Segunda Lista de Exercícios – Macroeconomia IV

Mauro Rodrigues

Departamento de Economia – FEA/USP

1. Considere uma economia composta por um grande número de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. O agente representativo possui as seguintes preferências:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, \ell_t, g_t)$$

Em que c_t representa consumo, ℓ_t representa horas de lazer (ou $n_t = 1 - \ell_t$ é o número de horas de trabalho), e g_t representa o consumo de um bem público. A função u é estritamente crescente e côncava em cada um de seus argumentos. A restrição orçamentária é dada por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t[c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t] \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t[(1-\tau_{nt})w_t n_t + (1-\tau_{kt})r_t k_t]$$

Em que τ_k e τ_n são as alíquotas de imposto sobre as rendas do capital e do trabalho, respectivamente. Além disso w_t, r_t e q_t denotam respectivamente o salário, o aluguel do capital e o preço de uma unidade de consumo/investimento no período t. Normalize $q_0 = 1$. Tomando como dadas as sequências de preços e alíquotas de imposto, e o estoque de capital inicial $k_0 > 0$, o consumidor escolhe sequências de consumo, horas de trabalho e capital $\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de modo a maximizar U, sujeito à restrição orçamentária.

Além disso, uma firma representativa contrata serviços de capital e trabalho para gerar produto, operando a função de produção $F(k, n)$, caracterizada por retornos constantes de escala. As quantidades de insumos são tais que, para dados preços, o lucro é máximo. Finalmente, a restrição orçamentária do governo e a restrição de recursos da economia são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} q_t(w_t \tau_{nt} n_t + r_t \tau_{kt} k_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t \\
c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t &= F(k_t, n_t)
\end{aligned}$$

(a) Escreva o problema do consumidor. Derive as condições de primeira ordem.

(b) Escreva o problema da firma. Derive as condições de primeira ordem.

(c) Defina o equilíbrio competitivo.

(d) Derive a restrição de implementabilidade.

(e) Escreva o problema de Ramsey, tomando o imposto sobre o capital inicial τ_{k0} como dado. Derive as condições de primeira ordem (note que, neste caso, a sequência de gastos $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$ é uma variável de escolha para o governo).

(f) Suponha que exista um estado estacionário. Qual deve ser o imposto sobre a renda do capital no longo prazo?

(g) Suponha agora que a função utilidade instantânea seja dada por:

$$u(c, \ell, g) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + v(\ell, g)$$

O que é possível afirmar a respeito do imposto sobre a renda do capital ao longo do tempo? (nesse caso, não suponha que a economia encontre-se em estado estacionário)

(h) O que aconteceria se o governo pudesse escolher o imposto sobre o capital em $t = 0$?

2. (Kydland & Prescott, 1977; Barro & Gordon, 1983) Considere uma economia caracterizada por uma curva de Phillips:

$$Y_t = Y_n + \alpha(\pi_t - \pi_t^e), \qquad \alpha > 0$$

Em que Y_t é o produto, Y_n é o produto potencial, π_t é a taxa de inflação e π_t^e é a taxa de inflação esperada. Em um dado período t, a sequência de eventos é a seguinte: 1) o governo anuncia uma taxa de inflação; 2) o público forma expectativas π_t^e; 3) o governo determina a taxa de inflação e, consequentemente, o produto. Dada a curva de Phillips, o governo escolhe π_t e Y_t de modo a minimizar a seguinte função perda:

$$L(\pi_t, Y_t) = \frac{1}{2}\lambda(Y_t - Y^*)^2 + \frac{1}{2}(\pi_t - \pi^*)^2, \quad \lambda > 0$$

Em que Y^* e π^* são os níveis preferidos de produto e inflação, e $Y^* > Y_n$. Suponha, inicialmente, que este jogo ocorra uma única vez.

(a) Suponha que o governo possa se comprometer com a taxa de inflação anunciada. Calcule o produto e a inflação de equilíbrio? Qual é a perda do governo?

(b) Refaça a parte (a), assumindo que o governo NÃO se compromete com o anúncio. Compare a perda do governo nos dois casos.

Suponha agora que este jogo se repita para sempre. O governo não possui tecnologia de comprometimento. A perda do governo, ao longo do tempo, é dada por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(\pi_t, Y_t), \quad 0 < \beta < 1$$

(c) Caracterize um equilíbrio tal que, para β suficientemente alto, é possível sustentar a solução de comprometimento.

3. (Infra-estrutura) O tempo é discreto e indexado por $t \in \{0, 1, 2, ...\}$. Considere uma economia povoada por um grande número de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. A produção é gerada utilizando dois insumos: capital físico (k_t) e infra-estrutura pública (h_t).

Em cada ponto do tempo, o consumidor representativo recebe a renda do capital (líquida de impostos), alocando-a entre consumo e investimento. Desta forma, a restrição orçamentária em t é:

$$c_t + k_{t+1} \leq (1 - \tau) r_t k_t + \Pi_t$$

Em que τ é a alíquota de imposto sobre a renda do capital (constante ao longo do tempo), $0 \leq \tau \leq 1$. Além disso, r_t é a taxa de aluguel do capital e Π_t é o lucro da firma representativa. Por simplicidade, o capital deprecia completamente entre dois períodos quaisquer. O governo investe a receita de impostos em infra-estrutura, isto é:

$$h_{t+1} = \tau r_t k_t$$

Preferências e tecnologia são dadas respectivamente por:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t, \qquad 0 < \beta < 1$$

$$c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) = A k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}, \qquad A > 0$$

Em que F satisfaz retornos constantes de escala e as condições de Inada. Além disso, $k_0 > 0$ e $h_0 > 0$ são dados.

(a) Escreva o problema do consumidor representativo. Obtenha as condições de ótimo.

Uma firma representativa opera a função de produção F, contratando serviços de capital de modo a maximizar seus lucros (ela não precisa pagar para usar a infra-estrutura pública).

(b) Escreva o problema da firma representativa. Obtenha a condição de primeira ordem.

(c) Defina o equilíbrio competitivo.

Suponha que a economia encontre-se em uma trajetória de crescimento balanceado, ou seja:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{h_{t+1}}{h_t} = 1 + g$$

(d) Explique porque esta economia pode exibir uma taxa de crescimento positiva no longo prazo, mesmo na presença de retornos marginais decrescentes para ambos os insumos.

(e) Calcule a taxa de crescimento g e a razão k/h, em função dos parâmetros desta economia.

(f) Analise como τ afeta g e k/h. Interprete intuitivamente. Calcule a alíquota de imposto τ^* que maximiza a taxa de crescimento.

Agora calcularemos a alocação eficiente dessa economia. Para tanto, resolveremos o problema do planejador central.

(g) Monte o problema do planejador central. Obtenha as condições de ótimo.

(h) Suponha novamente a economia em uma trajetória de crescimento balanceado. Encontre a taxa de crescimento g e a razão k/h do planejador central.

(i) Com base nas expressões encontradas nas partes (f) e (h), encontre a alíquota de imposto que implementa a solução eficiente (i.e., a do planejador central). Como esta alíquota se compara com τ^*, que você encontrou em (f)? Interprete intuitivamente.

4. (Eficiência no modelo de Romer, 1990) Considere o modelo de crescimento de Romer (1990). Em sala mostramos que, em uma trajetória de crescimento balanceado, a taxa de crescimento é dada por:

$$g = \frac{\lambda L \alpha - \rho}{\gamma + \alpha}$$

em que:

λ : parâmetro da função de produção de pesquisa

L : número total de trabalhadores

γ : taxa de aversão relativa ao risco do consumidor representativo

ρ : taxa de impaciência do consumidor representativo

α : parâmetro da função de produção do bem final

(a) Discuta intuitivamente como g varia em função de λ, L, γ e ρ.

Na versão do modelo discutida em sala, supomos uma estrutura de mercado para determinar a taxa de crescimento de longo prazo. Suponha, alternativamente, que o problema seja resolvido por um planejador central, o qual maximiza a utilidade do agente representativo:

$$U_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$
\begin{aligned}
\dot{K}_t &= Y_t - C_t = (L_{Y,t})^{\alpha} \int_0^{A_t} x_t(i)^{1-\alpha} di - C_t \\
K_t &= \int_0^{A_t} x_t(i) di \\
\dot{A}_t &= \lambda A_t L_{A,t} \\
L_{A,t} + L_{Y,t} &= L
\end{aligned}
$$

Em que K_0 e A_0 são dados. Para simplificar o problema, suponha que todos os insumos diferenciados possuem a mesma produção, ou seja, $x_t(i) = \overline{x}_t$.

(b) Encontre as condições de ótimo de planejador central.

Suponha agora uma trajetória de crescimento balanceado, em que:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} = g^*$$

Além disso, L_A, L_Y e $\overline{x}$ são constantes ao longo do tempo.

(c) Calcule g^* como função dos parâmetros desta economia.

(d) Mostre que $g^* > g$. Interprete intuitivamente.

5. Prove a Proposição 14.3 em Acemoglu (2009).