Desafio VII

Nesse desafio vamos explorar algumas técnicas de resolução de exercícios em relatividade restrita. Será extremamente útil para que vocês criem afinidade com a matéria e também possam começar a explorar quais os métodos mais eficazes para atacar um problema.

① Vocês verão no futuro como um processo físico, e.g. uma colisão, pode ser descrita na teoria moderna de teoria quântica de campos. Nessa descrição, qualquer interação fundamental é descrita pela troca de partículas e o alcance da força é determinado pela massa da partícula mediadora. Por exemplo, no eletromagnetismo, como o fóton é uma partícula sem massa, a interação tem um alcance infinito, enquanto que a interação fraca, por exemplo, tem um alcance pequeno ja que é intermediada por bósons massivos chamados W e Z.

Hideki Yukawa, é famoso por ter introduzido um potencial análogo ao de Coulomb levando em conta essa limitação de alcance devido à massa do mediador. O potencial, denominado potencial de Yukawa, tem a forma

$$V_{\text{Yukawa}}(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r}. \tag{1}$$

Ele propôs a existência de uma partícula, que por ter sua massa entre a do elétron e do próton, foi denominada méson, que seria o mediador da força nuclear forte. Utilizando o raio atômico como o alcance da força, ele colocou um limite na massa do méson. Em 1937, Carl D. Anderson e Seth H. Neddermeyer, encontraram uma partícula que preenchia a maioria dos requisitos de Yukawa. Porém, com o tempo, notaram que essa partícula interagia fracamente com protons e neutrons, o que a descartava como um possível candidato.

Apenas em 1947, a colaboração liderada por Cecil F. Powell, Giuseppe Occhialini e o brasileiro César Lattes, conseguiram esclarecer o problema. O grupo conduziu o experimento no topo do monte Chacaltaya, à uma altura de 5.500 m acima do nível do mar. Os resultados apontaram para a existência de dois mésons de massa diferente. O primeiro méson, o mais pesado, decaía prontamente no segundo méson, que era a partícula que atingia os experimentos anteriores. Para distinguir as duas partículas o méson mais pesado foi denominado mesón π, ou píon, e o segundo méson μ. Testes posteriores mostraram que o méson π satisfazia todos requerimentos da partícula proposta por Yukawa. Na visão moderna, um méson é uma partícula formada por um par de quark e antiquark, o méson μ na verdade não se encaixa nessa categoria, essa partícula é o que conhecemos hoje como o múon e na classificação moderna ele é um lépton, assim como o elétron.

Nesse problema vamos estudar o decaimento dos píons! Considere que essa partícula está em repouso e decaí em um múon e um neutrino, por exemplo

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu. \tag{2}$$

Queremos determinar a velocidade do múon resultante.

a) Vamos à primeira estratégia, utilize conservação de energia e momento, nesse item não deve ser utilizado todo arcabouço de quadrivetores, apenas as leis de conservação com as modificações necessárias para um problema relativístico. Determine a velocidade do muon em função de sua massa e da do píon. A massa do neutrino pode ser desprezada.

b) Interprete o resultado em termo das massas, faz sentido se tivéssemos $m_\pi < m_\mu$? Sim? Não? Porque?

c) Agora vamos explorar uma solução mais concisa e atrativa. Para isso escreva a conservação de momento e energia em uma notação de quadrivetores.

d) Agora vamos fazer uso do produto invariante por transformações de Lorentz: $\sum_{\mu=0}^{4} p^\mu p_\mu = p_0 p^0 - \mathbf{p}.\mathbf{p}$. Mostre que, de fato, a mudança de referencial

$$\begin{aligned} p_x' &= \gamma(p_x - \beta p_0), \\ p_y' &= p_y, \\ p_z' &= p_z, \\ p_0' &= \gamma(p_0 - \beta p_x), \end{aligned}$$

onde $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ e $p_0 = E/c$, realmente deixa o produto $\sum_{\mu=0}^{4} p^\mu p_\mu$ invariante.

e) Tire proveito do item anterior e do fato de que estamos desprezando a massa do neutrino, para encontrar o momento do muon de maneira mais direta. Você pode então calcular a velocidade com a informação sobre a energia do item a).

f) A massa do píon é $m_\pi = 139.5$ MeV/c^2 e a do múon é $m_\mu = 105.6$ MeV/c^2, calcule a velocidade do múon emitido no decaimento.

② Os aceleradores de partículas são muito utilizados em física de partículas para estudar os constituintes fundamentais da matéria. Com a ajuda de campos elétricos e magnéticos de extrema potência, os aceleradores propulsionam e focam feixes de partículas carregadas, geralmente prótons ou elétrons, a energias altíssimas. Esses feixes são direcionado para a colisão com um alvo fixo ou com outro feixe acelerado (colisores), produzindo uma extensa gama de novas partículas, que são identificadas com auxílio de diversos tipos de detectores.

Atualmente, o maior colisor de partículas do mundo, e também a maior máquina já produzida pela humanidade, é o LHC (*Large Hadron Collider*). Composto por um anel de 27 km de circunferência há uma profundidade de aproximadamente 175 m abaixo da fronteira entre Suiça e França, o LHC colide feixes de prótons acelerados até energias da ordem de 7 TeV (1 Tev = 10^{12} eV, em que 1 elétron-volt corresponde à quantidade de energia cinética ganha por um único elétron quando acelerado por uma diferença de potencial elétrico de um volt).

a) Considerando que os prótons do feixe alcançam uma energia cinética de 7 TeV e usando que a massa do próton é $m_p = 938.3$ MeV/c^2, calcule explicitamente o valor de $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ e da velocidade do próton (em termos da velocidade da luz c). Esses prótons são relativísticos?

Vamos agora estudar o benefício energético de direcionar os dois feixes de prótons opostos um ao outro de modo que eles colidam frontalmente, se comparado á técnica de colisão com alvo estático.

b) Primeiro, vamos começar analisando a situação com mecânica clássica. Neste caso, a energia cinética da partícula incidente é dada por $E = K = mv^2/2$, de forma que ao colidir com outra partícula idêntica em repouso, temos que a energia da colisão é igual a E. Se agora direcionarmos duas partículas com energia E, uma em direção à outra, mostre que a energia relativa $\bar{E} = 4E$, ou seja aumenta por uma fator de 4.

c) Consideremos agora o caso relativístico. Temos duas partículas idênticas de energia total E e massa m colidindo frontalmente. Mostre que

$$\bar{E} = \frac{2E^2}{mc^2} - mc^2 \tag{3}$$

ou seja, a energia relativa aumenta com o quadrado da energia do laboratório E.
Dica: vá para o referencial de repouso de uma das partículas para obter $\bar{E}$.

Na pratica, é a energia no referencial do centro-de-momento (CM) E_{cm} que está disponível para a criação de novas partículas. Utilizando cinemática relativística, vamos agora comparar a diferença nas energias do CM para colisões frontais e com alvo fixo. Para isso, vamos usar o invariante de Lorentz s, também chamado de variável de Mandelstam s, definido como

$$s := \frac{E_{cm}^2}{c^2} = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = \left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\right)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \tag{4}$$

em que os índices 1 e 2 se referem às partículas 1 e 2.

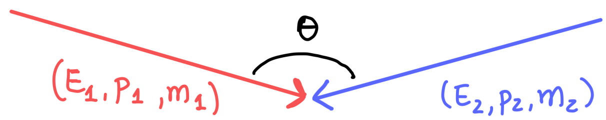

Figura 1: Colisão de duas partículas.

d) Considerando que as partículas colidem com um ângulo relativo θ (ver Figura 1), expresse a variável s em termos de $\theta, E_1, E_2, p_1, p_2, m_1, m_2$.

e) Para o caso do alvo fixo, temos que $p_2 = 0$. Obtenha E_{cm} em termos de E_1 e m_2, considerando a aproximação $E_1 >> m_1c^2, m_2c^2$.

f) Para o caso de colisão frontal ($\theta = \pi$), considere as aproximações $E_i >> m_ic^2$ e $E_i \approx p_ic$ $(i = 1, 2)$ para obter E_{cm} em termos de E_1 e E_2.

g) Utilize os resultados anteriores para calcular a energia no centro de massa E_{cm} considerando os parâmetros de colisão do LHC. Para o caso do alvo fixo, considere 1 próton com energia $E = 7$ TeV, colidindo com outro próton estático. Para o caso da colisão frontal considere dois prótons colidindo com energias $E = 7$ TeV. Qual tipo de colisão é mais vantajosa? Se quiséssemos obter a mesma energia E_{cm} para o caso do alvo fixo, qual deveria ser a energia E do próton incidente?