4302204- Física Matemática I

Elcio Abdalla

Lista 2 de Física Matemática I

Entregar até dia 13/10

1. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \quad .$$

2. Mostre que

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 \quad ,$$

sendo $f(x)$ monotônica decerscente e $f(n) = a_n$, por fim discuta a convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad .$$

3. Teste para convergência

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \qquad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

4. Por

$$B_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \quad ,$$

mostre que

$$(a)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad\qquad (b)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

5. A lei de radiação do corpo negro de Planck envolve a integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx \quad .$$

Mostre que isso é igual a $6\zeta(4)$ (use o resultado do exercício acima para a $\zeta(4)$).

6. Mostre que

$$(a)\tanh\frac{z}{2} = \frac{\sinh x + i\sin y}{\cosh x + \cos y} \qquad\qquad (b)\coth\frac{z}{2} = \frac{\sinh x - i\sin y}{\cosh x - \cos y}$$

7. A equação de movimento de uma massa m **em relação a um sistema de coordenadas em rotação** é

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - 2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - m\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right) \quad .$$

Considere o caso $\boldsymbol{F} = 0$, $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$, e $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$, com ω constante. Mostre que a substituição do $\boldsymbol{r}$ acima por $z = x + iy$ leva a

$$\frac{d^2z}{dt^2} + i2\omega\frac{dz}{dt} - \omega^2 z = 0 \quad .$$

Nota: Essa equação diferencial ordinária pode ser resolvida pela substituição de $z = fe^{i\omega t}$.

8. Mostre

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad .$$

9. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx \quad .$$

   Disserte sobre a importancia do sinal da exponencial, isto é, e^{ikr} e e^{-ikx} no calculo da integral.

10. Esboce o gráfico aproximado da função gama, $\Gamma(x)$, sobre a parte positiva do eixo real, calculando alguns pontos.