Campo da Gravidade Normal

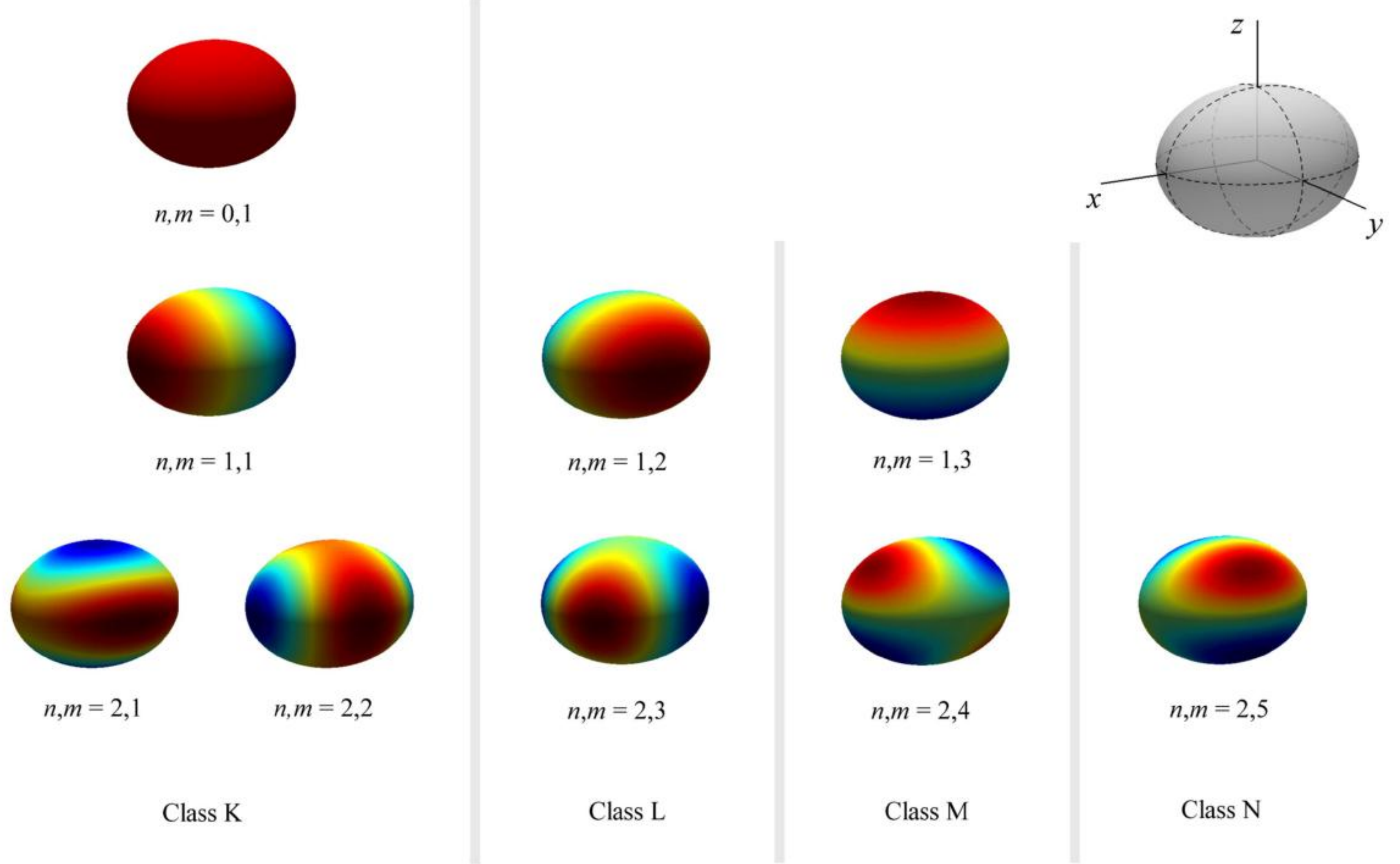


Figure 2. Surface ellipsoidal harmonics up to degree two. The degree-zero harmonic indicates constant potential on the ellipsoid. Harmonics of classes L and M exist from degree one; class N is present from degree two. We designate degree-two harmonics of class K as zonal and sectoral harmonics; three others are tesseral harmonics. The scale of variation on the ellipsoid is arbitrary.

Entenderemos por Terra Normal um elipsoide de revolução biaxial ao qual se atribui a mesma massa M e a mesma velocidade angular ω da Terra e tal que o esferopotencial U seja uma função constante sobre a superfície limitante, isto é,

$$U = C$$

O esferopotencial U é a soma do potencial de atração gravitacional V e do potencial devido à força centrífuga ϕ

$$U = V + \phi$$

Para facilitar a formulação, vamos admitir a Terra Normal com massa distribuída axialmente simétrica em torno do eixo de rotação, simétrica em relação ao plano do equador, e com centro de gravidade coincidente com o CG da Terra.

As superfícies equipotenciais do campo da gravidade normal são denominadas **esferopes**.

Pelo teorema de Stokes, o campo externo da gravidade normal não se altera quando há uma redistribuição de massa no interior da Terra Normal, desde que a superfície limitante satisfaça a condição de esferope. Em outras palavras: o campo exterior da gravidade normal ficará definido se forem conhecidas a massa M e a velocidade angular ω da Terra Normal, e, com isso, ficar definido o esferopotencial na sua superfície limitante.

As dimensões da Terra normal serão aquelas da superfície de referência adotadas para os cálculos geodésicos. No Sistema Geodésico de Referência adotado em 1967, por exemplo, temos um semi-eixo maior **a** = 6378160 m e um achatamento polar α tal que

$$\alpha = \frac{1}{298{,}247}$$

O <u>teorema de Stokes</u> estabelece que uma função harmônica V(x,y,z) <u>no exterior</u> de uma superfície S é determinada <u>unicamente por seu valor na superfície S</u>.

Tomando a 1ª Identidade de Green

$$\iiint_v U\,\Delta V\,dv + \iiint_v \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dv = \iint_S U\,\frac{\partial V}{\partial n}\,dS.$$

e fazendo as duas funções *U* e *V* iguais a U, temos

$$\iiint_v U\,\Delta U\,dv + \iiint_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv = \iint_S U\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS$$

(nesta notação, **Δ**U denota o laplaciano de U)

Supondo que uma determinada distribuição de massa, delimitada pela superfície S, gere no espaço tridimensional um potencial V(x,y,z), vamos admitir que uma nova distribuição de massa no interior de S gere no espaço um novo potencial V'(x,y,z), mas que na superfície S mantenha os mesmos valores da primeira. Queremos provar que V'(x,y,z) é idêntica a V(x,y,z) em todo o espaço.

Nesta situação, U = V – V' é nula na superfície S. Usando a 1ª Identidade de Green com U e V iguais a U:

$$\iiint_v U\,\Delta U\,dv + \iiint_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv = \iint_S U\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS$$

Vamos aplicar a equação ao exterior da superfície S. Como U é a diferença de duas funções harmônicas (V e V'), ela também é uma função harmônica.

Nestas condições, **Δ**U (o laplaciano de U) é nulo no exterior de S.

Adicionalmente, U = V – V’ é nulo na superfície S, por hipótese.

$$\iiint_v U\,\Delta U\,dv + \iiint_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv = \iint_S U\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS$$

A relação fica então

$$\iiint_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv = 0$$

Esta equação só é válida se todas as derivadas forem nulas, pois os integrandos são positivos ou nulos. Assim, U(x,y,z) é uma função que tem todas as suas derivadas nulas, ou seja, é uma função constante. Como U = V – V’, isso significa que V – V’ = constante, e basta conhecer o seu valor em um local para saber o valor em todo o espaço.

Mas U(x,y,z) é harmônica, e, portanto, no infinito possui valor zero. Assim, U(x,y,z) é identicamente nula em todo o espaço, e, por consequência, V(x,y,z) = V'(x,y,z) em todo o espaço exterior à distribuição de massa.

O teorema de Stokes estabelece que uma função harmônica V(x,y,z) no exterior de uma superfície S é determinada de forma única por seu valor na superfície S. Em outras palavras, só existe uma função harmônica V(x,y,z) que assume determinados valores em uma superfície S, ou seja, desde que exista tal função harmônica, ela é única.

Assim, o campo exterior da gravidade normal ficará definido se forem conhecidas a massa M e a velocidade angular ω da Terra Normal, e, com isso, ficar definido o esferopotencial na sua superfície limitante.

O campo da gravidade normal, expresso em termos do esferopotencial, tem a forma

$$\vec{\gamma} = gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

e

$$div\ \vec{\gamma} = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

com

$$\gamma_x = \frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ \gamma_y = \frac{\partial U}{\partial y}\ ,\ \gamma_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

No exterior da Terra Normal, devemos ter

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ \nabla^2 \phi &= 2\omega^2 \end{aligned}\right\}$$

sendo que ω representa a velocidade angular da Terra Normal, naturalmente igual à da Terra.

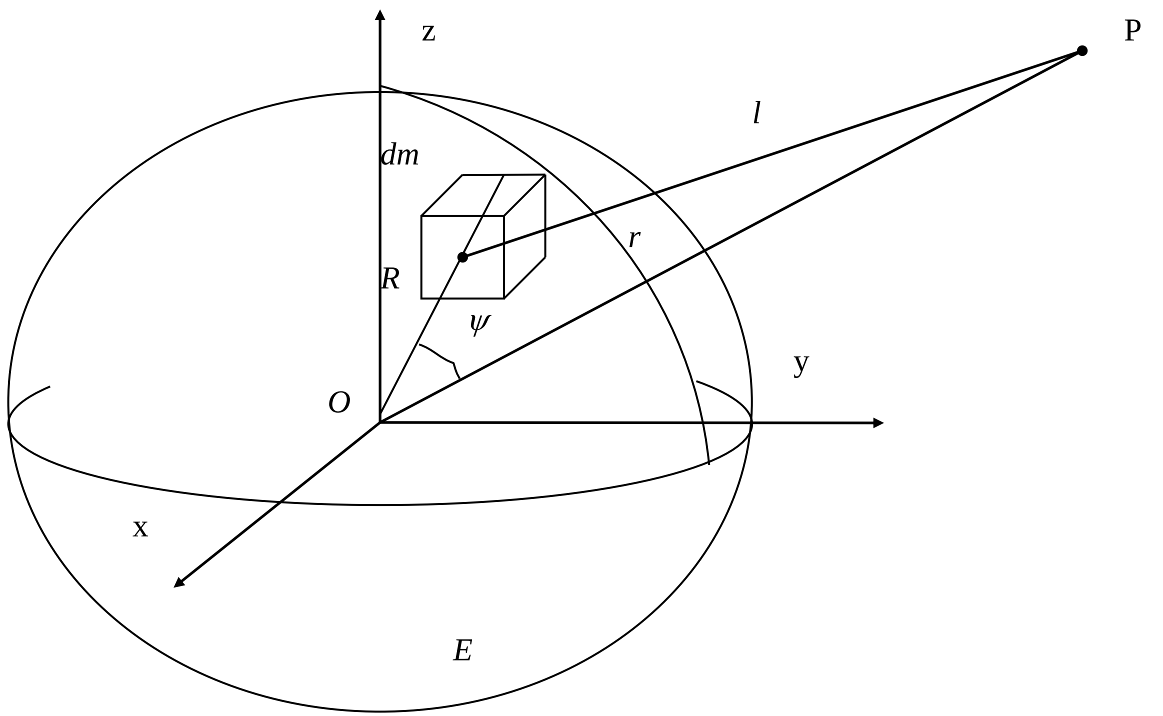
O esferopotencial devido à força centrífuga é dado por

$$\phi = \tfrac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

que provém da força

$$\vec{f} = grad\phi = \omega^2\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right)$$

Para calcular o <u>esferopotencial de atração</u>, consideremos um elemento de massa dm(ξ,η,ζ) e uma partícula de prova em P(x,y,z). Então, o potencial de atração será



$$V = G\int_E \frac{dm}{l}$$

com *l* representando a distância entre o elemento de massa e a partícula de prova.

Lembrando que

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left[P_0(\psi) + \frac{R}{r}P_1(\psi) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\psi) + \ \dots\right]$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}}\ P_n(\psi)$$

sendo que $P_1(\psi)$, $P_2(\psi)$, ..., $P_n(\psi)$ são os polinômios de Legendre.

Podemos então escrever o esferopotencial de atração na forma

$$V = \frac{G}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi)\, dm$$

ou

$$V = \frac{G}{r}\int_E dm + \frac{G}{r^2}\int_E R\,P_1(\psi)\,dm + \frac{G}{r^3}\int_E R^2\,P_2(\psi)\,dm + \cdots$$

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$

O termo de grau zero

$$\boxed{V_0 = \frac{G}{r}\int_E dm = \frac{G\,M}{r}}$$

representa o potencial de atração produzido por uma esfera homogênea de massa M sobre a partícula de prova P, a uma distância r do centro de gravidade. M é a massa da Terra Normal, que admitimos ser igual à massa da Terra, <u>incluindo a massa da atmosfera</u>.

Considerando o termo de grau 1

$$V_1 = \frac{G}{r^2} \int_E R \, P_1(\psi) \, dm$$

$P_1(\psi)$ pode ser expresso em coordenadas retangulares como

$$P_1(\psi) = \cos\psi = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R \, r}$$

e, assim

$$V_1 = \frac{G}{r^3}\left(x \int_E \xi \, dm + y \int_E \eta \, dm + z \int_E \zeta \, dm \right)$$

$$V_1 = \frac{G}{r^3}\left(x \int_E \xi \, dm + y \int_E \eta \, dm + z \int_E \zeta \, dm \right)$$

As integrais que aparecem entre os parênteses representam os momentos estáticos da Terra Normal em relação a Ox, Oy, Oz, que são nulos quando o sistema cartesiano tem a origem coincidente com o centro de gravidade. Este é o nosso caso, então $\boxed{V_1 = 0.}$

O termo de grau 2 é dado por

$$V_2 = \frac{G}{r^3} \int_E R^2 \, P_2(\psi) \, dm$$

$$V_2 = \frac{G}{r^3} \int_E R^2 \, P_2(\psi)\, dm$$

Desenvolvendo o termo de $P_2(\psi)$ e rearranjando, ficamos com

$$V_2 = \frac{G}{2r^5}[x^2(B+C-2A)+y^2(A+C-2B)+z^2(A+B-2C)+$$
$$+6\,y\,z\,D+6\,x\,z\,E+6\,x\,y\,F]$$

sendo que A, B e C são os momentos de inércia e D, E e F são os produtos de inércia da Terra Normal em relação aos eixos Ox, Oy, Oz.

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_E \left(\eta^2 + \zeta^2\right) dm \\ B &= \int_E \left(\xi^2 + \zeta^2\right) dm \\ C &= \int_E \left(\xi^2 + \eta^2\right) dm \end{aligned}\right\}$$

A, B, C ... momentos de inércia

$$D = \int_E \eta\zeta \, dm; \quad E = \int_E \xi\zeta \, dm; \quad F = \int_E \eta\xi \, dm$$

D, E, F ... produtos de inércia

Convém lembrar que todas as integrais são <u>integrais de volume</u> sobre a Terra Normal.

Devido à simetria do elipsoide de revolução, os eixos cartesianos são os eixos principais de inércia, o que anula os produtos de inércia

$$D = E = F = 0$$

e torna os momentos de inércia em relação ao eixo equatorial iguais

$$A = B$$

Desta forma

$$V_2 = \frac{G}{2r^5}[x^2(B+C-2A)+y^2(A+C-2B)+z^2(A+B-2C)+$$

$$+6\,y\,z\,D+6\,x\,z\,E+6\,x\,y\,F]$$

fica, então

$$V_2 = \frac{G}{2r^5}\left[(C-A)\left(x^2+y^2-2z^2\right)\right]$$

Usando as coordenadas esféricas r, θ e λ, relacionadas às cartesianas por

x = r sen θ cos λ
y = r sen θ sen λ
z = r cos θ

obtemos

$$V_2 = \frac{G}{2r^3}[(C - A)(1 - 3\,cos^2\theta)]$$

$$\boxed{V_2 = -\frac{G}{r^3}[(C - A)\,P_2(\theta)]}$$

Consideremos agora o termo de terceiro grau. Para expressá-lo em coordenadas esféricas, basta introduzir os harmônicos esféricos de superfície, que são constituídos de zonais (função de θ) e as funções associadas de Legendre, que são os tesserais e setoriais (estas dependentes de θ e λ).

A simetria do modelo adotado implica na nulidade dos setoriais e tesserais, pois não pode haver dependência da longitude, restrição que naturalmente se estende às funções associadas de Legendre de qualquer grau. O zonal de 3º grau, por exemplo, só contém potências ímpares de θ:

$$P_3 = \tfrac{5}{2}\left(\cos^3\theta - \tfrac{3}{5}\cos\theta\right)$$

(lembre-se que θ é a distância polar, ângulo complementar à latitude!)

cujo sinal depende do sinal da latitude, o que contraria a simetria equatorial (plano xOy) da Terra Normal. Esta observação se aplica a todos os zonais de ordem ímpar.

Portanto, o esferopotencial de atração se restringe aos zonais pares $P_{2n}(\theta)$

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\theta) - J_4\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\theta) - J_6\left(\frac{a}{r}\right)^6 P_6(\theta) + \ \dots\right]$$

com

$$J_2 = \frac{C-A}{M\,a^2}$$

$$J_4 = \frac{1225}{64M\,a^4}\int_E R^4\left(\cos^4\theta - \tfrac{6}{7}\cos^2\theta + \tfrac{3}{35}\right)dm$$

sendo *a* o semi-eixo maior da Terra Normal.

Podemos então escrever o esferopotencial como

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\theta)\right] + \tfrac{1}{2}(\omega\, r \,\mathrm{sen}\, \theta)^2$$

Se os coeficientes J_{2n} forem conhecidos, podemos determinar o esferopotencial em qualquer ponto exterior em função de suas coordenadas r e θ.

O coeficiente J_2, por exemplo, vinculado ao achatamento terrestre, é cerca de mil vezes maior que os restantes e tem sido objeto de determinações rigorosas. Hoje este coeficiente desempenha papel importante em Geodésia e Astronomia e, por isso, o valor $J_2 = 10827 \times 10^{-7}$ figura no Sistema de Constantes Astronômicas da U.A.I e consta na definição do Sistema Geodésico de Referência – 1967 (Resolução nº 1 da Assembleia Geral da U.G.G.I de Lucerne)

O achatamento α do modelo (Terra Normal), que tem no sistema de 1967 o valor α^{-1} = 298,247, ou α = 0,0033529237, agora é grandeza derivada do J_2

$$J_2 = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2}{21}\alpha\, m$$

sendo *m* a relação entre a força centrífuga e a força gravitacional no equador.