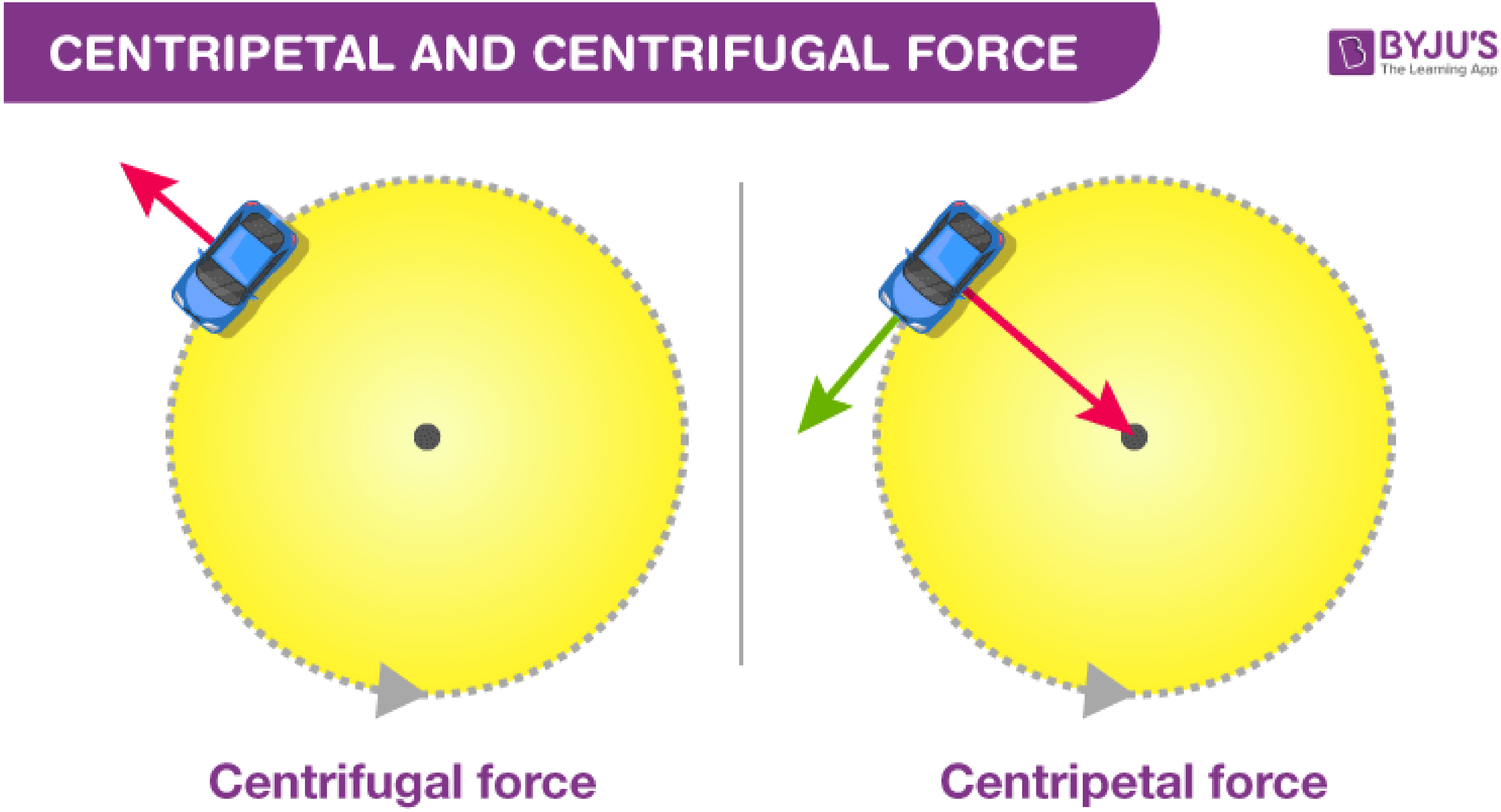
Potencial da Força Centrífuga

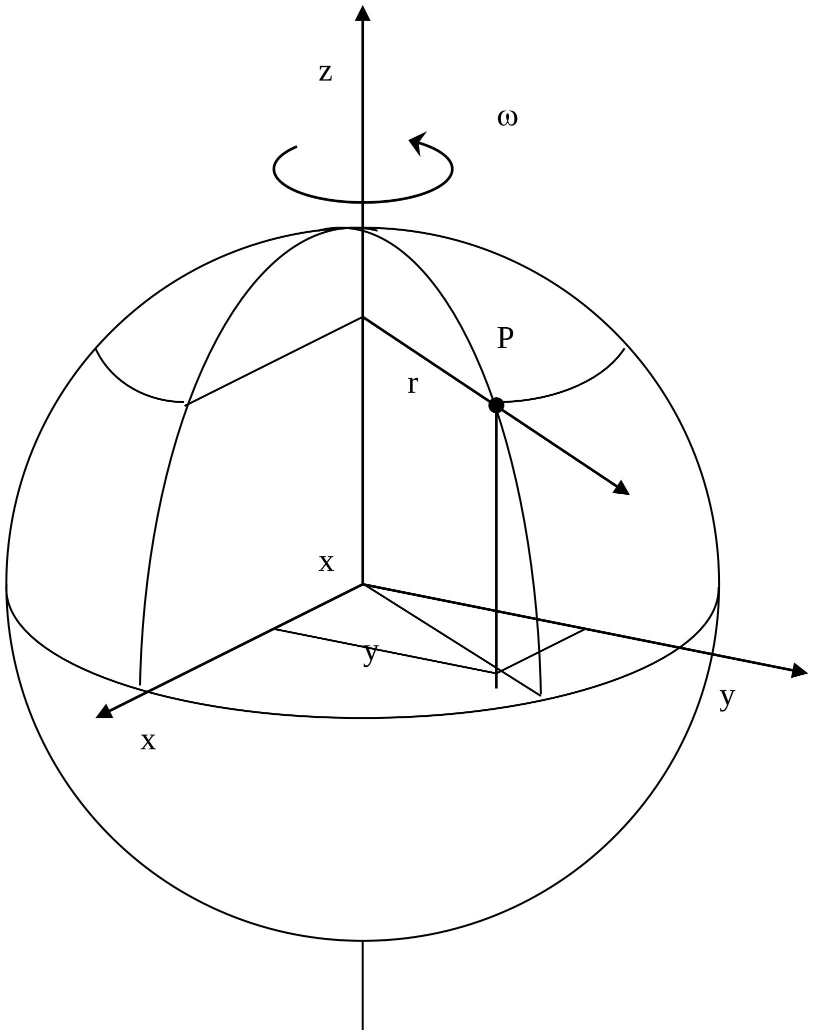


A massa m, na posição P, sobre um corpo em movimento de rotação com velocidade angular constante ω, percorre um elemento de distância ΔS sobre a circunferência de raio r, no deslocamento angular $\Delta\theta$. A relação entre esses elementos é dada por

$$\Delta S = \Delta \theta \, r$$

com

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Representando por Δt o tempo decorrido no deslocamento, podemos escrever

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}\, r$$

no limite quando Δt ➔0, resulta

$$v = \omega\, r$$

sendo *v* a velocidade escalar e ω a velocidade angular.

O movimento de rotação imprime à massa unitária, em P, uma aceleração, cujas componentes normal e tangencial à sua trajetória são expressas por

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{r} \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Isto significa que, no movimento de rotação do corpo, a massa unitária está sob a ação de uma força normal à sua trajetória, denominada força centrífuga, que tem a expressão

$$\vec{f} = \omega^2 \vec{r}$$

O potencial da força centrífuga é a função escalar ϕ, definida por

$$\phi = \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

tal que

$$\vec{f} = grad(\phi)$$

representa o campo gerado no movimento de rotação do corpo.

O laplaciano de $\boldsymbol{\phi}$ é dado por

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Temos, então

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^2 x\right) = \omega^2$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega^2 y\right) = \omega^2$$

e, portanto

$$\boxed{\nabla^2\phi = 2\,\omega^2}$$

Como $\nabla^2\phi \neq 0$, o potencial centrífugo não satisfaz a equação de Laplace e, por isso, não é uma função harmônica.

Uma função $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada *harmônica* num certo domínio D se suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem forem contínuas em D e H satisfaz a equação diferencial

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} = 0$$

conhecida como *equação de Laplace*. No que segue, estamos interessados no caso em duas dimensões $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0 \ , \tag{17}$$

Falar sobre unicidade da solução.

Funções harmônicas possuem a notável propriedade de que se você traçar um círculo ao redor de um ponto, e encontrar o valor médio da função dentro deste círculo, este valor é sempre igual ao valor da função no centro deste círculo, que é igual a média do valor da função na fronteira. Desde que a função esteja definida dentro de todo o círculo e em sua fronteira. Esta propriedade pode ser usada para resolver, de forma iterativa, o *problema de Dirichlet*, i.e., fixada a condição na fronteira, qual o valor da função numa região.