PSI-3214 — Laboratório de Instrumentação Elétrica

Introdução à Análise de Fourier

— Sinais Periódicos —

Vítor H. Nascimento

1 Introdução

Sinais periódicos (ou aproximadamente periódicos) aparecem em diversas situações em engenharia — por exemplo, a tensão na rede elétrica, a variação de pressão sonora em uma nota musical ou uma vogal, o sinal de *clock* de um computador, a portadora de um sinal de transmissão AM ou FM, etc. Matematicamente, um sinal $s(t)$ é periódico se existir uma constante T tal que

$$s(t + kT) = s(t), \text{ para qualquer instante } t. \tag{1}$$

Logicamente, na prática essa condição nunca é verdade — os sinais observados na natureza são sempre finitos. No entanto, em diversas condições, como nos exemplos listados acima, a condição (1) é aproximadamente válida em um intervalo grande o suficiente de tempo para ser útil. Por exemplo, músicas ou sinais de voz não são periódicos, no entanto, em trechos curtos, como os mostrados na Figura 1, sinais de música ou de voz podem apresentar periodicidade.

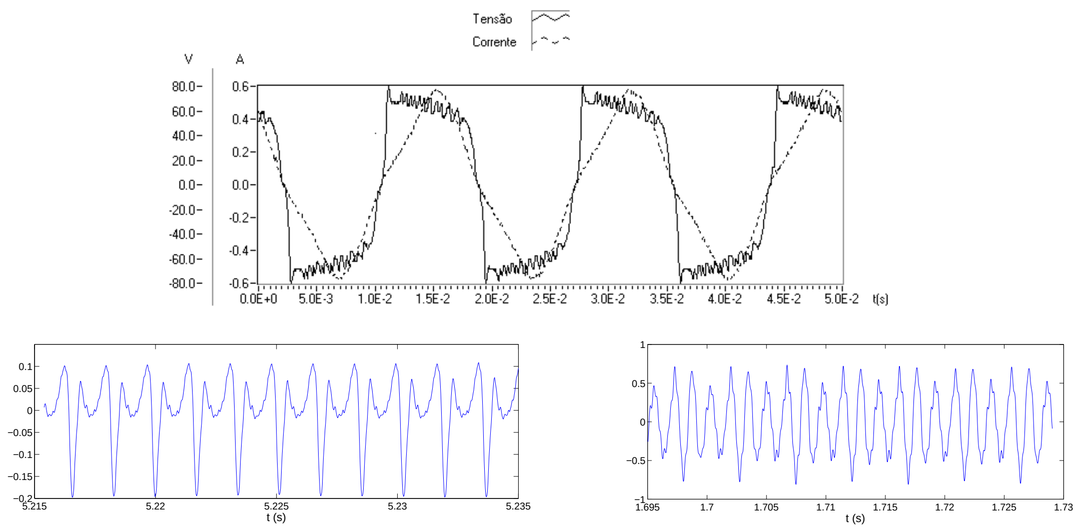

Figura 1: Exemplos de sinais periódicos: Acima: sinais de tensão e corrente em uma lâmpada fluorescente. Abaixo, à esquerda: nota "mi" tocada em um clarinete. Abaixo, à direita: trecho de voz (vogal "O").

Como sinais periódicos (ou periódicos por trechos) são comuns na natureza, é importante buscar maneiras simples de tratar matematicamente sinais periódicos quaisquer. Por exemplo, a rotação de um objeto ao redor de um ponto pode ser expressada (em coordenadas cartesianas) através de senos e co-senos (ver Figura 2). Considerando que o objeto gira a uma distância A do centro, e que o ângulo inicial em $t = 0$ vale θ, as coordenadas do objeto em função do tempo são

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta), \qquad y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta). \tag{2}$$

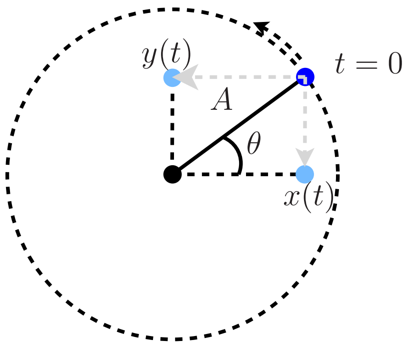

Figura 2: Seno e co-seno como projeções nos eixos x e y da posição de um objeto em movimento circular. Se a velocidade do objeto é constante, e o objeto faz uma revolução a cada T segundos, vale $x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right)$. Note que $\omega_0 = 2\pi/T$.

Seria conveniente ter expressões matemáticas simples também para outros tipos de sinais periódicos, como os mostrados na Figura 1. Para ver como isso pode ser feito, pense primeiro em um sinal senoidal com período T e frequência angular $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$c_1(t) = \cos(\omega_0 t).$$

Considere agora um sinal senoidal com o dobro da frequência:

$$c_2(t) = \cos(2\omega_0 t).$$

O período de $c_2(t)$ é claramente $T/2$. No entanto, qual é o período de um sinal

$$s(t) = c_1(t) + c_2(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t)?$$

O período de $s(t)$ continua sendo T, pois $\cos(2\omega_0(t+T)) = \cos(2\omega_0 t + 2\omega_0 T) = \cos(2\omega_0 t + 4\pi) = \cos(2\omega_0 t)$ — veja a Figura 3.

Essa conservação do período vale para qualquer soma de senóides *harmônicas*, isto é, com frequências múltiplas de uma frequência *fundamental*. Quer dizer, o período de

$$s(t) = a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + a_3\cos(3\omega_0 t) + \ldots$$

é sempre igual a T, quaisquer que sejam os valores das constantes $a_1, a_2, a_3, \ldots$

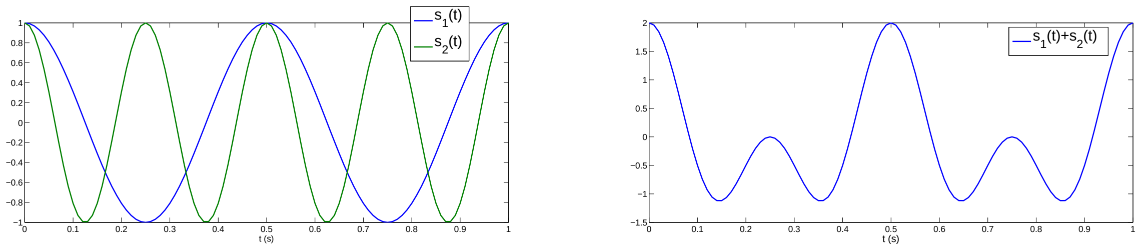

Figura 3: Senóides harmônicas. À esquerda, sinais $c_1(t)$ e $c_2(t)$. À direita, sinal $c_1(t) + c_2(t)$. Note que o período da soma é igual ao período de $c_1(t)$.

Na verdade, o resultado é mais genérico. Um sinal $\text{sen}(\omega_0 t)$ tem o mesmo período de um sinal $\cos(\omega_0 t)$, e a soma

$$s(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \,\text{sen}(\omega_0 t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$$

é também um sinal senoidal com período T[1]. Isso significa que qualquer sinal da forma

$$s(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \,\text{sen}(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \,\text{sen}(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots \quad (3)$$

é também periódico com período T, quaisquer que sejam os valores das constantes $a_0, a_1, a_2, \dots$ e $b_1, b_2, \dots$ (note que o nível DC a_0 não altera o fato dos sinais serem periódicos).

Com somas de senóides desse tipo podemos construir vários sinais periódicos diferentes, sempre mantendo o período igual a T. Por exemplo, escolhendo $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$, $b_3 = -0{,}3$ (e todos os outros coeficientes iguais a zero) obtemos o sinal da Figura 4.

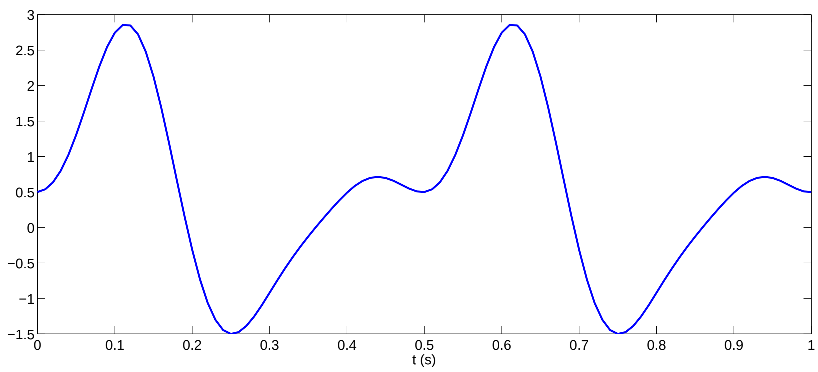

Figura 4: Exemplo: $s(t)$ obtido a partir de (3) usando $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$, $b_3 = -0{,}3$ e todos os outros coeficientes iguais a zero.

Fica a curiosidade sobre que tipo de sinal periódico pode ser representado por uma expressão como a (3). O resultado importante é que

[1]Os valores de A_1 e θ_1 podem ser calculados usando fasores, lembrando que $\text{sen}(t) = \cos(t - \pi/2)$. Vamos voltar a isso mais à frente na Seção 4.1.

Qualquer sinal periódico contínuo pode ser representado por uma soma da forma (3). Definindo as funções

$$c_0(t) \triangleq 1 \text{ (constante)},\ c_k(t) \triangleq \cos(k\omega_0 t),\ s_k(t) \triangleq \operatorname{sen}(k\omega_0 t),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

isso quer dizer que para qualquer função $s(t)$ contínua e periódica com período T, existem valores a_k, $k \geq 0$ e b_k, $k \geq 1$, tais que

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 c_0(t) + a_1 c_1(t) + b_1 s_1(t) + a_2 c_2(t) + b_2 s_2(t) + \ldots && (4) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t). && (5) \end{aligned}$$

A equação (5) é a *expansão* da função $s(t)$ em uma *série de Fourier*.

Mesmo funções com descontinuidades também podem ser representadas, sob certas condições. Esse assunto será visto com mais detalhes nos cursos de Cálculo IV e Sistemas e Sinais.

Exercício 1. Expanda o programa do desafio da experiência 2 (LabVIEW) para gerar somas de senóides considerando k de 1 até 9. Use controles deslizantes para poder variar os valores dos a_k e b_k para diferentes valores.

2 Cálculo dos Coeficientes da Série de Fourier

Bom, agora que sabemos que qualquer função periódica de interesse prático pode ser representada por uma soma de senos e co-senos, a próxima pergunta é: dada uma certa função $s(t)$, como os sinais da Figura 1 por exemplo, como achar os coeficientes a_k e b_k?

A resposta vem da seguinte observação: quanto vale

$$r_{kn} \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) \, \mathrm{d}\, t?$$

Veja a Figura 5. À esquerda temos o caso $k \neq n$ — nesse caso, a área embaixo da curva

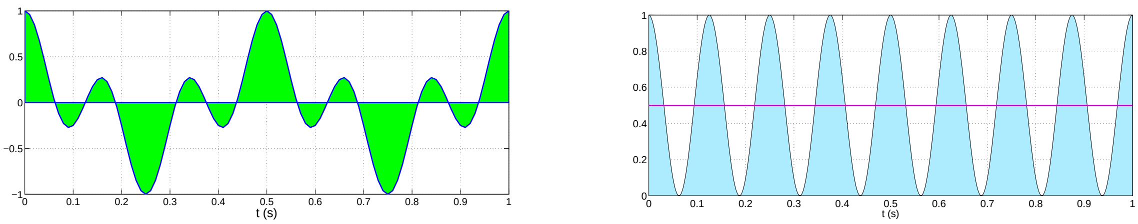

Figura 5: Produtos de senóides harmônicas. À esquerda, $c_1(t)c_2(t)$, à direita, $c_2^2(t)$.

vale zero. O caso $k = n$ está do lado direito: agora a área abaixo da curva vale $T/2$. Algebricamente, o que temos é o seguinte: lembre que

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x - y) + \frac{1}{2}\cos(x + y),$$

portanto

$$r_{kn} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2T}\int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{2T}\int_0^T \cos((k+n)\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Agora temos duas condições. Se $k \neq n$, as duas integrais são nulas (estamos integrando um co-seno em um número inteiro de períodos). No entanto, se $k = n$, então o primeiro co-seno fica $\cos((k-k)\omega_0 t) = \cos(0) = 1$, e a integral fica igual a T. Portanto,

$$r_{kn} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = n, \\ 0, & \text{se } k \neq n. \end{cases} \tag{6}$$

Da mesma maneira, vale

$$\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = n, \\ 0, & \text{se } k \neq n, \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t = 0, \text{ para todo } k, n \geq 1, \tag{8}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t = 0, \text{ para todo } k, n \geq 1, \tag{9}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 1\,\mathrm{d}\,t = 1. \tag{10}$$

Por que esse resultado é útil? Porque ele vai permitir encontrar uma fórmula (relativamente) simples para achar os valores dos a_k e b_k para um sinal periódico qualquer. Vamos usar como exemplo o sinal da Figura 4, com $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = -1$ e $b_3 = -0{,}3$:

$$s(t) = 0{,}5 + \cos(\omega_0 t) + \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t) - 0{,}3\operatorname{sen}(3\omega_0 t).$$

Agora vamos calcular a integral de $s(t)$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{1}_{=c_0(t)} s(t)\,\mathrm{d}\,t = 0{,}5 = a_0.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\cos(2\omega_0 t)}_{=c_2(t)} s(t)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}c_2.$$

Se você refletir um pouco, verá que

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T c_k(t)s(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} a_0, & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{2}a_k, & \text{se } k \geq 1, \end{cases} && \text{(11a)} \\ &\frac{1}{T}\int_0^T s_k(t)s(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}b_k, k \geq 1. && \text{(11b)} \end{aligned}}$$

Poderíamos ter descrito esse resultado usando a linguagem de Álgebra Linear. Se você lembrar da definição de espaço vetorial, verá que o conjunto das funções contínuas e periódicas com período T forma um espaço vetorial. A relação (5) significa que o conjunto de funções $c_k(t)$, $k \geq 0$ e $s_k(t)$, $k \geq 1$, forma uma *base* desse espaço vetorial. Por outro lado, as equações (6)–(10) significam que nossa base é *ortogonal*. Para achar a projeção de um vetor $s(t)$ qualquer sobre um elemento da base, basta então calcular o *produto interno* (11) entre o elemento da base e o vetor $s(t)$. A série de Fourier nada mais é portanto do que uma mudança de base (mudança de coordenadas) que facilita a realização de várias tarefas úteis.

3 Cálculo Prático dos Coeficientes: A Transformada Discreta de Fourier

O resultado anterior parece interessante, mas muito teórico, não é? Afinal, para encontrar os coeficientes da série de Fourier, precisaríamos calcular integrais como (11) — mas se $s(t)$ for conhecida apenas através de medidas (como nos exemplos da Figura 1), como calcular a integral? A resposta é simples: aproximando. Lembre da definição de integral (de Riemann), como na Figura 6. Escolhendo um número N suficientemente grande, e definindo o passo $T_a = T/N$,vale

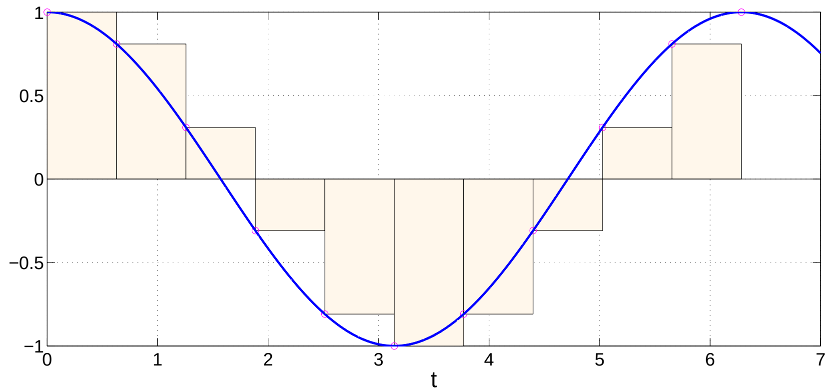

Figura 6: Aproximação da integral por uma soma de áreas retangulares.

$$\frac{1}{T}\int_0^T c_k(t)s(t)\,\mathrm{d}\,t \approx \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} c_k(nT_a)s(nT_a)T_a \underbrace{=}_{T=NT_a} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_k(nT_a)s(nT_a).$$

Podemos definir então aproximações $\tilde{a}_k$ e $\tilde{b}_k$ assim:

$$\tilde{a}_0 \triangleq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a), \tag{12a}$$

$$\tilde{a}_k \triangleq \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_k(nT_a)s(nT_a),\ k \geq 1, \tag{12b}$$

$$\tilde{b}_k \triangleq \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_k(nT_a)s(nT_a),\ k \geq 1, \tag{12c}$$

As equações (12) permitem que se calcule uma aproximação para a série de Fourier de um sinal periódico $s(t)$ dadas apenas amostras $s(nT_a)$ do sinal. Repare que na verdade apenas N valores diferentes dos coeficientes podem ser calculados, pois, se $T = NT_a$ e lembrando que $\omega_0 T = 2\pi$, então

$$c_{k+N}(nT_a) = \cos(k\omega_0(n+N)T_a) = \cos(k\omega_0 nT_a + k\omega_0 T) = \cos(k\omega_0 nT_a + k2\pi) = \cos(k\omega_0 nT_a),$$

e similarmente $s_{k+N}(nT_a) = s_k(nT_a)$. Ou seja, (12) permite o cálculo apenas dos N primeiros coeficientes da série de Fourier. Para calcular mais coeficientes, é necessário reduzir o valor de T_a.

Uma propriedade importante de (12) é que, se a função $s(t)$ for tal que

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t),$$

com K finito, e $N > 2K$, então vale, para $1 \leq k \leq K$,

$$\tilde{a}_0 = a_0, \qquad \tilde{a}_k = a_k, \qquad \tilde{b}_k = b_k. \tag{13}$$

Veja que a igualdade vale apenas se T/T_a for exatamente um número inteiro, e se

$$\frac{N}{K} > 2 \Leftrightarrow \frac{NT_a}{KT_a} > 2 \Leftrightarrow \frac{K}{T} < \frac{1}{T_a}. \tag{14}$$

A quantidade $1/T_a$ é a *frequência de amostragem* usada. O valor K/T, por outro lado, é a maior frequência presente no sinal $s(t)$. Portanto, a relação (14) nos diz que a igualdade entre os $\tilde{a}_k$ e $\tilde{b}_k$ e os a_k e b_k só vale se a frequência de amostragem for maior do que o dobro da maior frequência presente no sinal. Isto é uma consequência do *teorema da amostragem*, que será visto com mais detalhes no curso de Sistemas e Sinais.

As relações (12) são conhecidas como *Transformada Discreta de Fourier* (TDF). Apesar de termos apresentado a TDF apenas como uma aproximação da série de Fourier, sua utilidade é muito maior, em particular porque existem algoritmos muito eficientes (rápidos) para calcular todos os coeficientes da TDF. Esses algoritmos são conhecidos genericamente por FFT (de *Fast Fourier Transform*).

4 Formas alternativas da Série de Fourier e da TDF

A série de Fourier pode ser escrita de diferentes maneiras:

- Forma retangular (seno/co-seno): é a forma já vista na equação (5).
- Forma polar: usa, em vez de $a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)$, a forma $A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$.

- Forma exponencial: Escreve os senos co-senos na forma de exponenciais complexas, usando a fórmula de Euler.

A forma retangular é a forma usualmente vista em cursos de Cálculo. As outras duas, no entanto, são mais úteis na prática (pois facilitam medidas e contas). Vamos ver as relações entre as diversas formas a seguir.

4.1 Forma polar

A *forma polar* pode ser obtida rapidamente lembrando que

$$x_k(t) = a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)$$

tem fasor $\hat{X}_k = a_k - jb_k$ (lembre-se, $\operatorname{sen}(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$). Portanto,

$$a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k),$$

em que[2]

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \theta_k = \arctan(-b_k, a_k), \tag{15}$$

$$a_k = A_k \cos(\theta_k), \qquad b_k = A_k \operatorname{sen}(\theta_k). \tag{16}$$

Usando a forma polar, a série de Fourier fica

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k). \tag{17}$$

4.2 Forma exponencial

A forma polar é muito útil no laboratório, para usar a série de Fourier. Para fazer contas, no entanto, a forma exponencial é mais simples. Lembrando da fórmula de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta),$$

e que

$$\frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \cos(\theta),$$

podemos escrever

$$d_k \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T s(t) e^{-jk\omega_0 t}\, \mathrm{d}\, t = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cos(k\omega_0 t)\, \mathrm{d}\, t}_{=a_k/2} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)\, \mathrm{d}\, t}_{=b_k/2}, \tag{18}$$

decorre que

$$d_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{j\theta_k}. \tag{19}$$

[2]Lembre que o arco-tangente deve levar em conta os sinais de a_k e b_k, pois o ângulo θ_k pode estar no intervalo $[-\pi, +\pi)$.

Note que, para $k = 0$, (18) resulta também $d_0 = a_0$.

Considere agora um valor de $k > 0$ e calcule

$$d_{-k} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{jk\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cos(-k\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t}_{=a_k/2} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)\,\mathrm{d}\,t}_{=b_k/2} = d_k^*, \quad (20)$$

ou seja, d_{-k} é o complexo conjugado de d_k. Então vale

$$d_k e^{jk\omega_0 t} + d_{-k}e^{-jk\omega_0 t} = \underbrace{2|d_k|}_{=A_k}\cos(k\omega_0 t + \underbrace{\theta_k}_{=\text{ fase de } d_k}).$$

Isso significa que podemos escrever a série de Fourier assim:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (21)$$

$$d_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-jk\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t. \quad (22)$$

A TDF, por outro lado, fica:

$$\tilde{d}_k = \tilde{a}_k - j\tilde{b}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a)e^{-jk\omega_0 nT_a}. \quad (23)$$

Agora, notando que $\omega_0 T_a = (2\pi/T)(T/N) = 2\pi/N$, chegamos a

$$\tilde{d}_k = \tilde{a}_k - j\tilde{b}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a)e^{-jkn2\pi/N}. \quad (24)$$

Nota: é comum usar-se a TDF sem a divisão por N. Como é usual usar-se rotinas prontas para calcular a TDF, verifique qual fator de escala é usado pela rotina que você está usando.