Lista 3
Funções Contínuas

Victor Saliba *
Thales Domingues †
André Salles de Carvalho ‡

Data de Entrega: 6 de Novembro de 2022

Se fosse preciso escolher uma definição que é vista em Matemática I para guardar com carinho ao longo da vida acadêmica, essa seria a de função contínua. Essa lista aborda esse conceito de uma forma particular. Muitas vezes, vemos a definição de continuidade após a definição de limite, e tudo fica muito claro graficamente. Entretanto, a verdade é que o conceito de limite é bem mais geral, e por conta disso, a sua definição pode se tornar mais complicada que a de função contínua. Por isso, a fim construir uma intuição via ε's e δ's, começamos pelo conceito de continuidade e, após isso, partimos para o conceito (também essencial) de limite. Finalmente, é abordado o importantíssimo Teorema do Valor Intermediário e as suas aplicações, e o conceito (muitas vezes confuso) de continuidade uniforme. Para facilitar a identificação de uma função uniformemente contínua (e aguçar a intuição por trás desse conceito), recomendo fortemente a leitura do apêndice do capítulo 8 do já citado livro *Calculus*, de Michael Spivak.

*E-mail: victorsaliba13@usp.br; WhatsApp: (12) 99145-9087.
†E-mail: thalesdaviddom@usp.br.
‡E-mail: andre@ime.usp.br.

Instruções:

1. Essa lista está dividida em quatro grupos de exercícios, numerados de I a IV.
2. Não é necessário resolver todos os exercícios! Tente resolver aqueles que você achar mais interessantes. Se você não possui preferência, ou não achou nenhum aparentemente divertido, tente resolver os exercícios recomendados primeiro. Esses exercícios estão indicados na nota de rodapé de cada seção.
3. Escolha dois exercícios de cada grupo para entregar **ou** entregue "apenas" os exercícios 19 e 23. A nota dessa lista será a soma das notas obtidas em cada questão, sendo 10 pontos a nota máxima. Para cada uma das duas formas de entrega, sendo n a quantidade total de questões a serem entregues, a nota máxima de cada questão será $10/n$.
4. Envie a sua resolução para o e-mail victorsaliba13@usp.br com o assunto "Resolução da Lista 3 de Matemática I".
5. Serão concedidos até 2 pontos extras se: (1) a resolução da lista for feita em LaTeX; ou (2) qualquer trabalho extra foi realizado: exemplos ou contraexemplos que validem o resultado demonstrado, alguma resolução elegante, uma quantidade maior de questões entregues além daquela requisitada, etc.
6. Os exercícios não estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Todavia, serão concedidos três símbolos distintos para os exercícios "interessantes": δ para os exercícios particularmente difíceis (que geralmente precisam de algum truque não tão óbvio para serem resolvidos), π para os problemas difíceis (que requerem tanto um truque, quanto um cuidado maior na resolução) e † para aqueles…
7. Não desanime se não conseguir resolver alguns exercícios ou cometeu algum erro na resolução, erros fazem parte do processo de aprendizado e quanto mais tempo gastar tentando solucionar um exercício, mais você irá aprender com ele.
8. Se houver dúvidas, sugestões ou quiser alguma (outra) dica, basta nos contactar.
9. A colaboração é não apenas permitida, mas encorajada. Caso tenha precisado de ajuda, por favor, dê o devido crédito, mencionando nomes.
10. Por último, mas definitivamente o mais importante, divirta-se!

Exercícios:

Grupo I[1]

Exercício 1. Dê um significado preciso para a seguinte afirmação:

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *não é contínua no ponto* $c \in [a, b]$.

Exercício 2. Dê um exemplo de uma função f que seja contínua em nenhum ponto, mas $|f|$ é contínua em todos os pontos. Justifique!

Exercício 3. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in [a, b]$. Prove que f é contínua.

Exercício 4 (π). Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $f(a) \neq g(a)$ para algum a, prove que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq g(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in (a-\delta, a+\delta)$.

Exercício 5 (δ). Seja c um ponto do intervalo $[a, b]$. Prove que se f é integrável em $[a, b]$, contínua em c e $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, então $f(c) = 0$.

Exercício 6 (δ). Resolva os itens a seguir, preferencialmente na ordem em que são apresentados:

(a) Prove que $A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

(b) Prove que se f é uma função contínua definida em $\mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ para todo $x \in A$, então $f(x) = 0$ para todo x.

(c) Prove que se f e g são funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, então $f(x) = g(x)$ para todo x.

Exercício 7. Considere os itens abaixo:

(a) Prove que se f é contínua em $[a, b]$, então existe uma função g contínua em $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) Dê um exemplo que mostre que essa afirmação é falsa se $[a, b]$ é substituído por (a, b).

[1] Exercícios recomendados: 1, 6 e 7.

Grupo II[2]

Exercício 8 (δ). Dê um significado preciso para a seguinte afirmação:

$$\textit{Não existe o limite } \lim_{x\to a} f(x).$$

(Há um pequeno detalhe aqui...)

Exercício 9. Seja $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Prove que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Conclua que não se pode definir f em 0 de modo que f seja contínua.

Exercício 10 (π). Dê exemplos para mostrar que as seguintes definições de

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

não estão corretas:

(a) Para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|f(x) - l| < \varepsilon$, então $0 < |x-a| < \delta$.

Exercício 11. Suponha que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$. Prove que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = a$.

Exercício 12. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1}$.

(b) $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^n - 2}{x-1}$.

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$. (Argumente com cuidado!)

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor$.

Exercício 13. Suponha que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = m$, $g(a) \neq 0$ e calcule:

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(b) $\lim_{x\to a} (f(x) - f(a))$.

(c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$.

(d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)/g(x)-f(a)/g(a)}{x-a}$.

Exercício 14 (δ). Prove que:

(a) Se f é contínua no ponto l e $\lim_{x\to a} g(x) = l$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(l)$.

(b) Se não assumirmos que f é contínua em l, então nem sempre é verdade que $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.

[2] Exercícios recomendados: 8, 12, 13 e 14.

Grupo III[3]

Exercício 15. Suponha que f é contínua em $[a, b]$ e que $f(x)$ é sempre racional. O que pode-se concluir a respeito de f?

Exercício 16 (δ)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que existe pelo menos um ponto $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$ no caso em que:

(a) $f(a) = b$ e $f(b) = a$ para algum par de pontos distintos a, b.

(b) O gráfico de $f|_{[0,1]}$ está contido no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

(c) Existem reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distintos ($n \geq 2$) tais que $f(a_k) = a_{k+1}$, se $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $f(a_n) = a_1$.

Exercício 17. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$.

(a) f é contínua?

(b) Mostre que f satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Intermediário.

Exercício 18 (†)**.** Seja S um aro de metal de raio $R > 0$ e $f_t : S \to \mathbb{R}$ a função que nos fornece a temperatura de cada ponto $p \in S$ num instante t fixado. Por ser uma função que fornece a temperatura de um objeto físico, f_t é contínua. Prove, então, que existe um par de pontos antípodas que possuem a mesma temperatura.

Exercício 19 (†)**.** Sejam n um número natural e $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ integrável. Prove que existe uma partição $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$ de $[a, b]$ tal que, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x)dx.$$

[3] Exercícios recomendados: 16 e 17.

Grupo IV[4]

Exercício 20. Dê um significado preciso para a seguinte afirmação:

A função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ não é uniformemente contínua.

Exercício 21 (δ). Encontre uma:

(a) Função que seja contínua e limitada em $(0,1]$, mas que não seja uniformemente contínua em $(0,1]$. (Sugestão: Pense em uma função trigonométrica que já deu as caras nessa lista.)

(b) Função que seja contínua e limitada em $[0,+\infty)$, mas que não seja uniformemente contínua em $[0,+\infty)$. (Sugestão: Pense, mais uma vez, numa função trigonométrica.)

(c) Justificativa de que as suas escolhas passam em todos os requisitos.

Exercício 22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para alguma constante $L > 0$, tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que:

(a) f é uniformemente contínua.

(b) Se $L < 1$, então existe no máximo um ponto $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Exercício 23 (†). Seja $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f é uniformemente contínua em $(a,b]$ se, e somente se, existe $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$. (Uma das implicações é simples. A outra é hostil. Uma sugestão? Utilizar o exercício 8 talvez seja uma boa ideia.)

Exercício 24. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas e λ um número real. Decida se as afirmações a seguir são falsas ou verdadeiras, para as que forem falsas apresente um contra-exemplo para mostrar isso, para as verdadeiras faça as respectivas demonstrações.

(i) $\psi = f + \lambda g$ é uniformemente contínua.

(ii) $\varphi = f \cdot g$ é uniformemente contínua.

(iii) $\omega = f \circ g$ é uniformemente contínua.

[4] Exercícios recomendados: 20, 21 e 24.