PSI-3211 Circuitos Elétricos I
Números Complexos, Sinais Senoidais, e Fasores

Vítor H. Nascimento

14 de março de 2015

1 Introdução

Números complexos são muito utilizados no estudo (e projeto) de sistemas dinâmicos lineares, em particular em teoria de circuitos elétricos. Vamos aqui procurar mostrar as principais razões para a utilização de números complexos para modelar circuitos elétricos lineares. Nosso roteiro é o seguinte: faremos inicialmente uma breve revisão das propriedades de números complexos que serão importantes para nós, depois discutiremos em mais detalhes *por que* e *como* usar números complexos.

Antes de tudo isso, vamos procurar ver a principal razão para trabalhar com complexos, através de um exemplo bem simples. Considere o circuito da figura 1. Pela *1ª Lei de Kirchhoff* (que veremos logo mais, e decorre das nossas hipóteses de conservação da carga e propagação instantânea da corrente), a corrente $i_0(t)$ deve ser igual à soma de $i_1(t)$ e $i_2(t)$, para todo tempo. Como a excitação do circuito é constante, $i_1 = E/R_1$ e $i_2 = E/R_2$ são constantes, e conclui-se facilmente que

$$i_0(t) \equiv i_1 + i_2 = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

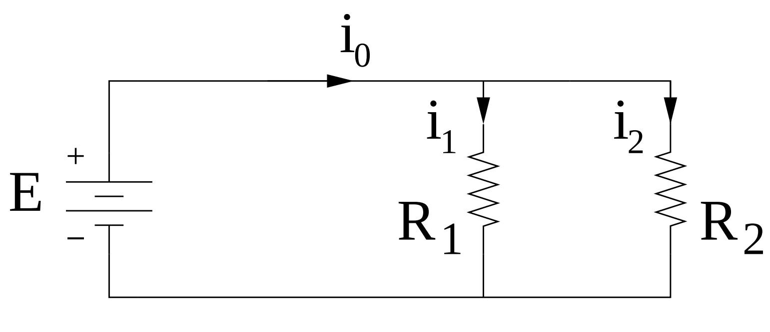

Figura 1: Circuito em corrente contínua

O circuito visto pela fonte de tensão, que ocorre freqüentemente como parte de circuitos maiores, é chamado *divisor de corrente (contínua)*. Igualmente freqüente é o circuito visto pela fonte de tensão da figura 2, também um divisor de corrente, mas agora alternada. Como se sabe, a tensão fornecida pela rede de distribuição de energia elétrica é senoidal, com freqüência (no Brasil) de 60Hz. Essa é uma das razões (há várias outras, que veremos ao longo deste e de outros cursos) para o interesse em se procurar formas simples de se analisar circuitos com alimentação senoidal, ou seja, em que as tensões e correntes têm a forma (veja a figura 3)

$$v(t) = E_m \cos(\omega t + \phi), \qquad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta),$$

em que

- E_m e I_m são as *amplitudes* dos sinais senoidais (medidas em volts ou ampères, conforme o caso),
- ω é a *freqüência angular* do sinal (medida em radianos por segundo - rad/s). O *período* do sinal senoidal é

  $$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

  e a *freqüência cíclica* (medida em hertz - Hz) é o inverso do período:

  $$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

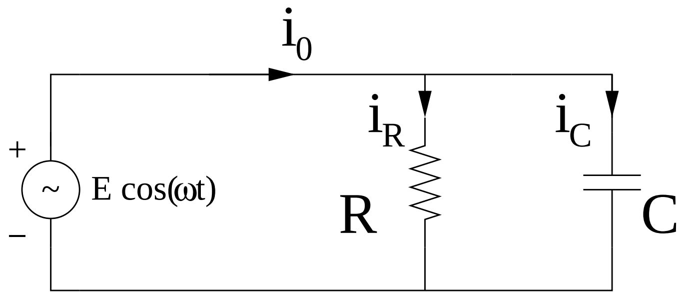

Figura 2: Circuito em corrente alternada

  Atenção para não misturar f e ω! As unidades são diferentes!

- ϕ e θ são as *fases* dos sinais (medidas em radianos ou em graus[1]).

  Repare que, como $\cos(\theta) = \cos(\theta + k2\pi)$, para qualquer k inteiro, vários valores diferentes de fase resultam essencialmente no mesmo sinal. Usualmente a fase é definida para

[1]Um costume bastante comum é misturar unidades e escrever, por exemplo, $v(t) = 2\cos(2\pi t + 45°)$ (V,s). Nesta expressão, a freqüência angular é dada em *radianos por segundo* (ou seus múltiplos): $\omega = 2\pi$ rad/s, ou $f = 1$Hz. No entanto, a fase é dada em graus! Para saber o valor da tensão em um dado instante de tempo, por exemplo, $t = 1$s, deve-se tomar cuidado para se usar apenas uma unidade. Assim,

$$v(1) = 2\cos(2\pi.1 + 45.\pi/180) = 2\cos(2\pi + \pi/4) = \sqrt{2}V.$$

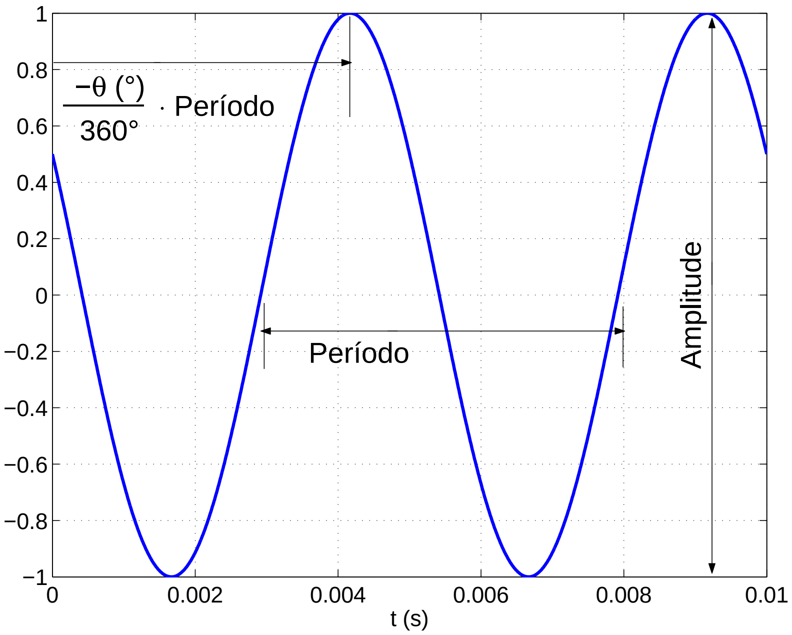

Figura 3: Função senoidal $v(t) = \cos(400\pi t + 60°)$ (V,s).

$-\pi < \theta \leq \pi$ ou $0 \leq \theta < 2\pi$, dependendo do gosto de quem escreve, ou da conveniência para resolver um certo problema. Repare que, na figura 3, o sinal foi definido como tendo uma fase de 60°, mas o cálculo indicado pelo gráfico resultaria em uma fase de $-300°$. Como $-300 = 60 - 360$, o ângulo é o mesmo nos dois casos.

São portanto necessários três parâmetros para descrever uma tensão ou corrente senoidal: a freqüência, a amplitude, e a fase. Como em diversas aplicações a freqüência de todos os geradores é a mesma e não varia (60 Hz para a rede de distribuição, por exemplo), normalmente pode-se trabalhar com apenas dois parâmetros, amplitude e fase. Uma tensão ou corrente contínua é definida por apenas um parâmetro (um número real). Como uma função senoidal de uma dada freqüência é definida por *dois* parâmetros, ela pode ser representada por um *único* número complexo. Como veremos a seguir, isso torna a resolução de circuitos RLC alimentados por geradores senoidais essencialmente igual à resolução de circuitos resistivos em corrente contínua.

Vamos ver como isso é feito em um exemplo: suponha que se saiba que a tensão $v(t)$ do gerador da figura 2 seja

$$v(t) = 180\cos(2\pi 60t + 30°)(V{,}s),$$

e que $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$. Quanto vale então $i_0(t)$? Podemos proceder assim: primeiramente, como $i_R(t)$ é a corrente em um resistor ideal, sabemos que

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{180}{R}\cos(2\pi 60t + 30°)(A{,}s) = 0{,}18\cos(2\pi 60t + 30°)(A{,}s),$$

ou seja, a corrente no resistor tem as mesmas freqüência e fase da tensão, mas uma amplitude igual a $180/R$ ampères. Para calcular $i_C(t)$, basta usar a relação

$$\begin{aligned} i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}\,v(t)}{\mathrm{d}\,t} &= -180.2\pi 60 C \,\mathrm{sen}(2\pi 60 t + 30^\circ) = \\ &= 21600\pi C \,\mathrm{sen}(2\pi 60 t - 150^\circ), \end{aligned}$$

onde usamos o fato de $-\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(x - 180^\circ)$. Além disso, lembrando que $\mathrm{sen}(x) = \cos(x - 90^\circ)$, podemos escrever

$$i_C(t) = 21600\pi C \cos(2\pi 60 t - 240^\circ) = 0{,}06786 \cos(2\pi 60 t - 240^\circ).$$

Agora variaram tanto a amplitude quanto a fase do co-seno, mas novamente a freqüência se manteve.

Para calcular $i_0(t)$, basta fazer novamente

$$i_0(t) = i_R(t) + i_C(t) = 0{,}18 \cos(2\pi 60 t + 30^\circ) + 0{,}06786 \cos(2\pi 60 t - 240^\circ).$$

É possível simplificar esta expressão? Vendo os gráficos de $i_R(t)$, $i_C(t)$, e de $i_0(t)$, apresentados na figura 4, pode-se notar que $i_0(t)$ é também um sinal senoidal, com a mesma freqüência de $i_R(t)$ e de $i_C(t)$, mas com amplitude e fase diferentes. Deve portanto ser possível escrever $i_0(t)$ na forma

$$i_0(t) = I_0 \cos(2\pi 60 t + \phi_0). \tag{1}$$

O problema agora é determinar os valores de I_0 e de ϕ_0 de uma maneira simples e rápida.

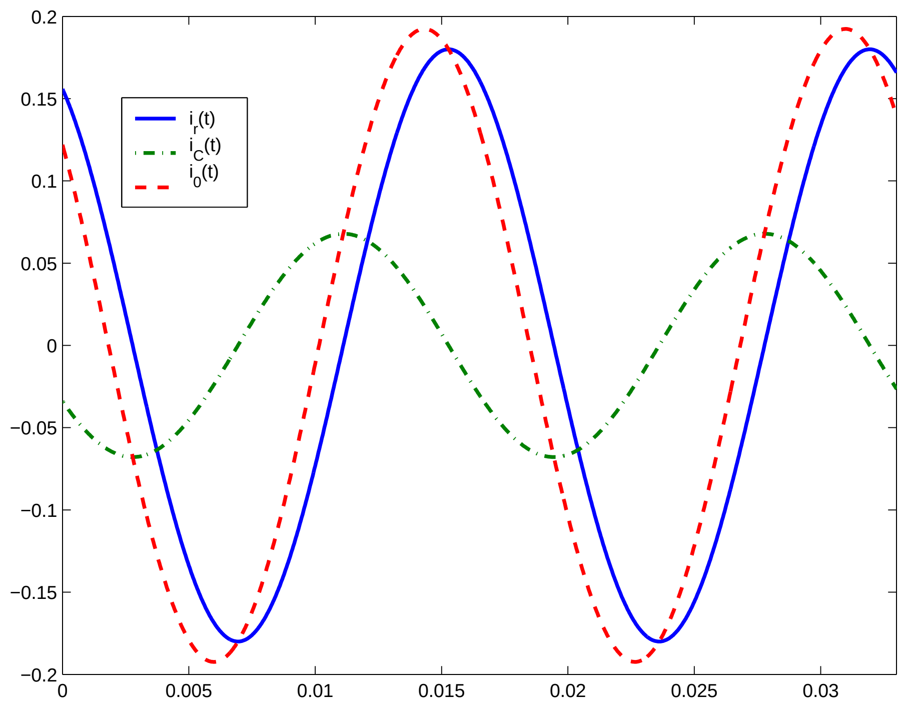

Figura 4: Correntes i_0, i_R, e i_C (ampères).

Como veremos logo mais, essa maneira simples e rápida envolve a utilização de números complexos, representando um sinal senoidal qualquer por um número complexo chamado *fasor*. Logicamente, é possível determinar a amplitude e a fase de $i_0(t)$ no nosso exemplo diretamente através de relações trigonométricas. No entanto, a representação complexa (fasorial) leva a expressões muito fáceis de lembrar, e permite a generalização de vários conceitos simples usados em corrente contínua para corrente alternada em regime senoidal. Antes de vermos como fazer isso, vamos à recordação sobre números complexos.

2 Números complexos

Vamos começar com uma recordação rápida de definições e operações que já devem ser conhecidas de todos. Em seguida trataremos de diferentes formas de se "ver" (ou representar) um número complexo, que serão muito úteis no futuro.

2.1 Definição e operações básicas

Definição

Vamos usar aqui a notação usual em Engenharia Elétrica, definindo[2]

$$j \triangleq \sqrt{-1}.$$

Ou seja, define-se j como sendo um número que, elevado ao quadrado, resulta em -1. j é chamado um número *imaginário*: você pode ir à feira e comprar 1,48 bananas, se o vendedor for paciente, ou até mesmo voltar para casa com -1,48 bananas (uma dívida), mas não há um sentido físico óbvio para j bananas. No entanto, números imaginários são úteis porque simplificam a resolução de diversos problemas — um exemplo é a solução de circuitos elétricos com entradas senoidais, mas há diversos outros: usando números imaginários podemos dizer que todo polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ de grau n tem exatamente n raízes, e que pode ser fatorado na forma

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Isso não seria verdade se os x_k fossem restritos apenas a números reais.

Números complexos têm várias outras utilidades: representar os sinais recebidos em sistemas de comunicações digitais [1]; propriedades de funções de variáveis complexas são essenciais para se projetar filtros analógicos e digitais [2] e para encontrar integrais definidas de funções reais complicadas [3]... A lista é longa.

Um número complexo z é composto por uma *parte real* e uma *parte imaginária*, de modo que, para números reais a e b,

$$z = a + jb.$$

A parte real de z é a, e a parte imaginária, b, e escreve-se

$$\mathcal{R}e\{z\} = a, \qquad \mathcal{I}m\{z\} = b.$$

[2] O símbolo $\triangleq$ significa "igual por definição".

Pode-se definir operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos de maneira que todas as propriedades importantes dos números reais sejam satisfeitas também para os números complexos. As definições adequadas são:

Soma e subtração

Para se somar dois números complexos, basta somar as partes reais e imaginárias correspondentes. Assim, se $z_1 = a_1 + jb_1$ e $z_2 = a_2 + jb_2$, então

$$z_3 \stackrel{\Delta}{=} z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2),$$

e portanto,

$$\mathcal{R}e\{z_1 + z_2\} = a_1 + a_2, \qquad \mathcal{I}m\{z_1 + z_2\} = b_1 + b_2.$$

Para a subtração $z_1 - z_2$, basta inverter os sinais de a_2 e b_2.

Produto

O produto de um número complexo $z = a + jb$ por um real c é definido por

$$c \cdot z = (c \cdot a) + j(c \cdot b),$$

e o produto de dois números complexos $z_1 = a_1 + jb_1$ e $z_2 = a_2 + jb_2$ é dado por

$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 + (j)^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Divisão e conjugação

Para dividir z_1 por $z_2 \neq 0$, procede-se assim:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

O número $a_2 - jb_2$ usado acima é o *complexo conjugado* de z_2 (indica-se z_2^*). De modo geral, se $z = a + jb$, então

$$z^* = a - jb, \qquad \mathcal{R}e\{z^*\} = \mathcal{R}e\{z\}, \qquad \mathcal{I}m\{z^*\} = -\mathcal{I}m\{z\}.$$

Note que sempre vale

1. $z \cdot z^* = (\mathcal{R}e\{z\})^2 + (\mathcal{I}m\{z\})^2$,
2. $z + z^* = 2\mathcal{R}e\{z\}$,
3. $z - z^* = 2j\mathcal{I}m\{z\}$.

2.2 Plano complexo e forma polar

Pode-se representar um número complexo de forma gráfica através do *plano complexo*, em que o eixo das abcissas representa a parte real, e o das ordenadas, a parte imaginária (veja a figura 5). A partir da figura, nota-se que o número complexo pode ser representado de uma maneira alternativa: uma posição qualquer no plano complexo pode ser igualmente

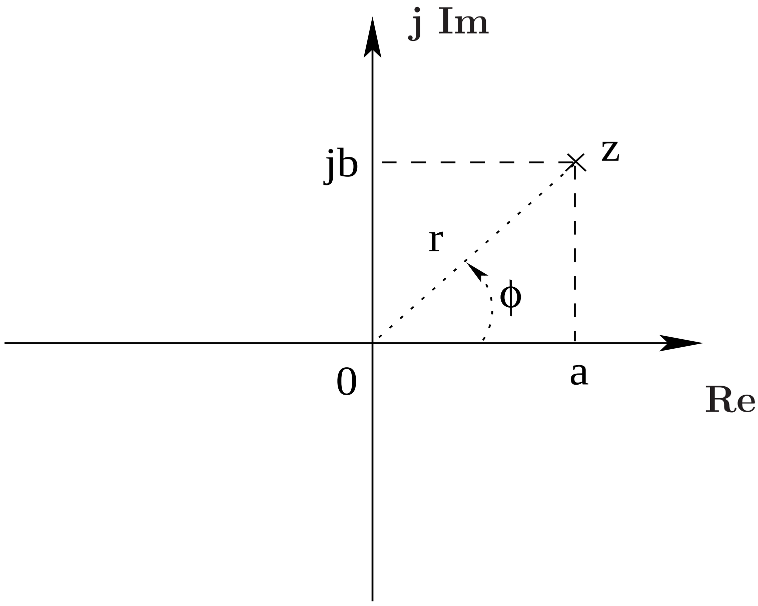

Figura 5: Representação de $z = a + jb$ no plano complexo.

fixada dadas tanto as coordenadas retangulares a e b quanto as coordenadas polares, r e ϕ. Por convenção ϕ é o ângulo medido em sentido anti-horário, a partir do eixo das abcissas. Portanto, ângulos medidos no sentido horário a partir deste mesmo eixo serão negativos. Para converter de um sistema para o outro, basta ver pela figura que o triângulo $0az$ é retângulo, e portanto,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \phi = \arctan\left(b,a\right),$$
$$a = r\cos(\phi), \qquad b = r\,\mathrm{sen}(\phi),$$

Dois comentários sobre essas expressões:

1. O número $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ é chamado *módulo* do número complexo, e é denotado pelo símbolo $|\cdot|$:
$$z = a + jb \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
Repare que podemos escrever o quadrado do módulo usando o conjugado de um número complexo:
$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot z^*.$$

2. Para um número complexo z, z^2 é, em geral, *diferente de* $|z|^2$! Por exemplo,
$$(1 + j2)^2 = 1 - 4 + j(2 + 2) = -3 + j4,$$
mas
$$|1 + j2|^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$
O número $|z|^2$ é sempre real, enquanto que z^2 é, na maior parte das vezes, um número complexo, com parte imaginária diferente de zero.

3. Note que usamos um símbolo um pouco diferente para o arco-tangente, tratando-o como uma função de 2 variáveis. Isto é necessário, pois a expressão usual $\arctan(b/a)$ não diferencia pontos no primeiro quadrante de pontos simétricos com relação ao 0, no terceiro quadrante; nem pontos no segundo quadrante de pontos no quarto quadrante. Por exemplo, se $a = 1$ e $b = 1$ (z está no primeiro quadrante), temos $\phi = \arctan(1/1) = 45°$. No entanto, se $a = -1$ e $b = -1$ (z está no terceiro quadrante), $\arctan(-1/(-1)) = 45°$ novamente, mas na verdade deveríamos ter $\phi = -135°$. Da mesma forma, se $z_1 = 1 - j$ ou $z_2 = -1 + j$, $\arctan(-1/1) = \arctan(1/-1) = -45°$, mas a fase de z_2 deveria ser $+135°$.

   A função $\arctan(b,a)$ é definida assim:

$$\phi = \arctan(b,a) = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) - \text{sinal}(b/a) \cdot 180°, & \text{se } a < 0, \\ 90°, & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0, \\ -90°, & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0, \\ 0, & \text{se } a = b = 0. \end{cases}$$

   Em diversas bibliotecas de compiladores, a função acima é chamada de *arctan2*.

Para representar um número usando coordenadas polares (diz-se que o número está na *forma polar*) usa-se a seguinte notação:

$$z = r\underline{|\ \phi}.$$

A distância do ponto (a,b) à origem do plano complexo é o módulo do número complexo, como vimos acima. O ângulo ϕ é a *fase* do número complexo. Indica-se

$$r = |z|, \qquad \phi = \underline{|\ z}.$$

Note que o símbolo para fase tem dois significados: $\underline{|\ 2 - j2} = -45°$ significa que a fase do número complexo $z = 2 - j2$ é de $-45°$, enquanto que $z_1 = 2\underline{|\ 30°}$ indica que a fase de z_1 é $30°$.

Em coordenadas polares também é fácil achar o conjugado de um número z: basta inverter o sinal de ϕ (veja a figura 6):

$$z^* = (r\underline{|\ \phi})^* = r\underline{|\ -\phi}.$$

Veja que usando coordenadas retangulares (a *forma retangular* do número complexo) pode-se calcular facilmente somas e subtrações de complexos. No entanto, multiplicações e divisões são mais difíceis de calcular na forma retangular. Por outro lado, com a forma polar, operações de multiplicação e divisão são extremamente facilitadas (como veremos a seguir), enquanto que somas e subtrações ficam mais complicadas.

Para ver como é fácil multiplicar ou dividir dois números complexos na forma polar, considere dois números quaisquer, $z_1 = r_1\underline{|\ \phi_1}$ e $z_2 = r_2\underline{|\ \phi_2}$. Lembrando que

$$a_1 = r_1 \cos(\phi_1), \qquad b_1 = r_1 \operatorname{sen}(\phi_1),$$
$$a_2 = r_2 \cos(\phi_2), \qquad b_2 = r_2 \operatorname{sen}(\phi_2),$$

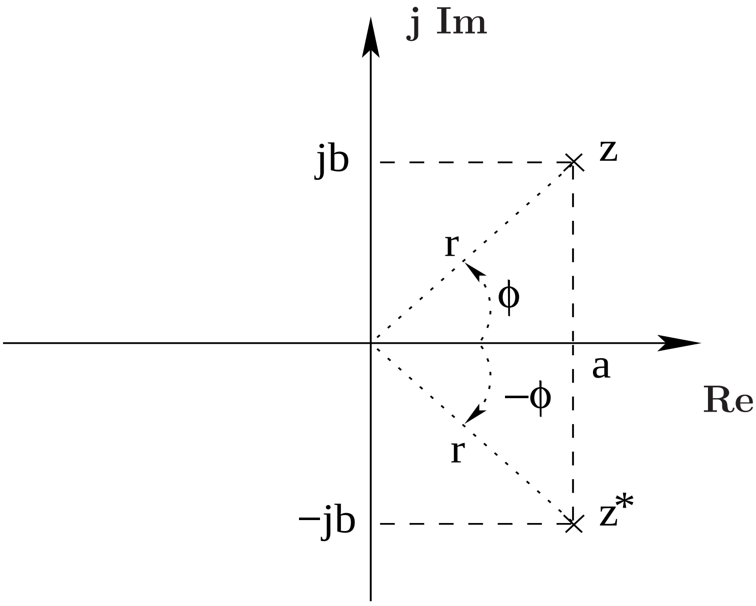

Figura 6: Conjugação de $z = r|\underline{\phi}$ no plano complexo.

vem

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \Big[\big(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2)\big) + j\big(\cos(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2) + \operatorname{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2)\big)\Big].$$

Agora basta lembrar que

$$\begin{aligned}\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2) &= \cos(\phi_1+\phi_2),\\ \cos(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2) + \operatorname{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) &= \operatorname{sen}(\phi_1+\phi_2),\end{aligned}$$

e concluímos que

$$\big(r_1|\underline{\phi_1}\big)\cdot\big(r_2|\underline{\phi_2}\big) = r_1 r_2|\underline{\phi_1+\phi_2},$$

ou seja, para multiplicar dois números complexos na forma polar, basta multiplicar os módulos e somar as fases!

Usando este resultado, podemos facilmente achar a expressão para divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1|\underline{\phi_1}}{r_2|\underline{\phi_2}}\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{r_1 r_2|\underline{\phi_1-\phi_2}}{r_2^2|\underline{\phi_2-\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2}|\underline{\phi_1-\phi_2}.$$

Conjugados, partes real e imaginária, e módulo de um complexo

Vamos mostrar aqui algumas propriedades que usaremos com freqüência. Primeiramente, lembrando que, se $z = a + jb$, então $z^* = a - jb$, temos

$$\mathcal{R}e\{z\} = a = \frac{z+z^*}{2}, \qquad \mathcal{I}m\{z\} = b = \frac{z-z^*}{2j}. \tag{2}$$

Escrevendo agora o complexo na forma polar, $z = a + jb = r|\underline{\phi}$, $z^* = r|\underline{-\phi}$ temos,

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot z^*}. \tag{3}$$

2.3 Fórmula de Euler

Uma relação muito útil une a função exponencial à forma polar de representação de complexos: a fórmula de Euler. Pode-se aceitá-la de diversas maneiras, veremos duas agora. Primeiro, considere a função

$$e_\omega(t) = \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t).$$

A sua derivada é

$$\frac{\mathrm{d}\, e_\omega}{\mathrm{d}\, t} = -\omega \operatorname{sen}(\omega t) + j\omega \cos(\omega t) = j\omega\big(\cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t)\big) = j\omega e_\omega(t), \tag{4}$$

ou seja, a derivada de $e_\omega(t)$ é proporcional à própria $e_\omega(t)$. Isso é muito semelhante a uma propriedade da função exponencial:

$$\frac{\mathrm{d}\, e^{at}}{\mathrm{d}\, t} = ae^{at}.$$

Vejamos outra propriedade de $e_\omega(t)$:

$$\begin{aligned} e_\omega(t) \cdot e_\nu(t) = &\big[\cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t)\big] \cdot \big[\cos(\nu t) + j \operatorname{sen}(\nu t)\big] = \\ &= \cos(\omega t)\cos(\nu t) - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\nu t) + j\big[\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\nu t) + \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\nu t)\big]. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big), \\ \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big), \\ \operatorname{sen}(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\big), \end{aligned} \tag{5}$$

podemos simplificar o resultado anterior assim:

$$\begin{aligned} e_\omega(t) \cdot e_\nu(t) = &\frac{1}{2}\left[\cos\big((\omega-\nu)t\big) + \cos\big((\omega+\nu)t\big) - \cos\big((\omega-\nu)t\big) + \cos\big((\omega+\nu)t\big)\right] + \\ &+ j\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\big((\omega-\nu)t\big) + \operatorname{sen}\big((\omega+\nu)t\big) + \operatorname{sen}\big(\nu-\omega)t\big) + \operatorname{sen}\big((\nu+\omega)t\big)\right]. \end{aligned}$$

Agora vamos usar o fato de que $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ para cancelar os termos semelhantes:

$$e_\omega(t)e_\nu(t) = \cos\big((\omega+\nu)t\big) + j \operatorname{sen}\big((\omega+\nu)t\big) = e_{\omega+\nu}(t). \tag{6}$$

Essa propriedade também lembra uma propriedade de funções exponenciais:

$$e^{at}e^{bt} = e^{(a+b)t}.$$

Por analogia, chegamos à fórmula de Euler: definimos

$$\boxed{e^{jx} \triangleq \cos(x) + j \operatorname{sen}(x).}$$

Você pode trabalhar com a função e^{jx} como trabalharia com uma exponencial comum, já que as propriedades usuais da função exponencial real ((4) e (6)) são satisfeitas também por e^{jx}.

Uma outra forma de se chegar à fórmula de Euler é usar a decomposição em série de MacLaurin do seno e do co-seno: sabe-se de Cálculo que

$$\begin{aligned} e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Portanto, se expandirmos $\cos(x) + j\operatorname{sen}(x)$ usando as expressões acima, obteremos

$$\cos(x) + j\operatorname{sen}(x) = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Lembrando que $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, etc, a série acima fica

$$\cos(x) + j\operatorname{sen}(x) = 1 + (jx) + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \dots$$

Note que a série à direita é exatamente o que seria obtido se substituíssemos formalmente $y = jx$ na série para e^y.

A representação de um número complexo na forma polar tem uma relação próxima com a fórmula de Euler: podemos descrever um número complexo z como

$$z = x + jy = r\underline{|\ \phi} = r\big(\cos(\phi) + j\operatorname{sen}(\phi)\big) = re^{j\phi}.$$

Esta é a chamada *forma exponencial* do número complexo, que é obviamente essencialmente a forma polar. Note que, como $\operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ para qualquer ângulo, $|e^{j\phi}| = 1$. Ou seja, variando ϕ, $e^{j\phi}$ percorre o *círculo unitário* no sentido anti-horário, começando do ponto $z = 1 + j0$ (veja a figura 7).

A utilidade da forma exponencial é que várias propriedades de senos, co-senos, e de números complexos na forma polar podem ser facilmente derivadas usando propriedades da função e^y, como por exemplo, lembrando que

$$e^{y_1}e^{y_2} = e^{y_1+y_2},$$

e que

$$\frac{e^{y_1}}{e^{y_2}} = e^{y_1-y_2},$$

chega-se facilmente às expressões para multiplicação e divisão de números complexos da forma polar que vimos anteriormente:

$$\big(r_1e^{j\phi_1}\big) \cdot \big(r_2e^{j\phi_2}\big) = (r_1r_2)e^{j(\phi_1+\phi_2)},$$

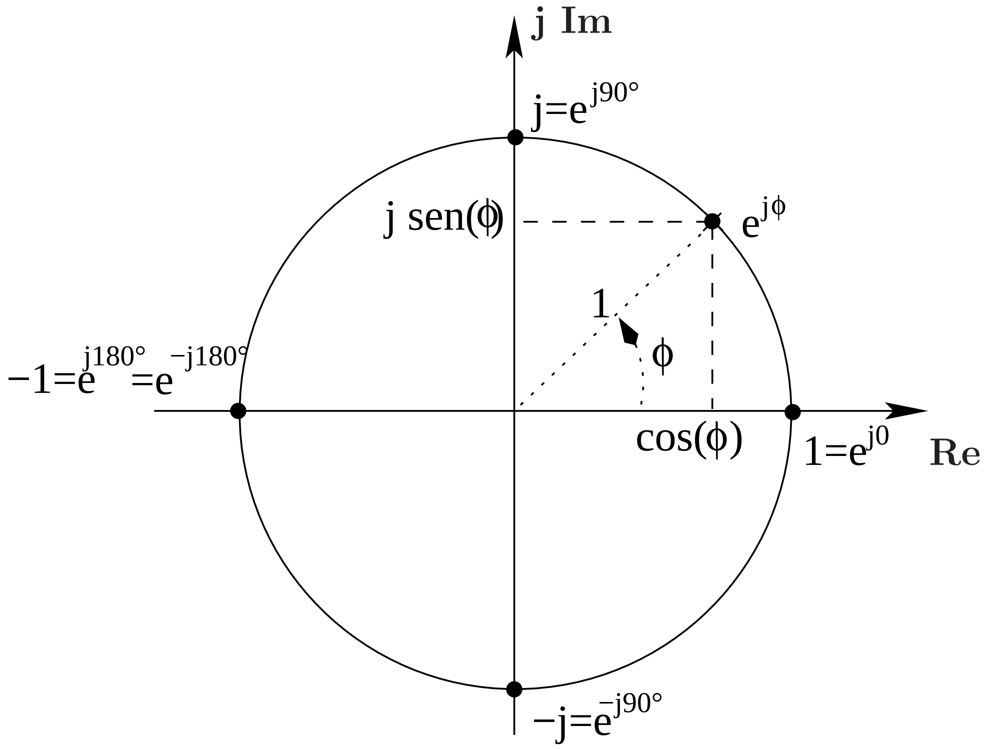

Figura 7: Círculo unitário e $e^{j\phi}$.

e de maneira análoga para divisão,

$$\frac{r_1 e^{j\phi_1}}{r_2 e^{j\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}.$$

Usando as relações entre parte real, parte imaginária e conjugados da equação (2), podemos escrever senos e co-senos em função da exponencial complexa (denominadas expressões de De Moivre):

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} = \mathcal{R}e\{e^{j\phi}\}, \qquad \operatorname{sen}(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \mathcal{I}m\{e^{j\phi}\}. \tag{7}$$

Estas relações podem ser entendidas também com a ajuda do círculo unitário, veja a figura 8, onde estão marcados o número $z = e^{j\phi}$, seu conjugado $z^* = e^{-j\phi}$, e $-z^* = -e^{-j\phi} = (-1)e^{-j\phi} = e^{-j(\phi-180°)}$ (usamos a forma exponencial para o número -1: $-1 = \cos(180°) + j\operatorname{sen}(180°) = e^{j180°}$).

Como exercício, use as fórmulas de De Moivre para provar as equações (5).

3 Funções senoidais e fasores

Agora podemos voltar ao nosso problema inicial: como calcular I_0 e ϕ_0 em (1) de maneira simples. Usando a forma exponencial de números complexos para representar funções senoi-

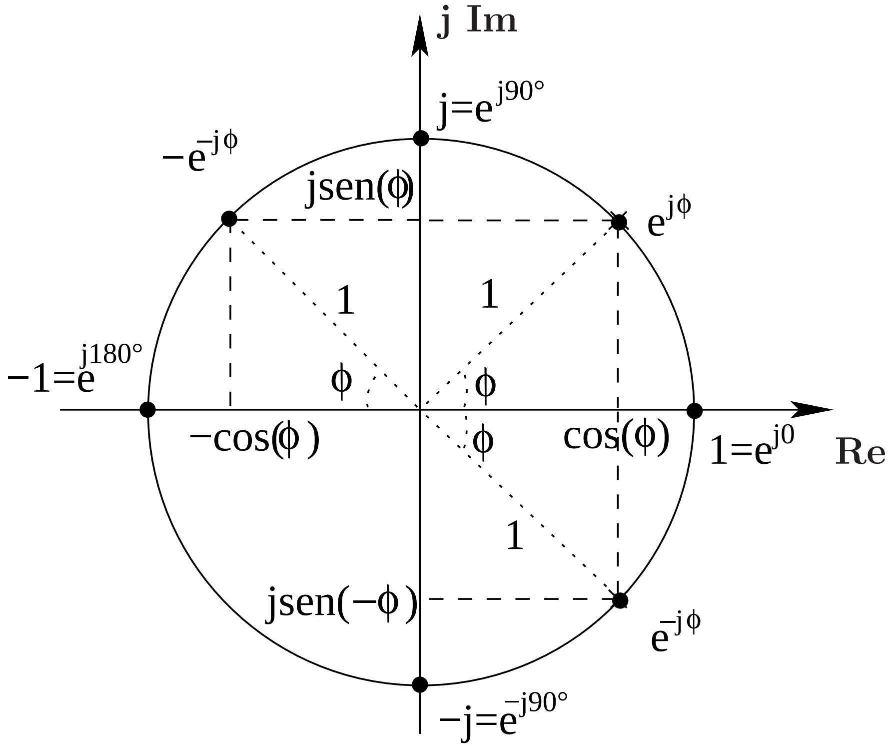

Figura 8: Relações entre seno, co-seno e $e^{j\phi}$.

dais, tudo fica simples. Vamos começar usando (7) para escrever

$$A\cos(\omega t+\phi) = A\frac{e^{j(\omega t+\phi)}+e^{-j(\omega t+\phi)}}{2} = \mathcal{R}e\big\{Ae^{j(\omega t+\phi)}\big\}. \tag{8}$$

Vamos agora usar este resultado para resolver o exemplo da seção 1. Queríamos achar I_0 e ϕ_0 que descrevessem a função $i_0(t)$, que, como vimos na figura 4, é senoidal. Ou seja, precisamos achar I_0 e ϕ_0 tais que

$$i_0(t) = i_R(t)+i_C(t) = 0{,}18\cos(2\pi 60t+30^\circ)+0{,}06786\cos(2\pi 60t-240^\circ) = I_0\cos(2\pi 60t+\phi_0).$$

Vamos escrever $i_R(t)$ e $i_C(t)$ usando (8):

$$i_R(t) = 0{,}18\cos(2\pi 60t+30^\circ) = \mathcal{R}e\big\{0{,}18e^{j(2\pi 60t+30^\circ)}\big\} = \mathcal{R}e\big\{0{,}18e^{j30^\circ}e^{j2\pi 60t}\big\},$$
$$i_C(t) = 0{,}06786\cos(2\pi 60t-240^\circ) = \mathcal{R}e\big\{0{,}06786e^{j(2\pi 60t-240^\circ)}\big\} = \mathcal{R}e\big\{0{,}06786e^{-j240^\circ}e^{j2\pi 60t}\big\}.$$

Somando os dois termos, e lembrando que $\mathcal{R}e\{z_1+z_2\} = \mathcal{R}e\{z_1\}+\mathcal{R}e\{z_2\}$, obtemos

$$i_0(t) = \mathcal{R}e\big\{0{,}18e^{j30^\circ}e^{j2\pi 60t}+0{,}06786e^{-j240^\circ}e^{j2\pi 60t}\big\} = \mathcal{R}e\Big\{\big(0{,}18e^{j30^\circ}+0{,}06786e^{-j240^\circ}\big)e^{j2\pi 60t}\Big\}$$

Somando agora os números $0{,}18e^{j30^\circ}$ e $0{,}06786e^{-j240^\circ}$, obtemos

$$\begin{aligned}0{,}18e^{j30^\circ}+0{,}06786e^{-j240^\circ} &= 0{,}18\big(\cos(30^\circ)+j\,\mathrm{sen}(30^\circ)\big)+0{,}06786\big(\cos(240^\circ)+j\,\mathrm{sen}(240^\circ)\big) = \\ &= \big(0{,}1559+j0{,}09\big)+\big(-0{,}0339+j0{,}0588\big) = 0{,}1220+j0{,}1488 = \\ &= 0{,}1924e^{j50{,}6564^\circ}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$i_0(t) = \mathcal{R}e\{0{,}1924e^{j50{,}6564^\circ}e^{j2\pi 60t}\} = \mathcal{R}e\{0{,}1924e^{j(2\pi 60t+50{,}6564^\circ)}\} = 0{,}1924\cos(2\pi 60t+50{,}6564^\circ).$$

Este exemplo nos mostra que, ao se somar duas funções senoidais *de mesma freqüência* (este detalhe é importante!)

$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t+\phi_1), \qquad \text{e} \qquad i_2(t) = I_2\cos(\omega t+\phi_2),$$

o resultado, $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$ será também uma função senoidal *com a mesma freqüência*, cujas amplitude I_3 e fase ϕ_3 podem ser calculadas assim:

$$I_3\cos(\omega t+\phi_3) = \mathcal{R}e\{I_3e^{j\phi_3}e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\left\{(I_1e^{j\phi_1}+I_2e^{j\phi_2})e^{j\omega t}\right\},$$

ou seja,

$$I_3e^{j\phi_3} = I_1e^{j\phi_1} + I_2e^{j\phi_2}.$$

Definimos então os números complexos $\hat{I}_1 \triangleq I_1e^{j\phi_1}$, $\hat{I}_2 \triangleq I_2e^{j\phi_2}$, $\hat{I}_3 \triangleq I_3e^{j\phi_3}$, denominados *fasores* das funções senoidais $i_1(t)$, $i_2(t)$, e $i_3(t)$. De modo geral, dada uma função

$$f(t) = F\cos(\omega t+\phi),$$

o seu fasor correspondente será o complexo

$$\hat{F} \triangleq Fe^{j\phi}.$$

Veja que, conhecida $f(t)$, o seu fasor correspondente está determinado. Analogamente, conhecido o fasor $\hat{F}$ *e a freqüência* ω, a função $f(t)$ pode ser recuperada.

Operações com fasores

Dadas as funções senoidais $f_1(t) = F_1\cos(\omega t+\phi_1)$, $f_2(t) = F_2\cos(\omega t+\phi_2)$, com os respectivos fasores $\hat{F}_1 = F_1e^{j\phi_1}$ e $\hat{F}_2 = F_2e^{j\phi_2}$,

1. se $f(t) = f_1(t) \pm f_2(t) = F\cos(\omega t+\phi)$, então

$$\hat{F} = Fe^{j\phi} = \hat{F}_1 \pm \hat{F}_2,$$

2. se $f(t) = c \cdot f_1(t)$, onde c é um número real, então

$$\hat{F} = c\hat{F}_1 = \begin{cases} (cF)e^{j\phi_1}, & \text{se } c \geq 0, \\ (|c|F)e^{j(\phi_1+180^\circ)}, & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

3. se

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}\, f_1(t)}{\mathrm{d}\, t},$$

$$\hat{F} = j\omega\hat{F}_1 = (\omega F_1)e^{j(\phi_1+90^\circ)},$$

4. se

$$f(t) = \int_0^t f_1(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda + f_0,$$

onde f_0 é escolhido de forma que $f(t)$ tenha média nula, então

$$\hat{F} = \frac{1}{j\omega}\hat{F}_1 = \left(\frac{F_1}{\omega}\right) e^{j(\phi_1 - 90^\circ)}.$$

Vemos que somas, subtrações, derivadas e integrais[a] de sinais senoidais *de uma mesma freqüência* resultam sempre em sinais senoidais *com a mesma freqüência*, mas com amplitudes e fases distintas. As relações fasorias listadas acima podem ser usadas para calcular essas amplitudes e fases rapidamente.

[a]Integrais podem também dar origem a termos constantes, como veremos logo mais. Estamos aqui fazendo a hipótese (freqüentemente verdadeira) que os valores médios de todos os sinais são nulos (ou seja, que os termos constantes são iguais a zero).

Verificar as duas primeiras propriedades fica como exercício. Para a propriedade 3, temos

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}\, f_1(t)}{\mathrm{d}\, t} = -\omega F_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1).$$

Lembrando que (esta relação também pode ser obtida diretamente do círculo unitário)

$$-\operatorname{sen}(x) = \mathcal{I}m\{-e^{jx}\} = \mathcal{R}e\{je^{jx}\} = \mathcal{R}e\{e^{j(x+90^\circ)}\} = \cos(x + 90^\circ),$$

$f(t)$ fica

$$f(t) = \omega F_1 \cos(\omega t + \phi_1 + 90^\circ),$$

ou seja,

$$\hat{F} = (\omega F_1)e^{j(\phi_1 + 90^\circ)}.$$

Para a propriedade 4, veja que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t F_1 \cos(\omega\lambda + \phi_1)\,\mathrm{d}\,\lambda + f_0 = \left[\frac{F_1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega\lambda + \phi_1)\right]_0^t + f_0 = \\ &= \frac{F_1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) - \frac{F_1}{\omega}\operatorname{sen}(\phi_1) + f_0. \end{aligned}$$

Para o resultado ter média nula, f_0 deve ser escolhido como

$$f_0 = \frac{F_1}{\omega}\operatorname{sen}\phi_1,$$

resultando em

$$f(t) = \frac{F_1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) = \frac{F_1}{\omega}\cos(\omega t + \phi_1 - 90^\circ),$$

em que usamos a relação $\operatorname{sen}(x) = \cos(x - 90^\circ)$. Concluímos que

$$\hat{F} = \left(\frac{F_1}{\omega}\right) e^{j(\phi_1 - 90^\circ)}.$$

4 Relações fasoriais nos bipolos R, L, e C ideais

Na figura 9 temos um resistor, um indutor e um capacitor ideais, com tensões e correntes medidas na convenção do receptor. Vamos começar com o resistor. Suponha que

$$v_R(t) = V_R \cos(\omega t + \phi_R),$$

então, como deve ser $v_R(t) = Ri_R(t)$ para todo t, temos

$$i_R(t) = \frac{V_R}{R} \cos(\omega t + \phi_R).$$

Tomando os fasores de $v_R(t)$ e de $i_R(t)$, concluímos que

$$\left.\begin{array}{l} \hat{V}_R = V_R e^{j\phi_R} \\ \hat{I}_R = \frac{V_R}{R} e^{j\phi_R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\hat{V}_R}{\hat{I}_R} = R}$$

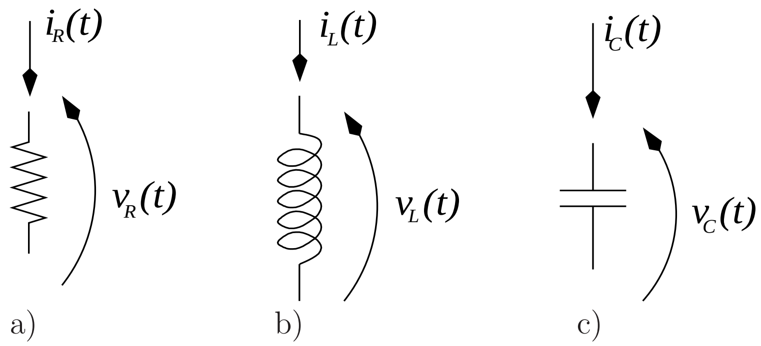

Figura 9: Bipolos R, L, e C ideais.

Suponha que uma tensão

$$v_C(t) = V_C \cos(\omega t + \phi_C)$$

seja aplicada ao capacitor. Então, lembrando que

$$i_C(t) = C \frac{\mathrm{d}\, v_C}{\mathrm{d}\, t}(t),$$

e usando a propriedade 3 vista anteriormente, concluímos que

$$\left.\begin{array}{l} \hat{V}_C = V_C e^{j\phi_C} \\ \hat{I}_C = Cj\omega V_C e^{j\phi_C} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\hat{V}_C}{\hat{I}_C} = \frac{1}{j\omega C}}$$

Para o caso do indutor, podemos usar dualidade: se a *corrente* no indutor for

$$i_L(t) = I_L \cos(\omega t + \phi_L),$$

então a tensão será

$$v_L(t) = L \frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t}(t),$$

e novamente

$$\left.\begin{array}{l}\hat{I}_L = I_L e^{j\phi_L} \\ \hat{V}_L = Lj\omega I_L e^{j\phi_L}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\hat{V}_L}{\hat{I}_L} = j\omega L}$$

Veja que as relações *fasoriais* para indutores e capacitores têm a mesma forma que a Lei de Ohm! Chegamos então a uma generalização da Lei de Ohm para sinais senoidais, e definimos a razão $Z(j\omega) = \hat{V}/\hat{I}$ em um bipolo como a sua *impedância*. Portanto, um resistor ideal com resistência R tem uma impedância puramente real

$$Z_R = R.$$

Um indutor com indutância L tem uma impedância imaginária

$$Z_L = j\omega L,$$

em que ω é a freqüência do sinal senoidal (de tensão ou de corrente) sendo aplicado ao indutor. Finalmente, um capacitor C tem impedância

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}.$$

Da mesma forma que a condutância é o inverso da resistência, define-se a *admitância* de um bipolo como o inverso de sua impedância (ou, mais diretamente, como a razão $Y(j\omega) = \hat{I}/\hat{V}$). Assim, a admitância de um resistor é real e igual à sua condutância,

$$Y_R = \frac{1}{R} = G,$$

a admitância de um indutor é

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L},$$

e finamente, a admitância de um capacitor é dada por

$$Y_C = j\omega C.$$

Estas relações podem ser usadas para resolver diretamente circuitos com resistores, capacitores e indutores ideais em que todas as excitações são senoidais e de mesma freqüência, usando os mesmos métodos aplicados para resolver circuitos resistivos com excitação contínua, mas trabalhando com números complexos em lugar de números reais. Vamos ver como, resolvendo novamente o circuito da figura 2, agora usando fasores.

A tensão do gerador era $v(t) = 180\cos(2\pi 60t + 30°)$ (V,s), portanto temos $\hat{V} = 180e^{j30°}\text{V} = 180|\underline{30°}\text{V}$. Assim, usando as relações acima temos (acompanhe as contas com a Fig. 10)

$$\begin{aligned}\hat{I}_R &= \frac{180|\underline{30°}\text{V}}{1k\Omega} = 0{,}18|\underline{30°}\text{A}, \\ \hat{I}_C &= j2\pi 60(1\mu F)\big(180|\underline{30°}\big) = 0{,}06786|\underline{30° + 90°} = 0{,}06786|\underline{120°}\text{A}.\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_R + \hat{I}_C = 0{,}1924|\underline{50{,}6564°}\text{A},$$

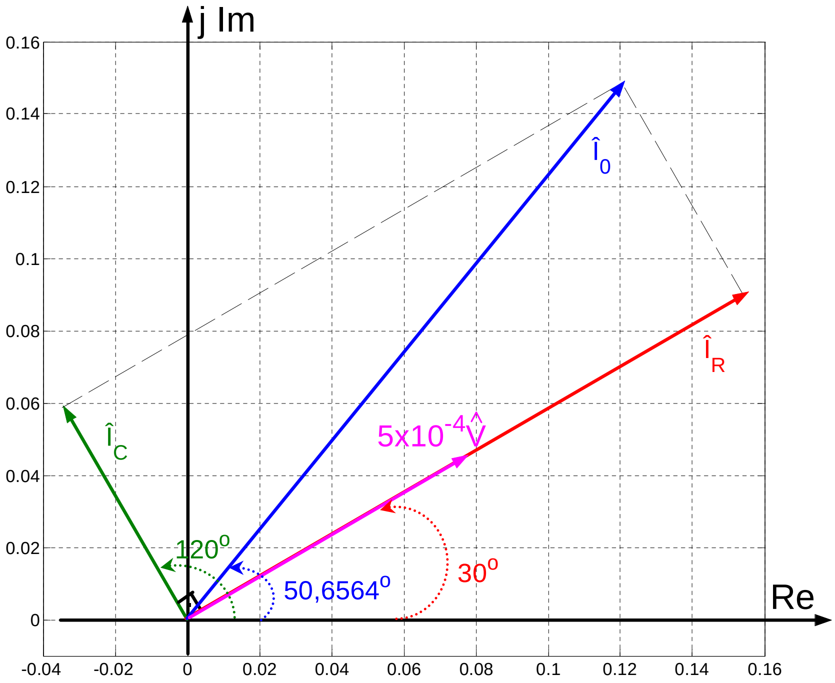

Figura 10: Cálculo de $\hat{I}_0$ (atente para a relação entre o fasor da tensão e os das correntes no capacitor e no resistor).

e

$$i_0(t) = 0{,}1924\cos(2\pi 60t + 50{,}6564°)(\text{A,s}).$$

Uma dúvida que pode surgir aqui é a seguinte: usando as relações de impedância e admitância, obtivemos $\hat{I}_C = 0{,}06786|\underline{\ 120°}$, no entanto anteriormente havíamos obtido $\hat{I}_C = 0{,}06786|\underline{\ -240°}$! Nada está errado: volte para o círculo unitário, e verifique que $120° = -240°$.

Referências

[1] PROAKIS, J. G. *Digital Communications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2001.

[2] ANTONIOU, A. *Digital Filters: Analysis, Design, and Applications*. 2nd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1993.

[3] LEPAGE, W. R. *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. [S.l.]: Dover, 1980.