + V = \frac{S}{4}$ (*) e também $T = \frac{S}{4}$. O triângulo *ABM* tem base *AB* e mesma altura do quadrilátero, logo, sua área é $\frac{S}{2}$. Assim, $Q + T + U + V = \frac{S}{2}$. Somando as duas igualdades em (*) temos $X + U + Y + V = \frac{S}{4} + \frac{S}{4} \Leftrightarrow U + V + X + Y = \frac{S}{2}$. Pelo enunciado temos $X + Y = \frac{S}{3}$, logo:

$$\frac{S}{3} + U + V = \frac{S}{2} \Leftrightarrow U + V = \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}.$$ Portanto,

$$Q + \frac{S}{4} + \frac{S}{6} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow Q = \frac{S}{2} - \frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{6S - 3S - 2S}{12} \Leftrightarrow Q = \frac{S}{12}.$$

Canguru de Matemática Brasil – 2016 – Nível C – Soluções

Problemas de 3 pontos

1. Quantos números inteiros há entre os números 20,16 e 3,17?

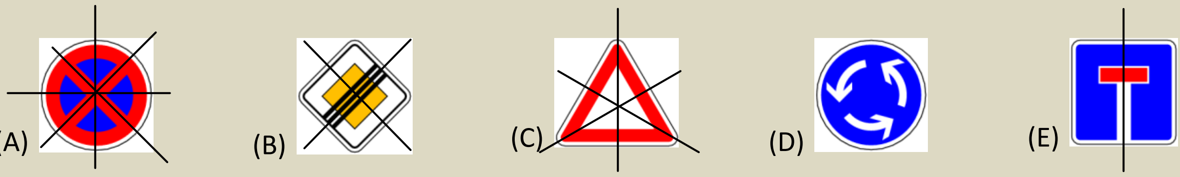
(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

1. Alternativa C
Entre os números dados estão todos os inteiros de 4 a 20, totalizando 20 – 4 + 1 = 17 números inteiros.

2. Qual dos sinais de tráfego a seguir tem o maior número de eixos de simetria?

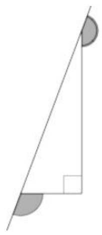
(A) (B) (C) (D) (E)

2. Alternativa A
O eixo de simetria de uma figura é a reta que divide a figura em duas partes exatamente iguais. O que aparece de um lado da reta é o espelho do outro lado da reta. Assim, a figura (A) tem quatro eixos, a figura (B) tem dois eixos, a figura (C) tem três eixos, a figura (D) não tem nenhum eixo e a figura (E) tem um eixo:



(A) (B) (C) (D) (E)

3. Qual é a soma das medidas dos ângulos marcados no triângulo retângulo ao lado?



(A) 150° (B) 180° (C) 270° (D) 320° (E) 360°

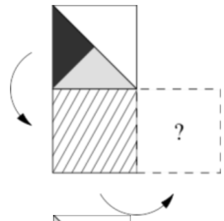
3. Alternativa C
Cada um dos ângulos marcados na figura é um ângulo externo do triângulo, portanto cada um deles tem por medida a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. Se *a* e *b* são as medidas dos ângulos agudos desse triângulo, então a soma das medidas dos ângulos marcados é igual a
$a+90^{\circ}+b+90^{\circ}=a+b+180^{\circ}=90^{\circ}+180^{\circ}=270^{\circ}$.

4. Jeane deveria somar 26 a um determinado número porém, em vez disso, ela subtraiu 26 e obteve -14. Qual era o número que ela deveria ter obtido?

(A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 38 (E) 42

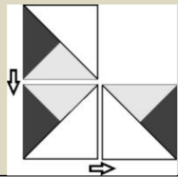
4. Alternativa D
Se x é o número inicial, então $x-26=-14 \Leftrightarrow x=-14+26=12$. Ao somar 26 a esse número, Jeane deveria obter $26+12=38$.

5. Joana vira um cartão ao redor de seu lado inferior e, em seguida, vira o cartão ao redor de seu lado direito, conforme a figura. Como o cartão irá aparecer na posição indicada com o ponto de interrogação?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Alternativa A
Na primeira virada, a imagem no cartão reflete horizontalmente; na segunda virada a imagem refletida reflete também, mas verticalmente.



6. Carlos junta 555 montes de 9 pedras cada um em um único monte. Em seguida, ele divide esse monte em vários grupos de 5 pedras cada um. Quantos grupos ele obteve?

(A) 45 (B) 111 (C) 555 (D) 900 (E) 999

6. Alternativa E
Carlos obteve $\frac{555 \times 9}{5} = 111 \times 9 = 999$ grupos de pedras.

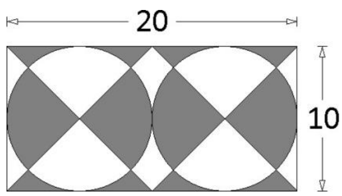
7. Na minha escola, 60% dos professores usam bicicleta e 12% usam carro para vir trabalhar. Se exatamente 45 professores vêm de bicicleta, quantos professores vêm de carro para a escola?

(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 10 (E) 12

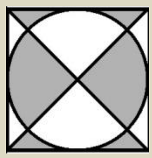
7. Alternativa C
Na escola há $\frac{45}{0,60} = 75$ professores. Portanto, vêm para a escola de carro $75 \cdot 0,12 = 9$ professores.

8. Qual é a área da região cinza na figura ao lado?

(A) 50 (B) 80 (B) 100 (D) 120 (E) 150



8. Alternativa B
A figura é composta de duas figuras iguais à figura ao lado. Nela vemos claramente que para cada região branca existe uma cinzenta igual. Logo, a área da região cinzenta é metade da área da figura. A área da figura original é 20 x 10 = 200. Nessa figura, a área da região cinzenta é 100.

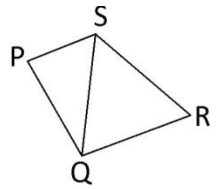


9. Dois pedaços de corda têm um metro e dois metros respectivamente. Alexandre corta os dois pedaços em partes menores, todas de mesmo comprimento. Qual dos números a seguir não pode ser o número total de partes obtidas por Alexandre?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15

9. Alternativa B
Se x é o número de pedaços em que foi cortada a corda de um metro, então 2x é o número de pedaços em que foi cortada a corda de dois metros. O número total de pedaços é $x+2x=3x$, ou seja, um múltiplo de 3. Dentre os números apresentados, o único que não é múltiplo de 3 é o número 8.

10. Quatro cidades P, Q, R e S comunicam-se por meio de estradas conforme mostrado no diagrama. Será organizada uma corrida que irá passar por cada uma das estradas exatamente uma vez, partindo da cidade S e terminando na cidade Q. Quantos caminhos possíveis há para essa corrida?



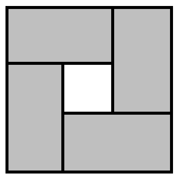
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

10. Alternativa C
Todos os caminhos são da forma $S\to Q\to S\to Q$. Há três caminhos distintos conectando *S* e *Q*, logo há três possibilidades para o primeiro trecho, duas possibilidades para o segundo, lembrando que não podemos repetir estrada, restando apenas uma possibilidade para o terceiro trecho. Portanto, o número de caminhos possíveis é $3\cdot 2\cdot 1=6$.

Solução alternativa:
Todos os caminhos são do tipo $S{*}{*}{*}{*}Q$, por exemplo, *SPQSRQ*. Além da partida e da chegada, as cidades *S* e *Q* são visitadas mais uma vez. É necessário apenas escolher duas posições para essas letras dentre as quatro possíveis na sequência $S{*}{*}{*}{*}Q$, isto é, o número de caminhos possíveis é $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

Problemas de 4 pontos

11. Um quadrado é formado por quatro retângulos iguais e um buraco no centro, como na figura. Cada um dos retângulos tem um perímetro de 16 cm. Qual é o perímetro do quadrado?



(A) 16 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 32 cm

11. Alternativa E
Se x é a largura e y é comprimento de cada um dos quatro retângulos, então $2(x+y)=16$ cm. A medida do lado do quadrado é $x+y$, logo seu perímetro é $4(x+y)=2\cdot 16=32$ cm.

12. Paula tem numa caixa 49 bolinhas azuis e uma vermelha. Quantas bolinhas Paula deve tirar para que 90% das bolinhas restantes na caixa sejam azuis?

(A) 4 (B) 10 (C) 29 (D) 39 (E) 40

12. Alternativa E
Na caixa há 49 + 1 = 50 bolinhas. Paula deve tirar *x* bolinhas azuis de modo que 49 – *x* seja 90% de 50 – *x*. Temos $49-x=0{,}9(50-x)\Leftrightarrow 49-x=45-0{,}9x\Leftrightarrow 49-45=-0{,}9x+x\Leftrightarrow 0{,}1x=4\Leftrightarrow x=40$.

13. Qual das frações a seguir tem o seu valor mais próximo de $\frac{1}{2}$?

(A) $\frac{29}{57}$ (B) $\frac{27}{59}$ (C) $\frac{25}{79}$ (D) $\frac{52}{79}$ (E) $\frac{57}{92}$

13. Alternativa A

Se uma fração $\frac{a}{b}$ tem valor um meio então $\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a=b$. Assim, dentre as frações apresentadas, aquela cujo valor é o mais próximo de $\frac{1}{2}$ tem o dobro do numerador cujo valor é o mais próximo do valor do denominador. Isto ocorre para a primeira fração, pois 2 x 29 = 58, que difere de 57 por apenas uma unidade, o valor mínimo dessa diferença.

Outra solução:

Para saber o quão próximo uma fração $\frac{a}{b}$ está de $\frac{1}{2}$ tomamos o valor $\left|\frac{a}{b}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2a-b}{2b}\right|$. Para a fração $\frac{29}{57}$ temos $\left|\frac{29}{57}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{114}$. Para as frações $\frac{a}{b} = \frac{27}{59}, \frac{25}{79}, \frac{52}{79}$ e $\frac{57}{92}$ temos $\left|\frac{2a-b}{2b}\right| = \frac{5}{118}, \frac{29}{158}, \frac{25}{158}$ e $\frac{22}{184}$, respectivamente. Lembrando que $\frac{1}{114} \leq \frac{x}{y} \Leftrightarrow y \leq 114 \cdot x$ podemos concluir que a fração $\frac{29}{57}$ possui valor mais próximo de $\frac{1}{2}$ que as outras.

14. Ivo anota os resultados das quartas de final, semifinal e final de um torneio de tênis. Esses resultados são os seguintes, não necessariamente nessa ordem: Beto vence Antônio, Carlos vence Damião, Gregório vence Henrique, Gregório vence Carlos, Carlos vence Beto, Eduardo vence Frederico e Gregório vence Eduardo. Quais foram os dois finalistas?

(A) Gregório e Henrique (B) Carlos e Gregório (C) Beto e Carlos
(D) Eduardo e Gregório (E) Carlos e Damião

14. Alternativa B

Houve 7 partidas. Vamos representar por *X >Y* a relação *X venceu Y*. Os resultados foram:

$B > A$

$C > D$

$G > H$

$G > C$

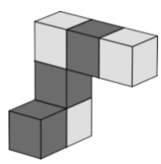
$C > B$

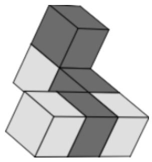
$E > F$

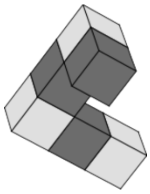
$G > E$

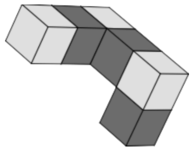
Olhando a lista, vemos que *A*, *D*, *F* e *H* foram eliminados nas quartas de final. Na semifinal foram eliminados *B* e *E*. Sobraram apenas *C* e *G* para a final.

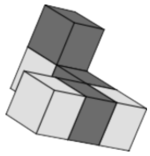
15. Ana colou alguns cubos, obtendo a peça ao lado. Movimentando a peça com rotações e deslocamentos, ela pode ver a peça em diferentes posições. Qual das figuras a seguir não é uma possível vista dessa peça?

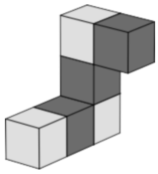



(A)


(B)

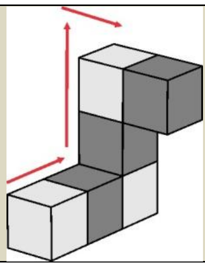

(C)


(D)


(E)

15. Alternativa B

A peça diferente tem uma parte com direção contrária à mesma parte nas demais peças. Na peça (E), caminhando sobre a parte com três cubos em direção ao centro, caminhamos sobre a parte central e viramos à direita. Isso pode ser feito nas demais peças, exceto na (B), em que temos que virar à esquerda na parte final.

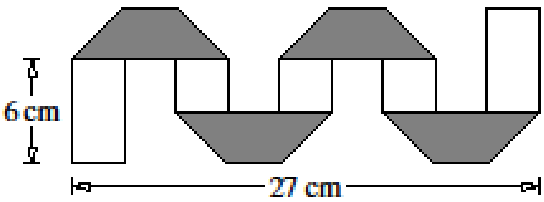


16. Ada, Eda e Ida são trigêmeas. Elas têm outros dois irmãos gêmeos que são três anos mais novos. Qual dos números a seguir pode ser a soma das idades desses cinco irmãos?

(A) 36 (B) 53 (C) 76 (D) 89 (E) 92

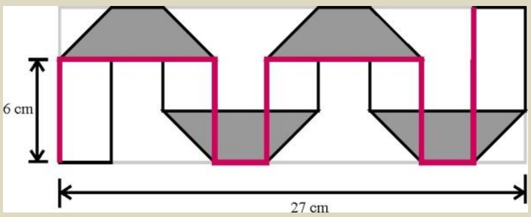
16. Alternativa D
Sendo x a idade de cada uma das três irmãs, $x – 3$ será a idade de cada um dos dois gêmeos. A soma das idades é $3x+2(x-3)=5x-6=5(x-1)-1$, que é um inteiro positivo múltiplo de cinco menos 1. O único número nessas condições é 89, pois $89=5\cdot 18-1$.

17. Uma tira retangular de papel de 3 cm de largura é branca de um lado e cinza do outro. Maria dobra várias vezes a tira, como na figura. Todos os trapézios cinzentos são iguais. Qual é o comprimento da tira?



(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 54 cm (D) 57 cm (E) 81 cm

17. Alternativa D
Se x é o comprimento da base maior dos trapézios, então o comprimento da tira dobrada é igual à soma das medidas das bases maiores, menos as larguras contadas a mais, ou seja, $4x-3\times 3=27 \Leftrightarrow 4x=36 \Leftrightarrow x=9$. O comprimento da base menor é igual ao da base maior menos duas vezes a largura da tira, ou seja, $9-2\times 3=3$.



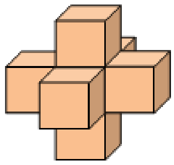
O comprimento da tira original, desdobrada, é igual ao comprimento da linha destacada na figura: $4\times 6+3\times 9+2\times 3=57\,\text{cm}$.

18. Dois cangurus começam a saltar de um mesmo ponto, no mesmo instante e na mesma direção. Ambos pulam uma vez a cada segundo. Um deles dá sempre um salto de seis metros, enquanto que o outro começa com um salto de um metro, em seguida um de dois metros, depois um de três metros e assim por diante. Depois de quantos saltos o segundo canguru vai alcançar o primeiro canguru?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

18. Alternativa B
No salto de número n o primeiro canguru terá andado $6n$ metros e o segundo canguru terá andado $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ metros. O segundo canguru estará na mesma posição que o primeiro se, e somente se, $6n=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow 12n=n^2+n\Leftrightarrow n^2=11n\Leftrightarrow n=11$ (note que $n\neq 0$).

19. Sete dados comuns são colados para formar o bloco ao lado. As faces em contato têm o mesmo número de pontos. Quantos pontos são visíveis na superfície do bloco?



(A) 24 (B) 90 (C) 95 (D) 105 (E) 126

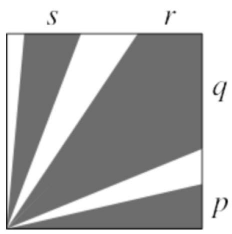
19. Alternativa D
Nos dados comuns, a soma dos pontos em faces opostas é sempre 7, portanto a soma dos pontos das seis faces de um único dado é igual $3\times 7=21$. O dado do centro tem todas as suas faces em contato com faces de outros dados, logo seus pontos não serão visíveis. Também não serão visíveis seis faces, uma de cada um dos seis dados visíveis. A soma dos pontos dessas seis faces é igual à soma dos pontos das faces do dado central, já que seus pontos complementam os pontos do mesmo. Logo, a soma dos pontos de todas as faces visíveis do bloco é igual a $7\times 21-2\times 21=5\times 21=105$.

20. Há 20 estudantes numa classe. Eles sentam-se em pares, de modo que exatamente um terço dos meninos senta-se ao lado de uma menina e exatamente metade das meninas senta-se ao lado de um menino. Quantos meninos há na classe?

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

20. Alternativa B
Se x é o número de meninos, então $20-x$ é o número de meninas da classe. O número de meninos e meninas de cada par heterogêneo é o mesmo, logo $\frac{x}{3}=\frac{20-x}{2}\Leftrightarrow 2x=60-3x\Leftrightarrow 5x=60\Leftrightarrow x=12$.

Problemas de 5 pontos



21. Na figura, o quadrado tem área 36 e a soma das áreas das regiões cinzentas é igual a 27. As letras *p*, *q*, *r*, *s* indicam as medidas dos segmentos sobre os lados do quadrado. Qual é o valor de $p+q+r+s$?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

21. Alternativa D
Como o quadrado tem área 36, seu lado mede 6.
Os segmentos sobre os lados do quadrado são as bases das regiões triangulares cinzentas de altura 6. Então $\frac{s\cdot 6}{2}+\frac{r\cdot 6}{2}+\frac{q\cdot 6}{2}+\frac{p\cdot 6}{2}=27 \Leftrightarrow 3\left(p+q+r+s\right)=27 \Leftrightarrow p+q+r+s=9.$

22. O relógio de Teobaldo está atrasado 10 minutos, mas ele pensa que o relógio está adiantado 5 minutos. O relógio de Leonardo está adiantado 5 minutos, mas Leonardo pensa que está atrasado 10 minutos. No mesmo instante em que olham seus relógios, Teobaldo acha que são 12 horas. Que horas Leonardo acha que são?

(A) 11 h 30 min (B) 11 h 45 min (C) 12 h (D) 12h 30 min (E) 12h 45 min

22. Alternativa D
Tanto Teobaldo quanto Leonardo estão errados em quinze minutos em relação ao horário real. O horário mental de Teobaldo está 15 minutos atrasado em relação ao horário real, enquanto que o horário mental de Leonardo está 15 minutos adiantado em relação ao horário real. Logo o horário mental de Leonardo está $15+15=30$ minutos adiantado em relação ao horário mental de Teobaldo. Quando Teobaldo acha que são 12 horas, Leonardo acha que são 12 horas e 30 minutos.

23. Doze garotas se encontraram em um café. Elas comeram, em média, 1,5 bolinhos cada uma. Nenhuma delas comeu mais do que dois bolinhos e duas delas apenas tomaram refrigerante. Quantas garotas comeram dois bolinhos cada uma?

(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

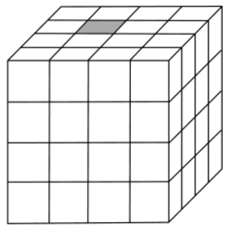
23. Alternativa E
Foram comidos $12\times 1{,}5=18$ bolinhos. Duas meninas não comeram bolinhos, restando 10 meninas que comeram um ou dois bolinhos cada uma. Se *x* é o número de meninas que comeram dois bolinhos então $10-x$ é o número de meninas que comeram somente um bolinho. Temos $2x+10-x=18 \Leftrightarrow x=8.$ *Obs: foi admitido que o número de bolinhos comidos era inteiro, caso contrário o problema seria indeterminado e a situação impraticável.*

24. Chapeuzinho Vermelho está distribuindo docinhos para três vovozinhas. Ela começa com a cesta cheia, mas antes de entrar na casa de cada avó, o Lobo Mau come metade dos docinhos que estão na cesta. Ela dá a mesma quantidade de docinhos para cada avó e, ao deixar a casa da última delas, sua cesta está vazia. Qual dos números a seguir é com certeza um divisor do número de docinhos que havia na cesta cheia?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

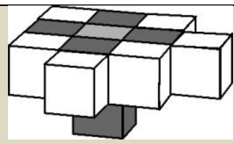
24. Alternativa D
Se x é a quantidade de docinhos que a terceira avó comeu, então CV chegou à casa dela com $2x$ docinhos, pois L comeu x docinhos. CV chegou à casa da segunda avó com $6x$ docinhos, pois L comeu $3x$, a segunda avó comeu x e CV saiu de lá com $2x$. Assim, CV chegou à casa da primeira avó com $14x$ docinhos, pois o L comeu $7x$, a primeira avó comeu x e CV saiu de lá com $6x$ bolinhos. O número $14x$ de docinhos é um múltiplo do número 7, qualquer que seja x.

25. O cubo mágico ao lado é composto de 64 pequenos cubos. Exatamente um dos cubos é cinzento. Um dia, o cubo cinzento transformou todos os cubos vizinhos (aqueles que têm uma face em contato) em cubos cinzentos. No dia seguinte, todos os cubos cinzentos fizeram o mesmo com seus vizinhos. Ao final desse dia, quantos cubos cinzentos havia?



(A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 16 (E) 17

25. Alternativa E
No primeiro dia tornam-se cinzentos cinco cubos, vizinhos das cinco faces do cubo assinalado, como mostra a figura ao lado. No dia seguinte tornam-se cinzentos os seis cubos brancos da camada de cima, mais os cinco cubos vizinhos do cubo cinzento que estava na camada inferior. O total de cubos cinzentos é 1 + 5 + 6 + 5 =17.

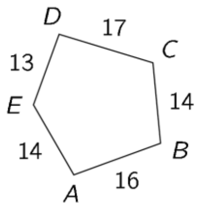


26. Vários números inteiros positivos diferentes foram escritos no quadro-negro. O produto dos dois menores deles é 16 e o produto dos dois maiores é 225. Qual é a soma de todos esses números?

(A) 38 (B) 42 (C) 44 (D) 58 (E) 243

26. Alternativa C
O número 16 pode ser escrito como o produto de dois números inteiros positivos diferentes de duas maneiras: 1×16 e 2×8. O número 225 pode ser escrito como o produto de dois números inteiros positivos diferentes de quatro maneiras: 1×225, 3×75, 5×45 e 9×25. Então os dois menores números não podem ser 1 e 16, pois este número é maior que um dos fatores dos produtos da segunda lista. Logo, os dois menores números são 2 e 8 e os dois maiores são 9 e 25. A sua soma é 2 + 8 + 9 + 25 = 44.

27. No pentágono ao lado são dadas as medidas de seus lados. São desenhadas circunferências com centros nos vértices *A*, *B*, *C*, *D* e *E* de modo que todo par de circunferências com centros no mesmo lado sejam tangentes. Qual dos pontos é o centro da circunferência com o maior raio?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

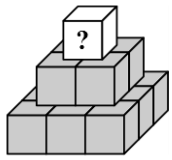
27. Alternativa A

Sejam s,t,u,v,x os raios das circunferências com centros nos vértices A,B,C,D,E , respectivamente. Então:

$$\begin{cases} s+t=16 \\ t+u=14 \\ u+v=17 \Rightarrow 2(s+t+u+v+x)=16+14+17+13+14 \Leftrightarrow s+t+u+v+x=37\,(*) \\ v+x=13 \\ x+s=14 \end{cases}$$

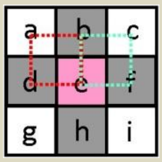
Escolhendo os dois pares menores compreendendo quatro raios diferentes, temos $t+u=14$ e $v+x=13$, logo $t+u+v+x=27$. Substituindo na equação (*) concluímos que $s=10$ é o raio circunferência maior, com centro em A.

28. Cátia quer escrever um número inteiro positivo diferente em cada um dos 14 cubos da pirâmide ao lado, de modo que a soma dos números escritos nos 9 cubos da camada inferior seja 50 e que os números escritos em cada um dos demais cubos seja a soma dos quatro cubos em que se apoiam. Qual é o maior número que Cátia pode escrever no cubo de cima?



(A) 80 (B) 98 (C) 104 (D) 110 (E) 118

28. Alternativa E



Os números diferentes *a, b, c, d, e, f, g, h, i* têm soma 50. Os cubos colocados sobre os cubos com esses números terão números $a+b+e+d$, $b+c+f+e$, $e+f+h+i$, $d+e+h+g$ e o cubo de cima tem o número igual à soma *s* desses últimos quatro números, isto é, $s=a+c+i+g+2(b+f+h+d)+4e$.

Devemos buscar o valor máximo para *e* bem como os quatro maiores para *b, f, h* e *d*. Os menores valores devem ser atribuídos a *a, c, i, g* cuja soma será $1+2+3+4=10$. Em seguida, para *b, f, h* e *d*, atribuímos os valores 5, 6, 7 e 8, cuja soma é 26. Logo, $e=50-(10+26)=14$. Portanto, $s=10+2\times26+4\times14=118$.

29. Um trem tem cinco vagões, com pelo menos um passageiro cada. Dois passageiros são *vizinhos* se estão no mesmo vagão ou em vagões consecutivos. Cada passageiro tem exatamente cinco ou exatamente dez *vizinhos*. Quantos passageiros há no trem?

(A) 13 (B) 15 (C) 17 (D) 20 (E) 25

29. Alternativa C

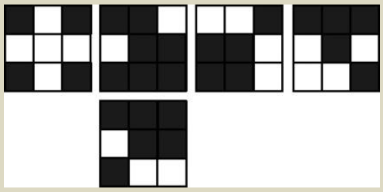
Considere p, q, r, s e t os números de passageiros no primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto vagão, respectivamente. Como cada vagão possui pelo menos um passageiro $p, q, r, s, t \geq 1$. Contando os vizinhos de um passageiro no primeiro vagão: $p-1+q=5$ ou $10 \Leftrightarrow p+q=6$ ou 11. Para um passageiro no segundo vagão: $p+q-1+r=5$ ou $10 \Leftrightarrow p+q+r=6$ ou 11. Como $r \geq 1$, temos $p+q=6$ e $p+q+r=11 \Rightarrow r=5$.

Analogamente, podemos concluir que $s+t=6$. Portanto, $p+q+r+s+t=6+5+6=17$.

30. Um cubo $3 \times 3 \times 3$ foi construído com 15 cubinhos pretos e 12 cubinhos brancos. Na figura podem ser vistas cinco faces do cubo maior. Qual é a sexta face desse cubo?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

30. Alternativa A



Podemos organizar a planificação do cubo, começando com a primeira face, por exemplo, e juntando as demais faces, como ilustrado ao lado. A face que falta é a que se opõe à face de baixo e é vizinha às quatro faces de cima. Olhando as arestas superiores dessas quatro faces, concluímos que a face que falta tem cinco faces pretas e uma borda formada somente por cubos pretos. Logo, é a face apresentada na figura (A).

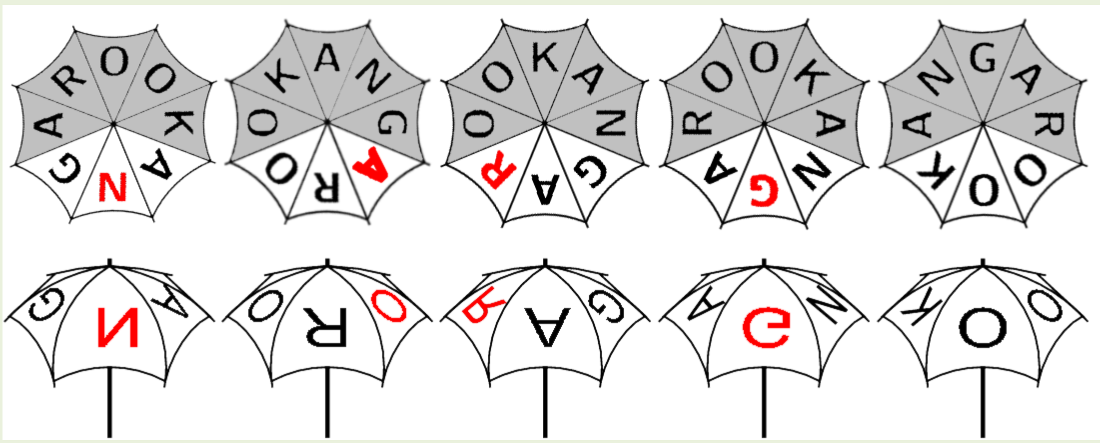
Problemas de 3 pontos

1. Quando Gabriel esteve na Austrália, comprou um guarda-chuva que, aberto, mostrava a palavra *canguru*, em inglês, conforme figura ao lado. Qual das figuras abaixo mostra o mesmo guarda-chuva?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

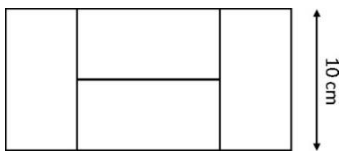
1. Resposta E

Podemos comparar cada alternativa com o que se vê ao girar o guarda-chuva:



Neste caso, apenas a alternativa E coincide com o que é visto no guarda-chuva.

2. O retângulo maior ao lado é formado por quatro retângulos menores iguais. Se o seu lado menor mede 10 cm, qual é a medida do seu lado maior?



(A) 10 cm (B) 20 cm (C) 30 cm (D) 40 cm (E) 50 cm

2. Resposta B

Seja x a medida do lado menor dos retângulos menores. Então $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ cm. Portanto, o lado maior do retângulo maior mede $5 + 10 + 5 = 20$ cm.

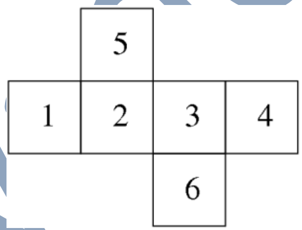
3. Qual dos números a seguir é o mais próximo de $2{,}015 \times 510{,}2$?

(A) 0,1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

3. Resposta E

$2{,}015 \times 510{,}2 \cong 2 \times 510 = 1020$. Dos números apresentados, o mais próximo é 1000.

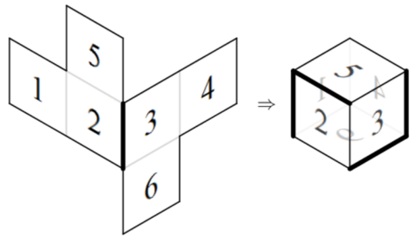
4. Suzana desenha a planificação de um cubo e numera suas faces conforme mostrado na figura. Em seguida, ela soma os números das faces opostas, obtendo três números. Quais são eles?



(A) 4,6,11 (B) 4,5,12 (C) 5,6,10 (D) 5,7,9 (E) 5,8,8

4. Resposta A

Fazendo as dobras indicadas, vemos que as faces opostas são 1 e 3, 2 e 4, 5 e 6, com somas 1 + 3 = 4, 2 + 4 = 6 e 5 + 6 = 11.



5. Qual dos números a seguir não é um número inteiro?

(A) $\frac{2011}{1}$ (B) $\frac{2012}{2}$ (C) $\frac{2013}{3}$ (D) $\frac{2014}{4}$ (E) $\frac{2015}{5}$

5. Resposta D

2011 é divisível por 1, 2012 é divisível por 2, 2013 é divisível por 3 e 2015 é divisível por 5. O número 2014 não é divisível por 4, logo o quociente de $\frac{2014}{4}$ não é inteiro.

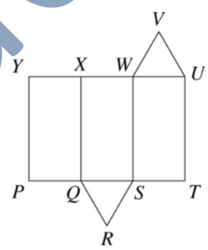
6. Uma viagem de Piracanjuba para Piapara passando por Piracema dura 130 minutos. O trecho entre Piapara e Piracema demora 35 minutos. Quanto tempo leva para percorrer o trecho entre Piracema e Piracanjuba?

(A) 55min (B) 1h 5min (C) 1h 35min (D) 1h 45min (E) 1h 55min

6. Resposta C

Como Piracema fica num ponto entre Piracanjuba e Piapara, concluímos que a viagem de Piracema para Piracanjuba dura 130 minutos menos 35 minutos, ou seja, 95 minutos. Isto corresponde a 60 + 35 min= 1h 35min.

7. A figura ao lado é a planificação de um prisma de base triangular. Quando dobramos a folha para montar o prisma, o segmento *UV* irá coincidir com outro segmento da planificação. Qual é esse segmento?



(A) *WV* (B) *XY* (C) *XW* (D) *QR* (E) *RS*

7. Resposta B

Dobrando ao longo de *WS* e depois ao longo de *WU* e *XQ*, vemos que *VW* se junta com *WX* e *VU* com *XY*.

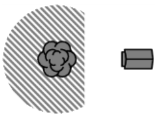
8. Os lados de um triângulo medem 6 cm, 10 cm e 11 cm. Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que esse triângulo. Qual é a medida do lado do triângulo equilátero?

(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 18 cm

8. Resposta B

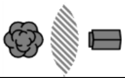
O perímetro do triângulo de lados 6, 10 e 11 centímetros é igual a $6+10+11=27$ cm. Como o triângulo equilátero tem lados iguais, a medida desses lados é igual a $\frac{27}{3}=9$ cm.

9. Quando o sagui Simão desce para o chão, ele não passa de cinco metros de distância do tronco da sua árvore. Além disso, ele sempre fica pelo menos a cinco metros de distância da casinha do cachorro. Qual das figuras abaixo mostra, hachurada, a parte do solo em que ele pode andar?

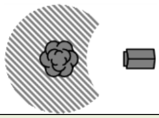


(A)

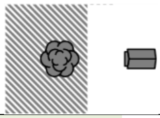
(B)



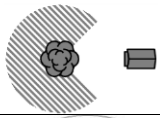
(C)



(D)

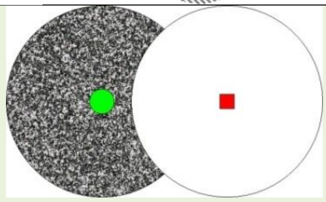


(E)



9. Resposta C

Supondo que a distância entre o tronco e a casinha seja menor do que 10 metros, a região escura na figura ao lado representa a parte do solo em que Simão pode caminhar.



10. Um ciclista anda cinco metros por segundo. As rodas de sua bicicleta têm comprimento de 125 centímetros. Quantas voltas completas cada roda dá em cinco segundos?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 20 (E) 25

10. Resposta D

Em 5 segundos o ciclista percorre $5x5 = 25$ metros e 25 metros = 2500 centímetros. A cada volta, as rodas da bicicleta andam 125 centímetros. Portanto, nesses 5 segundos, cada roda dá $\frac{2500}{125} = 20$ voltas.

Problemas de 4 pontos

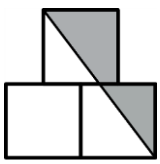
11. Numa classe do nono ano não há dois garotos que nasceram no mesmo dia da semana, nem duas garotas que nasceram no mesmo mês. Entretanto, se algum aluno novo for aceito na sala, uma dessas duas condições não será mais verdadeira. Quantos alunos há na sala?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 24 (E) 25

11. Resposta B

Se o novo aluno for menino, deverá nascer no mesmo dia da semana que algum outro menino. Logo, há 7 meninos na sala, já que a semana tem 7 dias. Por outro lado, se entrar uma nova menina, deverá fazer o aniversário no mesmo mês que alguma outra menina. Logo, há 12 meninas na sala, já que o ano tem 12 meses. Portanto, no nono ano há 7 + 12 = 19 alunos.

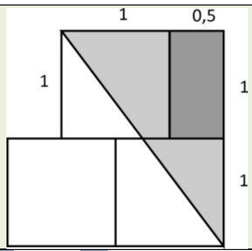
12. Na figura, o centro do quadrado de cima está alinhado com o lado comum dos dois quadrados de baixo. Os quadrados têm lados de medida 1. Qual é a área da região cinza?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) 1 (D) $1\frac{1}{4}$ (E) $1\frac{1}{2}$

12. Resposta C

Podemos completar a parte cinza com um retângulo 0,5 x 1, como na figura. A área total cinza é igual à metade da área de um retângulo 1,5 x 2, ou seja, 1,5. Retirando a área do retângulo mais escuro, igual a 0,5, sobra a área da região original cinza, igual a $1{,}5 - 0{,}5 = 1$.



13. Na igualdade

$$2*0*1*5*2*0*1*5*2*0*1*5=0,$$

todos os asteriscos devem ser substituídos pelos sinais $+$ ou $-$ de forma que a igualdade esteja correta. Qual é a menor quantidade possível de asteriscos que devem ser substituídos pelo sinal $+$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

13. Resposta B

Se somarmos todos os 12 números, obtemos $3\times(2+0+1+5)=24$, então após colocar os sinais de $+$ e $-$, a soma dos números positivos deve ser 12 e a dos negativos -12 para que no final o resultado seja 0. O primeiro 2 é sempre positivo (não há asterisco na frente) e como queremos a menor quantidade possível de sinais de $+$, devemos colocá-los nos maiores números, o que neste caso será em dois cincos para se obter o 12 (2 + 5 + 5 = 12). Logo, a menor quantidade de asteriscos substituídos pelo sinal $+$ é dois.

14. Durante uma chuva forte, caíram 15 litros de água por metro quadrado. De quanto subiu o nível de água de uma piscina que recebeu esta chuva?

(A) 0.15 cm (B) 1,5 cm (C) 15 cm (D) 150 cm (E) depende do tamanho da piscina

14. Resposta B

Um litro equivale a 1000 cm^3. Considere um recipiente cuja base tem um metro quadrado. Se 15 litros de água forem despejados no recipiente, a água ocupará um volume de $1000\times 15 = 15000\,cm^3$. Como a base tem $1m^2 = 10000cm^2$ e a água atinge uma altura h no recipiente, temos $10^4 h = 15000 \Leftrightarrow h = \frac{15000}{10000} = 1{,}5$ cm.

15. Um arbusto tem 10 galhos. Cada galho tem cinco folhas ou duas folhas e uma flor. Qual dos números abaixo pode ser a quantidade total de folhas do arbusto?

(A) 31 (B) 37 (C) 39 (D) 45 (E) 47

15. Resposta E

Se x é o número de galhos com 5 folhas, então 10 – x é o número de galhos com duas folhas e uma flor. Portanto, a quantidade total de folhas no arbusto é igual a $5x+2(10-x)=5x+20-2x=3x+20=3(x+6)+2$. Entre os números dados, somente 47 serve, pois somente $47=3\cdot 15+2$ deixa resto 2 quando dividido por 3.

16. A média aritmética das notas de Matemática dos alunos do nono ano foi 6. O número de alunos aprovados corresponde a 60% dos alunos que fizeram a prova e a média aritmética das notas desses alunos foi 8. Qual foi a média dos alunos que foram reprovados nessa prova?

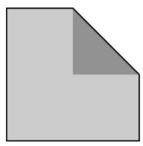
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. Resposta C

Se n é o número de alunos que fizeram a prova, então a média aritmética das notas dos n alunos é 6 e a média aritmética das notas de 60% de n = 0,6n alunos é 8.

A soma das notas de todos os alunos é 6n e a soma das notas dos alunos aprovados é $8\cdot 0{,}6n=4{,}8n$. Logo, a soma das notas dos alunos reprovados é $6n-4{,}8n=1{,}2n$. Sendo 40% de n = 0,4n a quantidade desses alunos, concluímos que a média aritmética de suas notas é $\frac{1{,}2n}{0{,}4n}=3$.

17. Um canto de uma folha quadrada foi dobrado até o centro da folha, obtendo-se um pentágono, conforme a figura. As áreas do pentágono e da folha são números inteiros consecutivos. Qual é a área da folha?



(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32

17. Resposta C

A parte da folha que foi dobrada, junto com a parte que ela cobre, forma um quadrado cuja área é um quarto da área da folha. Portanto, a parte dobrada é a metade disso, ou seja, um oitavo. Logo, o pentágono tem área igual a $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ da área da folha. Se x é a área da folha, então x – 1 é a área do pentágono e

$$\frac{x-1}{x}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow 8x-8=7x\Leftrightarrow x=8.$$

18. Raquel somou as medidas de três lados de um retângulo e obteve 44 cm. Renata somou as medidas de três lados do mesmo retângulo e achou 40 cm. Qual é o perímetro desse retângulo?

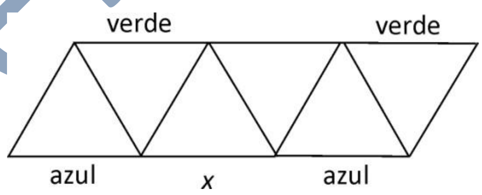
(A) 42 cm (B) 56 cm (C) 64 cm (D) 84 cm (E) 112 cm

18. Resposta B

O retângulo tem dois lados de medida *x* e dois lados de medida *y*. Raquel somou $2x+y=44$ e Renata somou $x+2y=40$. Somando lado a lado as duas equações, temos:

$2x+y+x+2y=44+40\Leftrightarrow 3x+3y=84\Leftrightarrow x+y=28$. Portanto, o perímetro é $2(x+y)=2\cdot 28=56$.

19. Cada um dos treze segmentos da figura pode ser pintado de azul, verde ou vermelho, desde que cada triângulo tenha seus lados com três cores diferentes. Alguns segmentos já foram pintados, conforme a figura. Qual cor pode ser usada para pintar o segmento indicado com *x*?

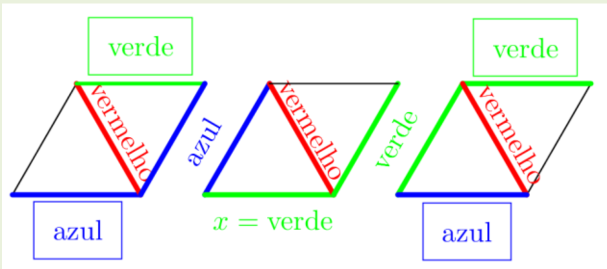


(A) somente azul (B) somente verde (C) somente vermelho

(D) azul ou vermelho (E) nenhuma delas

19. Resposta B

Nos dois primeiros triângulos (da esquerda para a direita), o lado em comum entre eles deve ser vermelho (já que o azul e verde já foram usados). Do mesmo modo, o lado comum entre os dois últimos triângulos também é vermelho. Assim, conseguimos preencher um lado do 3º e 4º triângulos com azul e verde, respectivamente. Portanto o lado comum entre eles será vermelho e o lado com um x terá que ser verde.



20. A professora Íris perguntou a cinco de seus alunos quais deles haviam estudado no dia anterior. Respostas de Ana, Beatriz, Carlos, Dina e Ernesto, respectivamente: “Ninguém”, “Só um”, “Exatamente dois”, “Exatamente três” e “Exatamente quatro”. Íris sabia que os que não estudaram não estavam dizendo a verdade, mas os que tinham estudado estavam dizendo a verdade. Quantos desses cinco alunos estudaram?

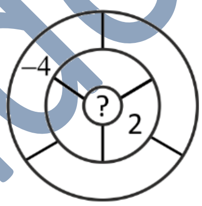
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

20. Resposta B

Observe que no máximo uma das cinco respostas dadas pode ser verdadeira. Além disso, se todas as respostas forem falsas, então nenhum deles estudou no dia anterior, logo quem respondeu “Ninguém” disse a verdade, absurdo. Portanto, exatamente uma das cinco respostas é verdadeira e apenas um dos cinco alunos estudou no dia anterior.

Problemas de 5 pontos

21. Lia deseja escrever um número em cada uma das sete regiões no diagrama ao lado, de modo que o número numa região qualquer deve ser igual à soma dos números escritos nas regiões vizinhas (regiões com linhas limites comuns). Ela já colocou alguns números, conforme a figura. Qual número deve ser escrito na região indicada pelo ponto de interrogação?



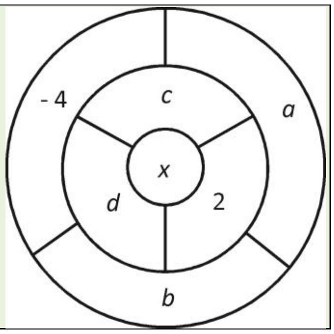
(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 1 (E) 6

21. Resposta E

Da figura, temos $x = c + d + 2$. Temos também

$$\begin{cases} a = -4 + c + 2 + b \\ b = -4 + d + 2 + a \end{cases} \Rightarrow a + b = a + b + c + d - 4 \Leftrightarrow c + d = 4$$

Logo, $x = c + d + 2 = 4 + 2 = 6$.



22. Cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, foram escritos em cinco cartões, um em cada cartão. Pedro calculou todas as possíveis somas dos números escritos em cada par de cartões, obtendo somente três resultados diferentes: 57, 70 e 83. Qual foi o maior número escrito nos cartões?

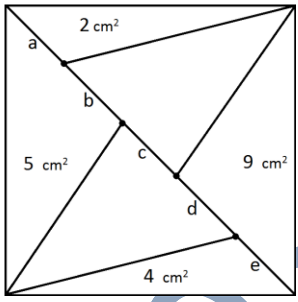
(A) 35 (B) 42 (C) 48 (D) 53 (E) 82

22. Resposta C

Se os cinco números fossem diferentes, Pedro obteria mais do que três somas diferentes. Logo, alguns números são iguais. A soma de dois números iguais é um número par e como apenas 70 é par, então $\frac{70}{2} = 35$ é o único número que se repete.

Por outro lado, as outras duas somas são ímpares e resultam das soma de números diferentes. Portanto, foram escritos apenas três números diferentes: 35, 83 – 35 = 48 e 57 – 35 = 22. Os cinco cartões foram numerados assim: 22, 35, 35, 35, 48. O maior deles é o 48.

23. Um quadrado de área 30 cm^2 é dividido pela metade por uma diagonal e cada uma dessas metades é dividida em triângulos, conforme figura. As áreas de alguns desses triângulos aí estão indicadas. A diagonal está dividida em cinco segmentos de comprimentos a, b, c, d, e. Qual dessas medidas é a maior?



(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

23. Resposta D

A diagonal divide o quadrado em dois triângulos de área $\frac{30}{2}=15\text{ cm}^2$. Logo, as áreas dos triângulos de bases $b+c$ e $c+d$ são, respectivamente, $15-2-9=4\text{cm}^2$ e $15-5-4=6\text{cm}^2$. Os seis triângulos menores têm mesma altura (metade da diagonal do quadrado), logo suas áreas são proporcionais às medidas dos comprimentos de suas bases. Se dividirmos a diagonal do quadrado em 15 pedaços de comprimento p, então temos que $a=2p$, $a+b=5p$, $b+c=4p$, $c+d=6p$, $d+e=9p$ e $e=4p$, ou seja, $a=2p$, $b=5p-a=3p$, $c=4p-b=p$, $d=6p-c=5p$ e $e=9p-d=4p$. Portanto o segmento de maior comprimento tem medida **d**.

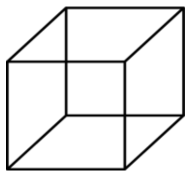
24. Num bando de cangurus, os dois mais leves pesam 25% da soma dos pesos de todos os cangurus do grupo. Os três cangurus mais gordos pesam 60% daquele mesmo total. Quantos cangurus há no grupo?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 15 (E) 20

24. Resposta A

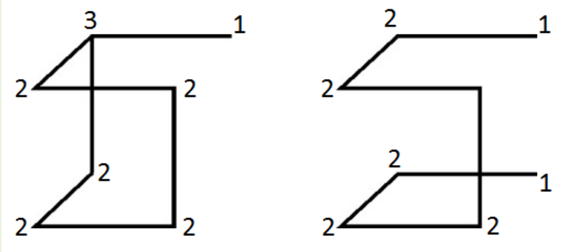
Se os dois cangurus mais leves pesam 25% do total e os três mais gordos pesam 60% do total, resta para os demais cangurus $100\%-25\%-60\%=15\%$ do total. Não pode haver dois cangurus nesse grupo, pois a soma de seus pesos seria menor que a dos dois mais leves. Logo, só pode haver um canguru entre os restantes. Portanto, o número total de cangurus é 2 + 3 + 1 = 6.

25. Ciro tem sete varetas de arame com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 centímetros de comprimento, respectivamente. Dobrando e soldando as pontas de algumas dessas peças, sem sobreposição de arestas, Ciro constrói um cubo de arame, representado ao lado. Pelo menos quantas varetas ele será obrigado a usar?

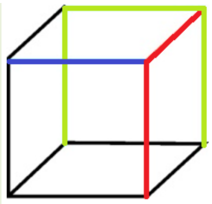


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

25. Resposta D



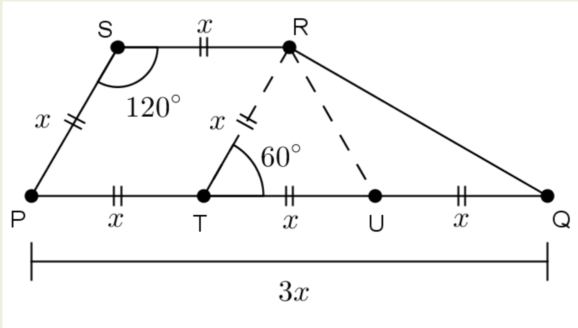
Observe que de cada vértice do cubo saem 3 arestas, enquanto que, ao dobrar um arame, de suas pontas saem 1 ou 3 arestas (3 no caso de a ponta ser soldada numa dobra anterior do arame) e de suas dobras saem 2 arestas. Portanto, não importa quantas vezes o arame é dobrado, apenas das pontas inicial e final é que saem um número ímpar de arestas. Como um cubo tem 8 arestas, são necessários pelo menos $\frac{8}{2}=4$ arames para que de cada vértice saia uma quantidade ímpar de arestas. Podemos construir um exemplo tomando quatro arames de medidas 1, 2, 3 e 6 centímetros. Ao dobrá-las conforme a figura ao lado, obtemos um cubo de 1 cm de lado.



26. No trapézio *PQRS*, os lados *PQ* e *SR* são paralelos. O ângulo $R\hat{S}P$ mede 120^{o} e $RS=SP=\frac{1}{3}PQ$. Qual é a medida do ângulo $P\hat{Q}R$?

(A) 15^{o} (B) $22{,}5^{o}$ (C) 25^{o} (D) 30^{o} (E) 45^{o}

26. Resposta D



Seja *SR* = *SP* = *x*. Então *PQ* = 3*x*.

Traçamos a paralela $\overline{RT}$ a $\overline{SP}$. O quadrilátero *SRTP* é um losango, logo *TP* = *SR* = *x*. Como $\overline{SR}//\overline{TP}$ e $\overline{SP}//\overline{RT}$, temos $m(R\hat{T}U)=m(S\hat{P}T)=180^{o}-m(R\hat{S}P)=180^{o}-120^{o}=60^{o}$.

Traçando a mediana $\overline{RU}$ do ΔRTQ, temos que $TU=UQ=x$ e o ΔRTU é equilátero, logo $RU=x$, $m(R\hat{U}T)=60^{\circ}$ e o triângulo *RUQ* é isósceles, portanto $m\left(P\hat{Q}R\right)=m\left(R\hat{Q}U\right)=\frac{60^{\circ}}{2}=30^{\circ}$.

27. Alexandre marcou cinco pontos distintos numa reta e mediu as distâncias entre todos os pares possíveis de pontos, obtendo os seguintes números, em ordem crescente: 2, 5, 6, 8, 9, *k*, 15, 17, 20 e 22. Qual é o valor de *k*?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

27. Resposta E

Há dois pontos cuja distância é 2 e há dois pontos cuja distância é 5. Esses não podem ser três pontos consecutivos, porque não há distância 7 nem distância 3. Podemos localizar os dois primeiros à esquerda e os outros dois à direita, sendo que a distância entre o primeiro e o último é 22. Há dois pontos cuja distância é 6 e dois pontos cuja distância é 8. Então os dois primeiros e este terceiro são consecutivos: 2, 6 e 8 são suas distâncias. A posição dos pontos é a seguinte:

As distâncias possíveis são 2, 8, 17, 22, 6, 15, 20, 9, 14 e 5. Logo, k = 14.

28. Eliana anotou o número de telefone de sua amiga, mas em vez de anotar sete algarismos, anotou somente seis. Sobre o algarismo esquecido, ela não tem a menor ideia de qual é nem de sua posição no número. Qual é o maior número possível de chamadas que ela poderá dar, até poder falar com sua amiga no telefone?

(A) 55 (B) 60 (C) 64 (D) 70 (E) 80

28. Resposta C

Se Eliana anotou o número ABCDEF e falta um algarismo, este pode ocupar uma das sete posições indicadas a seguir: _A_B_C_D_E_F_. O algarismo que falta pode ser zero. Na posição à esquerda de A, temos 10 possibilidades. À esquerda de B, temos apenas 9 possibilidades. Não é difícil ver isto: quando foram feitas as tentativas com o algarismo à esquerda de A, um desses algarismos era o próprio A: o número era AABCDEF. Na posição à esquerda de B (ou direita de A), o algarismo A também vai aparecer, ou seja, o número AABCDEF aparece novamente. O mesmo ocorre à direita de B, C, D, E, F. Portanto, o número total de chamadas que Eliana pode dar é 10 + 9 x 6 = 64.

29. Maria divide 2015 sucessivamente por todos os inteiros de 1 a 1000 e anota os restos dessas divisões. Qual é o maior desses restos?

(A) 15 (B) 215 (C) 671 (D) 999 (E) 1007

29. Resposta C

Como queremos o maior resto possível, pensamos na divisão pelo maior número, depois pelo seu antecessor, e assim sucessivamente, para verificar o que ocorre:

divisor	quociente	resto
999	2	17
998	2	19
997	2	21
⋮	⋮	⋮

A tabela sugere que o menor número para o qual o quociente é 2 é 672, uma vez que no começo, os restos aumentam de 2 em 2. Neste caso o resto da divisão é $2015-672\cdot 2=2015-1344=671$. Note que, ao dividir por números menores ou iguais a 671, o resto será menor do que 671. Portanto, o maior resto possível é 671.

30. Todo número inteiro positivo pode ser pintado de acordo com as três regras a seguir:

(i) cada número só pode ter uma das duas cores: azul ou vermelho.

(ii) a soma de dois números vermelhos distintos é um número vermelho.

(iii) a soma de dois números azuis distintos é um número azul.

De quantas maneiras diferentes os números podem ser pintados?

(A) nenhuma (B) 2 (C) 4 (D) 6

30. Resposta D

Como 1 + 2 = 3, vamos analisar o que ocorre com os três primeiros números inteiros positivos. As possibilidades são AAA, AAV, AVA, VAA, VVA, VAV, AVV, VVV (A, azul e V, vermelho).

Os casos AAA e VVV são imediatos: se o 1 e o 2 forem de mesma cor, todos os números terão esta cor.

Os casos VVA e AAV também são imediatos: não é possível que isto ocorra.

Resta analisar os casos AVA,VAA, VAV, AVV. A tabela abaixo mostra que estes casos são possíveis:

	1	2	3	4	5	6	7	...
i	A	V	A	A	A	A	A	...
ii	V	A	A	A	A	A	A	...
iii	V	A	V	V	V	V	V	...
iv	A	V	V	V	V	V	V	...

Nos casos i e iii, vemos que os números $1+3=4$, $1+4=5$, $1+5=6$,..., devem ter todos a mesma cor dos números 1 e 3, portanto há apenas uma pintura possível, em que apenas um número é de cor diferente: o 2.

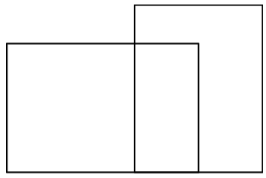
Nos casos ii e iv, vemos que os números 2, 3, $2+3=5$, $2+5=7$, $2+7=9$,..., têm todos a mesma cor, assim como os números 3, 5, $3+5=8$, $3+7=10$, $3+9=12$, etc. Faltam as cores dos números 4 e 6: se forem da mesma cor que 1, os números 1, 4, 6, $1+4=5$, $1+6=7$ têm todos a mesma cor, o que é absurdo. Logo, 4 e 6 têm a mesma cor que 2 e há apenas uma pintura, em que o único número de cor distinta é o 1.

Portanto, há exatamente 6 maneiras de colorir os números.

Canguru Brasil 2014 – Nível C - Soluções

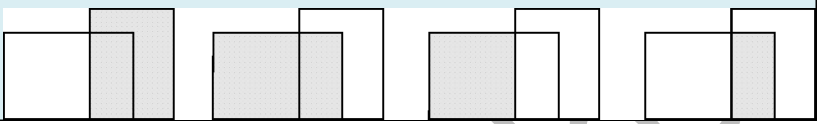
3 pontos

1. Quantos quadriláteros podem ser vistos na figura ao lado?



(A) Nenhum (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5

1. Alternativa D
Podem ser vistos 4 quadriláteros na figura.

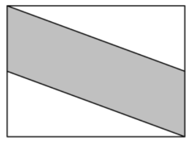


2. Qual é o valor da expressão $2014 \times 2014 \div 2014 - 2014$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2013 (D) 2014 (E) 4028

2. Alternativa A
$2014 \times 2014 \div 2014 - 2014 = 2014 \times 1 - 2014 = 0$.

3. No retângulo *ABCD* de área 10 cm^2, os pontos *M* e *N* são os pontos médios dos lados *AD* e *BC*, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero *MBND*?



(A) 0,5 cm^2 (B) 2,5 cm^2 (C) 5 cm^2 (D) 7,5 cm^2 (E) 10 cm^2

3. Alternativa C
O paralelogramo *MBND* tem a mesma altura e metade da base do paralelogramo *ABCD*. Logo, tem a metade da área deste, ou seja, 5 cm^2.
Solução alternativa: os triângulos retângulos congruentes *CND* e *AMB* têm um cateto igual ao comprimento do retângulo *ABCD* e um cateto igual à metade da largura deste retângulo. Os dois juntos formam um retângulo cuja área é a metade do retângulo *ABCD*. Logo, a área da região cinza é igual a $10 - 5 = 5\,\text{cm}^2$.

4. O produto de dois números é 36 e sua soma é 37. Qual é a diferença entre eles?

(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 26 (E) 35

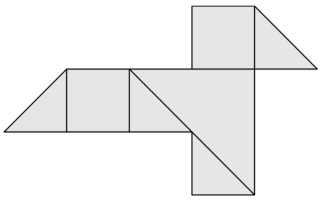
4. Alternativa E
Temos $xy = 36$ e $x + y = 37$. Como $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$, concluímos que
$(x-y)^2 = 37^2 - 4 \cdot 36 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 1225 \Leftrightarrow |x-y| = \sqrt{1225} = 35$. A diferença entre os números é 35.

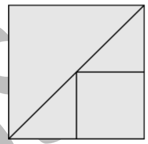
5. A cada ano, o concurso Canguru é realizado na terceira quinta-feira do mês de março. Qual é a possível data mais tardia para o concurso?

(A) 14 de março (B) 15 de março (C) 20 de março (D) 21 de março (E) 22 de março

5. Alternativa D
Para que a terceira quinta-feira de março seja a mais tardia possível, o primeiro dia de março deve ocorrer no dia da semana seguinte, isto é, na sexta-feira. Nesta primeira semana, a quinta-feira ocorrerá no dia 7. A segunda quinta-feira ocorrerá no dia 14 e a terceira quinta-feira, dia do Canguru, ocorrerá no dia 21.

6. Vera tem várias peças quadradas de papel, todas com área 4. Ela corta todas as peças em quadrados e triângulos retângulos, como mostrado na figura à direita. Em seguida, ela monta um "pássaro" com algumas dessas peças, conforme a figura ao lado. Qual é a área desta figura?





(A) 3 (B) 4 (C) 4,5 (D) 5,5 (E) 6

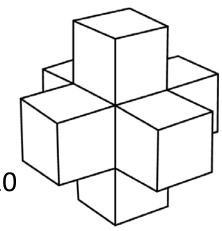
6. Alternativa E
Há três tipos de peças: triângulos de área igual à metade da área da folha, ou seja, 2, triângulos menores de área igual a um oitavo da área da folha, ou seja, 0,5 e quadrados de área igual a um quarto da área da folha, isto é, 1. Logo, o "pássaro" tem área igual a $4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 + 2 = 6$.

7. Uma lata estava com água pela metade. Joana despejou mais dois litros de água na lata, que passou a ter três quartos de sua capacidade contendo água. Qual é a capacidade da lata, em litros?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

7. Alternativa D
O aumento de dois litros corresponde a uma diferença no volume da lata igual a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ da capacidade da lata que é, portanto, igual a $4 \times 2 = 8$ litros.

8. Jorge montou uma peça com sete cubinhos de aresta 1, mostrada ao lado. Quantos cubinhos mais ele terá que adicionar, de modo a obter um cubo de aresta 3?



(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

8. Alternativa E
Um cubo de aresta três é composto de $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubinhos de aresta 1. A peça de Jorge tem 7 cubinhos. Logo, para completar o cubo, Jorge terá que adicionar 27 – 7 = 20 cubinhos.

9. Qual das seguintes multiplicações fornece o maior produto?

(A) 44×777 (B) 55×666 (C) 77×444 (D) 88×333 (E) 99×222

9. Alternativa B

$44 \times 777 = 4 \times 11 \times 7 \times 111 = 28 \times 11 \times 111$; analogamente,

$55 \times 666 = 30 \times 11 \times 111$

$77 \times 444 = 28 \times 11 \times 111$

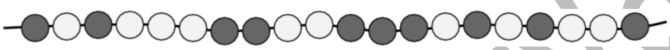
$88 \times 333 = 24 \times 11 \times 111$

$99 \times 222 = 18 \times 11 \times 111$.

O maior produto é dado por 55×666.

4 pontos

10. O colar abaixo tem contas brancas e contas cinza-escuro. Ana quer separar somente cinco dessas contas escuras do colar tirando-as pelas extremidades do fio. Qual é o maior número de contas brancas que ela também poderá tirar?



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

10. Alternativa E

Tirando a primeira preta à direita ela tira também duas brancas. A próxima preta a ser tirada poderá ser da direita ou da esquerda, pois em qualquer ponta sobrará uma branca. A esquerda é preferível, já que depois, ao ser tirada a terceira preta, poderão ser retiradas três brancas. Continuando à esquerda, são retiradas as duas últimas pretas mais duas brancas. Pela direita, somente uma branca seria retirada. Portanto, o maior número de contas brancas que podem ser retiradas é 2 + 1 + 3 + 2 = 8.

11. José tem aula de piano duas vezes por semana e Ana tem aula de piano a cada duas semanas, num curso de iniciação. Nesse curso, José teve 15 aulas mais do que Ana. Quantas semanas o curso de iniciação durou?

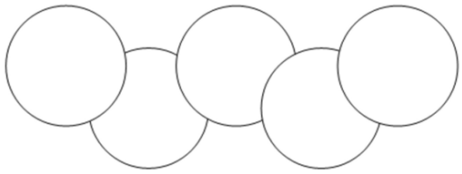
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

11. Alternativa A

Se x é o número de semanas do curso, então José teve $2x$ aulas e Ana, $\frac{x}{2}$ aulas. Logo,

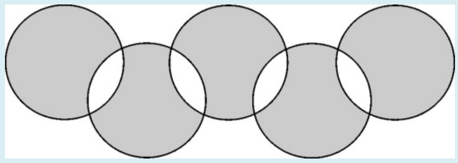
$2x - \frac{x}{2} = 15 \Leftrightarrow 4x - x = 30 \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$. O curso teve duração de 10 semanas.

12. Na figura ao lado, cada círculo tem área de 1 cm². A área comum a cada dois círculos que se sobrepõem é de $\frac{1}{8}$ cm². Qual é a área da região coberta pela figura?



(A) 4 cm² (B) $\frac{9}{2}$ cm² (C) $\frac{35}{8}$ cm² (D) $\frac{39}{8}$ cm² (E) $\frac{19}{4}$ cm²

12. Alternativa B



Há 5 círculos e 4 sobreposições, nas quais a região é coberta duas vezes pelos círculos. Portanto, a área total da região coberta é igual a $5\times1-4\times\frac{1}{8}=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ cm².

13. Neste ano, uma vovó, sua filha e sua neta têm 100 anos como soma de suas idades. A idade de cada uma delas é uma potência de dois. Quantos anos tem a neta?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

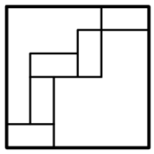
13. Alternativa C

As idades são potências de 2, diferentes. Um valor razoável para a idade da avó é a potência $2^6=64$ e metade disso para a filha, ou seja, 32. Como a soma desses dois valores é 96, resta para a neta a idade de 4 anos. Note que o próximo valor maior para a idade da avó é 128 e o menor é 32, impossíveis. Logo, a neta tem 4 anos.

Solução alternativa:

Todo número inteiro positivo pode ser representado de forma única como soma de potências de dois, distintas, dada pela base binária. Assim, $100_{10}=1100100_2=1000000_2+100000_2+100_2=2^6+2^5+2^2$.

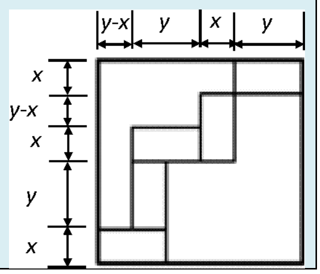
14. Cinco retângulos iguais são colocados dentro de um quadrado de lado 24 cm, conforme ilustrado no desenho. Qual é a área de cada um desses cinco retângulos?



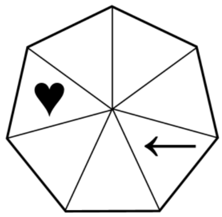
(A) 32 cm² (B) 24 cm² (C) 18 cm² (D) 16 cm² (E) 12 cm²

14. Alternativa A

Os cinco retângulos iguais têm *x* cm de comprimento e *y* cm de largura. Considerando a direção horizontal, temos:
$(y-x)+y+x+y=24 \Leftrightarrow 3y=24 \Leftrightarrow y=8$. Na direção vertical, temos:
$x+(y-x)+x+y+x=24 \Leftrightarrow 2x+2y=24 \Leftrightarrow x+y=12$. Como *y* = 8, temos *x* = 12 – 8 = 4. Logo, a área de cada retângulo é $8\times4=32$ cm².



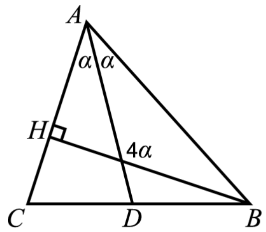
15. O coração e a flecha encontram-se inicialmente na situação indicada na figura ao lado. Eles começam a movimentar-se ao mesmo tempo: a flecha anda três posições no sentido horário e o coração anda quatro posições no sentido anti-horário e então param. Eles continuam a repetir essa mesma rotina muitas vezes. Depois de quantas rotinas o coração e a flecha se encontrarão pela primeira vez dentro de um mesmo triângulo?



(A) nunca (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

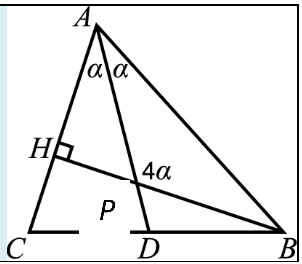
15. Alternativa A
Vamos tomar a posição do coração como referência. Então a posição da flecha é igual à posição do coração menos 3 posições no sentido horário. Podemos simbolizar esta situação por $pf_0 = pc_0 - 3$. Para cada rotina a flecha anda 3 posições no sentido horário e o coração anda 4 posições no sentido oposto. Na *k*-ésima rotina, a flecha terá andado 3*k* posições e o coração terá andado $-4k$ posições (o sinal negativo indica o sentido contrário do movimento do coração) e queremos que ambos fiquem na mesma posição, isto é, $pf_n = pc_n \Leftrightarrow pf_0 + 3k = pc_0 - 4k \Leftrightarrow pc_0 - 3 + 3k = pc_0 - 4k \Leftrightarrow k = \frac{3}{7}$. Como *k* é o número de rotinas, *k* é um inteiro positivo. Logo, é impossível que as duas figuras se encontrem numa mesma posição.

16. No triângulo *ABC* da figura, *BH* é altura relativa ao lado *AC* e *AD* é bissetriz do ângulo de vértice *A*. A medida do ângulo maior entre a altura e a bissetriz é quatro vezes a medida do ângulo *DÂB*, conforme indicado. Qual é a medida do ângulo *CÂB*?



(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75° (E) 90°

16. Alternativa C
O triângulo *AHB* é retângulo em *H*. Portanto, o ângulo $A\hat{P}H$ mede $90^{\circ} - \alpha$.
Logo, $4\alpha + 90^{\circ} - \alpha = 180^{\circ} \Leftrightarrow 3\alpha = 90^{\circ} \Leftrightarrow \alpha = 30^{\circ}$. Assim, $m\left(C\hat{A}B\right) = 2\alpha = 60^{\circ}$.



17. Seis amigas dividem um apartamento com dois banheiros, que elas usam todas as manhãs a partir das 7 horas. Cada banheiro é usado apenas por uma garota de cada vez e os tempos que elas levam usando um banheiro são de 8, 10, 12, 17, 21 e 22 minutos, respectivamente. Se elas quiserem terminar de usar os banheiros o mais rapidamente possível, a que horas isto deve acontecer?

(A) 7h 45min (B) 7h 46min (C) 7h 47min (D) 7h 48min (E) 7h 50min

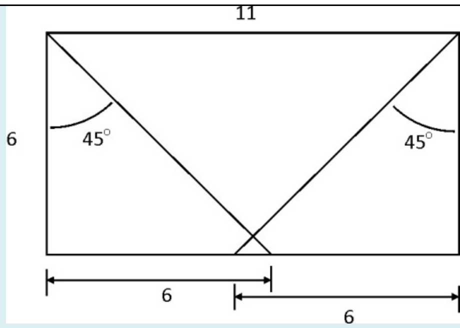
17. Alternativa B
A soma dos tempos utilizados é $8 + 10 + 12 + 17 + 21 + 22 = 90$ minutos. Portanto, um dos banheiros será usado durante pelo menos $90 : 2 = 45$ minutos. Com os números dados, três não podem somar 45, mas podem somar 46, já que $8 + 17 + 21 = 46$. As outras três garotas levarão 10 + 12 + 22 = 44 minutos. Assim, elas terminarão de usar os banheiros em pelo menos 46 minutos, ou seja, às 7h 46min.

18. Um retângulo tem lados de comprimento 6 cm e 11 cm. As bissetrizes dos ângulos com vértices nas extremidades de um dos lados maiores dividem o lado oposto em três segmentos. Quais são as respectivas medidas desses segmentos, em centímetros?

(A) 5,1,5 (B) 2,7,2 (C) 3,5,3 (D) 4,3,4 (E) 1,9,1

18. Alternativa A

Cada bissetriz traçada a partir das extremidades do lado maior superior forma 45° com os lados do retângulo, determinando triângulos retângulos isósceles de catetos 6 cm, conforme figura. O segmento menor determinado sobre o lado inferior tem comprimento *x*, de modo que $6-x+6=11 \Leftrightarrow x=1$. Os dois segmentos maiores têm comprimento $6-x=6-1=5$. Portanto, os comprimentos dos segmentos são, da esquerda para a direita, 5, 1 e 5 cm.



19. O capitão Sparrow e sua turma desenterraram numa ilha um baú com muitas moedas de ouro, que eles dividiram igualmente entre si. Se houvesse quatro piratas menos, cada um ficaria com 10 moedas mais e se houvesse 50 moedas menos, cada um receberia 5 moedas menos. Quantas moedas havia no baú?

(A) 80 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 250

19. Alternativa D

Sendo *x* o número de moedas no baú e *n*, o número de piratas, concluímos que cada pirata recebe $\frac{x}{n}$ moedas. Logo, de acordo com o enunciado,

$$\left|\begin{array}{l}\frac{x}{n-4}=\frac{x}{n}+10\\ \frac{x-50}{n}=\frac{x}{n}-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{x}{n-4}=\frac{x}{n}+10\\ \frac{x-50}{n}-\frac{x}{n}=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{x}{n-4}=\frac{x}{n}+10\\ \frac{-50}{n}=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{x}{10-4}=\frac{x}{10}+10\\ n=10\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6}-\frac{x}{10}=10 \Leftrightarrow \frac{5x-3x}{30}=10 \Leftrightarrow \frac{x}{15}=10 \Leftrightarrow x=150 \text{ moedas.}$$

20. A média aritmética de dois números é 30% menor que um dos números. De quantos por cento esta média é maior do que o outro número?

(A) 20% (B) 25% (C) 30% (D) 70% (E) 75%

20. Alternativa E

Sejam *a* e *b* os números. Sua média aritmética é $\frac{a+b}{2}$. Podemos afirmar que $\frac{a+b}{2}<a-30\%a=0,7a$.

Logo,

$$\frac{a+b}{2}<0,7a \Leftrightarrow a+b<1,4a \Leftrightarrow 1,4a-a>b \Leftrightarrow 0,4a>b \Leftrightarrow a>\frac{b}{0,4} \Leftrightarrow$$

$$a+b>\frac{b}{0,4}+b=\frac{1,4b}{0,4} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}>\frac{1,4b}{0,8}=1,75b=b+75\%b$$

Ou seja, a média aritmética é maior do que 75% do outro número.

5 pontos

21. Nice escreveu os números de 1 a 9 nas casas de um tabuleiro 3×3, sendo que quatro deles estão mostrados na figura. Dois números são vizinhos quando suas casas têm um lado comum. Nice notou que, para o número 9, a soma dos números vizinhos é 15. Qual é a soma dos números vizinhos ao número 8?

1		3
2		4

(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 26 (E) 27

21. Alternativa E
O número 9 não está no centro, pois neste caso a soma de seus vizinhos seria $5+6+7+8>15$. Então tem que estar em uma das outras casas restantes. Vemos então que 9 só pode ser escrito na segunda linha e terceira coluna, conforme desenho. Portanto, o número 8 deverá estar no centro e seus vizinhos serão os números 9, 7, 6 e 5, cuja soma é 27.

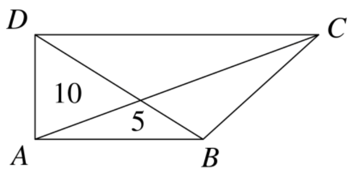
1		3
	8	9
2		4

22. Uma balança antiga está defeituosa. Se quisermos pesar um objeto com menos de 1000 g, a balança funcionará perfeitamente. Caso contrário, a balança irá informar que seu peso é um número qualquer acima de 1000. Temos 5 objetos com massas respectivas *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, menores do que 1000 g. Quando pesados em pares, a balança mostra os resultados: $B+D=1200$, $C+E=2100$, $B+E=800$, $B+C=900$ e $A+E=700$. Qual dos objetos é o mais pesado?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

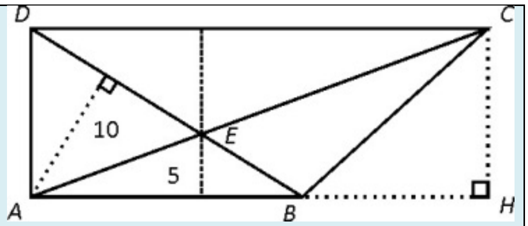
22. Alternativa D
Sendo $A+E=700$ e $B+E=800$ temos $B>A$ (1).
Sendo $B+E=800$ e $B+C=900$, concluímos que $C>E$ (2).
Temos, também, $B+D=1200 \Rightarrow B+D \geq 1000$ logo $B+D>B+C \Leftrightarrow D>C$ (3).
Como $C+E=2100 \Rightarrow C+E \geq 1000$ temos $C+E>B+E \Leftrightarrow C>B$ (4).
As desigualdades (1), (2), (3) e (4) nos levam à conclusão de que o objeto mais pesado é o *D*.

23. Na figura, o quadrilátero *ABCD* tem ângulos retos apenas nos vértices *A* e *D*. Os números indicam a área do triângulo em que se encontram. Qual é a área do quadrilátero *ABCD*?



(A) 30 (B) 35 (C) 40 (D) 45 (E) 60

23. Alternativa D



Como os triângulos *ADE* e *AEB* têm a mesma altura relativa às suas bases *DE* e *EB*, concluímos que a razão entre essas bases é igual à razão entre as áreas, ou seja, $\frac{DE}{EB}=\frac{10}{5}=\frac{1}{2}$.
De forma análoga, isto ocorre com as áreas dos triângulos *CDE* e *CBE*. Assim, se *X* é a área do triângulo *CBE*, então 2*X* é a área do triângulo *CDE*. Portanto, a área do trapézio *ABCD* é igual a $5+10+X+2X=3X+15$. Por outro lado, a área do triângulo retângulo *ACD* é igual a $\frac{CD \cdot AD}{2}=10+2X$ e a área do triângulo *ABC* é igual a $\frac{AB \cdot CH}{2}=\frac{AB \cdot AD}{2}=15$. A soma das áreas desses dois triângulos é a área do trapézio, logo $3X+15=10+2x+15 \Leftrightarrow X=10$. Portanto, a área do trapézio é igual a $3 \cdot 10+15=45$.

24. Laís e Hélio fazem uma competição de resolução de problemas. Cada um deles tem a mesma lista de 100 problemas para resolver. Para um mesmo problema, o primeiro a resolver ganha quatro pontos e o segundo ganha um ponto. Laís resolveu 60 problemas e Hélio também resolveu 60 problemas. A pontuação dos dois juntos foi de 312 pontos. Quantos problemas iguais eles resolveram?

(A) 53 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

24. Alternativa D
Seja *x* o número de problemas que Laís resolveu antes e *y*, o número de problemas que Hélio resolveu antes. Temos $4\cdot x+1\cdot(60-x)+4\cdot y+1\cdot(60-y)=312 \Leftrightarrow 3x+3y=192 \Leftrightarrow x+y=64$. Como esses problemas valem 4 pontos cada um, totalizam $4\times 64=256$,restando 56 pontos. Esses pontos correspondem a problemas de 1 ponto cada, ou seja, problemas que já foram resolvidos por um dos dois. Logo, 56 problemas foram resolvidos pelos dois.

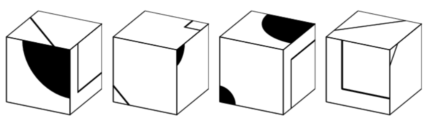
25. Davi anda de bicicleta da escola para sua casa. Ele pretendia chegar às 15 horas, mas levou $\frac{2}{3}$ do tempo previsto para percorrer toda a distância andando $\frac{3}{4}$ da mesma. Então ele diminuiu a velocidade, de modo a chegar no horário previsto. Qual é a razão entre a velocidade na primeira parte do percurso e a velocidade na segunda parte, admitindo que elas sejam constantes nessas duas partes?

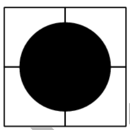
(A) 5:4 (B) 4:3 (C) 3:2 (D) 2:1 (E) 3:1

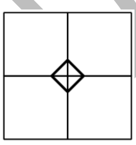
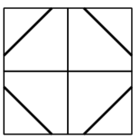
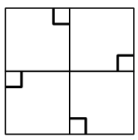
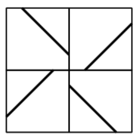
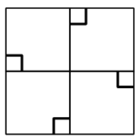
25. Alternativa C
Se *t* é o tempo previsto por Davi, v_1 e v_2 as velocidades inicial e final, respectivamente e *d*, a distância total, temos:

$$\left|\begin{array}{l} v_1\cdot\frac{2}{3}t=\frac{3}{4}d \\ v_2\cdot\frac{1}{3}t=\frac{1}{4}d \end{array}\right. \Rightarrow \frac{v_1\cdot\frac{2}{3}t}{v_2\cdot\frac{1}{3}t}=\frac{\frac{3}{4}d}{\frac{1}{4}d} \Leftrightarrow \frac{2v_1}{v_2}=3 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}.$$

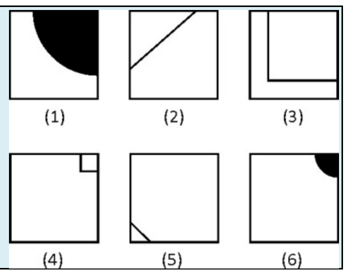
26. Júlia tem quatro cubos iguais, mostrados na figura ao lado. Com esses cubos, ela montou um bloco, visto de frente na figura à esquerda. Qual das figuras a seguir representa a vista da face oposta deste bloco?





(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

26. Alternativa A
A partir da primeira vista, concluímos que a face (1) é vizinha às faces (2) e (3). A partir da última vista, concluímos que as faces (2) e (3) são vizinhas à face (5). Logo, a face (1) é oposta à face (5). Ao juntar os cubos de modo a formar um bloco com o desenho de um grande círculo na frente, atrás será formada uma figura com quatro pequenos segmentos. A única alternativa com esta opção é a (A).



27. Numa nave espacial há alienígenas de três espécies: arcs, ercs e ircs. Cada arc sempre diz a verdade, cada erc sempre mente e cada irc alterna entre dizer a verdade e mentir. Ao chegar à Terra, 17 responderam *sim* à pergunta ``Você é um arc?´´, 8 responderam *sim* à pergunta ''Você é um erc?'' e 12 responderam *sim* à pergunta''Você é um irc?''. Quantos arcs havia na nave?

(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

27. Alternativa B

Os arcs só dizem a verdade, os ercs só mentem e os ircs, quando primeiro dizem a verdade, em seguida mentem e depois dizem a verdade ou, então, primeiro mentem, depois dizem a verdade e, em seguida, mentem. Entre os que disseram *sim* à pergunta P1, somente os arcs não responderam *sim* à pergunta P3. Logo, o número de arcs é 17 – 12 = 5. Note que a informação sobre a pergunta P2 é desnecessária.

	P1	P2	P3
arc	sim	não	não
erc	sim	não	sim
irc	sim	não	sim
irc	não	sim	não
	17	8	12

28. Dentre vários inteiros positivos e distintos, exatamente dois são divisíveis por 2 e exatamente 13 são divisíveis por 13. Sendo *M* o maior desses números, qual é o menor valor possível de *M*?

(A) 169 (B) 260 (C) 273 (D) 299 (E) 325

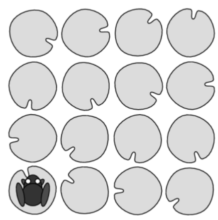
28. Resposta: alternativa C

Os treze primeiros números inteiros positivos divisíveis por 13 são 13, 26, 39, 52,..., 156,169, dos quais seis são pares: 26, 52,..., 156. Devemos eliminar quatro desses números, sobrando apenas dois pares. Os números substitutos devem ser ímpares e divisíveis por treze e os menores possíveis, a saber: 195, 221,247 e 273. Portanto, o maior número desta lista é 273.

Solução alternativa

Um número positivo divisível por 13 pode ser da forma 26*k* ou $26k-13$,com $k>0$. Como há no máximo dois números pares nesse conjunto, deduzimos que há pelo menos 11 números da forma $26k-13$, já que os números da forma 26*k* são sempre pares. Logo, o maior elemento desse conjunto é o número $26\cdot 11-13=273$. Satisfazendo as condições apresentadas, um possível conjunto é $\{13,26,39,52,65,91,117,143,169,195,221,247,273\}$.

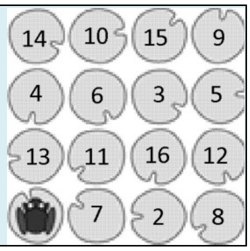
29. Numa lagoa há 16 folhas de lírio aquático, dispostas como na figura. Um sapo está na folha indicada. Ele pula de uma folha para outra horizontalmente ou verticalmente apenas. Ele nunca pula para a folha vizinha e nunca volta para a mesma folha. Qual é maior número de folhas, incluindo a de partida, que o sapo pode alcançar?



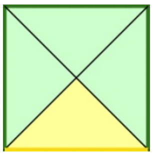
(A) 8 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 16

29. Resposta: alternativa E

O diagrama ao lado mostra um possível percurso do sapo, mostrando que ele pode alcançar as 16 folhas: ele pula de 1 para 2, depois para 3, para 4, etc.

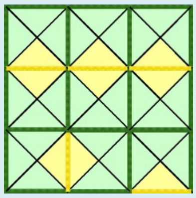


30. Um quadrado 5×5 é coberto com ladrilhos 1×1 iguais ao da figura, de forma que dois ladrilhos adjacentes têm a mesma cor ao longo do lado comum. O contorno do quadrado maior será formado por segmentos claros e escuros. Qual é o menor número possível de segmentos escuros nesse contorno?



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

30. Resposta: alternativa B



Devemos começar a preencher o quadrado 3 x 3 no interior do quadrado, porque isso afeta o preenchimento das bordas do quadrado 5 x 5. Devemos deixar na borda do quadrado 3 x 3 o menor número possível de segmentos claros, pois eles deverão combinar com os segmentos claros da borda do quadrado maior. Esse mínimo é um, conforme figura à direita, pois não é possível que todos os segmentos das bordas do quadrado 3 x 3 sejam escuros. Isto ocorre porque todo contato entre dois segmentos claros envolve dois quadradinhos e o quadrado 3 x 3 é formado por um número ímpar de quadradinhos (são nove quadradinhos).

Em cada canto do quadrado 5 x 5 forçosamente sobrará um lado de cor escura e deverá sobrar mais um exatamente porque o quadrado 3 x 3 interno foi preenchido da maneira ilustrada. Teremos então um possível preenchimento com o menor número de segmentos escuros na borda, a saber, 5.