impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

PAPMEM **Jan/2019**

Uso de Planilhas no Ensino Médio **EXERCÍCIOS** **Professor: Carlos Nehab**

Exercício 01

Planilhas são ferramentas extremamente naturais para a análise de situações nas quais ocorra *recorrência*!

Assim, considere a famosa sequência de *Fibonacci*, onde os dois primeiros termos valem 1, e cada termo subsequente é a soma dos dois anteriores (portanto, temos aí, uma recorrência). Assim, obtemos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

Podemos gerar seus termos em uma planilha, de forma simples, possibilitando que sejam *descobertas*, por inspeção, diversas de suas interessantes propriedades.

Questão 1

Crie uma planilha com o aspecto indicado, onde a coluna **A** deve conter a ordem do número de *Fibonacci* da coluna **B**. Gere a planilha até a vigésima sexta linha: a célula **B26** deverá conter, então, o 25º número de Fibonacci (pois usamos a linha 1 para cabeçalhos).

	A	B	C	D	E	F	G
1	k	F_k	$\sum F_k$	F_k^2	$F_{k-1} \times F_{k+1}$	F_k/F_{k-1}	$\sum F_k^2$
2	1	1	1	1	-	-	1
3	2	1	2	1	2	1	2
4	3	2	4	4	3	2	6
5	4	3	7	9	10	1,5	15
6	5	5	...	...	...	...	...
7	6	8					
8	7	13					
9	8	21					
...							
26	25	75.025					

As demais colunas, de **C** até **F**, deverão conter as seguintes informações:

Coluna C: a soma dos *números* de *Fibonacci*...
Coluna D: o quadrado de cada número de *Fibonacci*...
Coluna E: o produto do número de *Fibonacci anterior* pelo *seguinte*...
Coluna F: a razão entre cada número de *Fibonacci* e o anterior...
Coluna G: a soma dos quadrados dos números de *Fibonacci*...

Questão 2

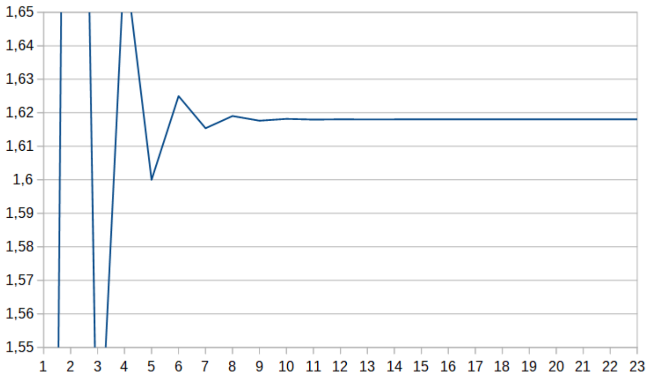
Se você conseguiu perceber uma relação entre os pares de colunas indicadas, tente descrever o que descobriu...

a. B e C. b. D e E. c. B e G.

Questão 3

a. Crie um gráfico de linha ou XY, com o aspecto semelhante ao da figura a seguir.
Selecione o eixo Y, em SEU gráfico, e limite a escala (de Y) para valores entre 1,55 e 1,65, como indicado.

O objetivo é mostrar, visualmente, que os valores contidos na coluna F parecem se aproximar indefinidamente de algum valor. E com uma curiosidade: oscilando (analise bem a coluna F).



Algumas considerações...

Você já deve ter ouvido falar desse misterioso número, que aparentemente surgiu de forma mágica, a partir da razão entre dois termos consecutivos da sequência de *Fibonacci*...

Sim, é o igualmente famoso *número de ouro* (ou *razão áurea*), representado na literatura pela letra grega phi (ϕ), e cujo valor é dado por

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}618034$$

E esse número, diabólico, ocorre em *zilhões* de situações, na matemática e na natureza. E, naturalmente, há milhares de páginas na *web* sobre o tema. Mas se você ainda não se dedicou a ele, sugiro que comece devagarinho, pela Wikipédia...
https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea.

E depois, dê uma olhadinha no "site" feioso e antigo, mas muito completo e acessível, do professor *Ron Knott*:

http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Embora em inglês, hoje o *Google* traduz qualquer coisa: clique com o botão direito sobre a tela do seu navegador e lá está a opção... "Traduzir para o Português"...

Exercício 02

O matemático indiano *Dattathreya Ramachandra Kaprekar* (1905 – 1986) criou, em 1949, uma curiosa operação sobre números de quatro algarismos [1]:

- Dado um número N, de 4 algarismos (não todos iguais), considere os números formados com os mesmos algarismos, mas com eles dispostos em ordem crescente e em ordem decrescente (terão sido criados, então, o maior número e o menor número com os mesmos algarismos de N);
- Calcule a diferença entre o maior e o menor dentre esses números;
- Repita sucessivamente essa operação sobre as diferenças obtidas a cada passo.

Kaprekar observou, surpreso, que no máximo em sete passos é obtido o número 4176. Analise os dois exemplos que se seguem.

Note que, no Exemplo 01, o número inicial é 5003 e, após três passos, obtém-se 4176. No Exemplo 02, o número inicial vale 5001 e 4176 surge no sétimo passo.

Ex 01	Maior	Menor	Dif
5003	5300	0035	5265
5265	6552	2556	3996
3996	9963	3699	6264
6264	6642	2466	**4176**

Ex 02	Maior	Menor	Dif
5001	5100	0015	5085
5085	8550	0558	7992
7992	9972	2799	7173
7173	7731	1377	6354
6354	6543	3456	3087
3087	8730	0378	8352
8352	8532	2358	6174
6174	7641	1467	**4176**

Questão 1.

a. Aplicando o procedimento de *Kaprekar*, sucessivamente, a partir de um número inicial (como nos exemplos anteriores), justifique porque, necessariamente, em algum momento, ocorrerá um número já obtido em passo anterior.

Dica: aula do *prof. Paulo Cezar Carvalho* (PAPMEM), em janeiro de 2017...

b. Prove que o resultado da operação de *Kaprekar* sobre qualquer número (independente da quantidade de algarismos) é necessariamente um múltiplo de 9.

c. À luz exclusivamente do item anterior, podemos garantir que alguma repetição ocorrerá antes do milésimo passo? Você consegue melhorar essa possível estimativa?

Questão 2. Considere uma planilha onde digitamos na célula **A1,** por exemplo, o título *Kaprekar* e, na célula A2, qualquer número de 4 algarismos (não todos iguais).

Crie fórmulas adequadas nas células A3 a A9 para obter os resultados da operação de *Kaprekar* sobre o número anterior. Veja o exemplo:

	A
1	***Kaprekar***
2	5001
3	
...	
9	

➔

	A
1	***Kaprekar***
2	5001
3	5265
...	
9	4176

Dica: Utilize colunas auxiliares para a obtenção, em cada linha, dos algarismos de milhar, centena, dezena e unidade de cada número da coluna A.

Funções úteis: *Truncar(valor1; valor2)* e *Mod(valor1; valor2)*.

Exercício 03

Crie uma planilha onde, digitando a data de nascimento de um gajo, na célula B1, seja exibida, em B2, a idade atual em anos, do referido gajo... Justifique sua solução.

Funções úteis: *Hoje()*, *Ano(data)*, *Mês(data)*, *Dia(data)* e *Data(Ano; Mês; Dia)*.

[1] Suponha que 0038, por exemplo, seja entendido como um número de 4 algarismos.