Revisão de conteúdo - teórico

A Lei de Coulomb

Na *eletrostática*, consideramos apenas configurações de cargas em repouso - nada varia com o tempo. A interação básica da eletrostática é então aquela entre duas cargas puntiformes em repouso no vácuo.

A investigação experimental direta da lei de forças foi feita em 1785 por Charles Augustin de Coulomb, com o auxílio de uma *balança de torção*. A força de interação pode ser calculada em termos do ângulo de rotação do ponteiro dado por:

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = -\vec{F}_{j,i}.$$

Princípio de superposição

A eletrostática é linear, ou seja, os efeitos das interações entre mais partículas se somam (superpõem). Assim, dado N cargas, a força sobre a i-ésima carga é dado por

$$\vec{F}_i = \sum_{j\neq i}^{N} \vec{F}_{i,j} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j\neq i}^{N} q_j \frac{\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}.$$

Podemos passar da descrição em termos de cargas puntiformes à descrição macroscópica em termos de cargas distribuídas sobre volumes. Se subdividimos um volume ν em porções $\Delta\nu_j$ suficientemente pequenas para que a carga Δq_j em cada uma delas possa ser tratada como puntiforme, teremos

$$\Delta q_j = \rho_j \Delta\nu_j,$$

onde ρ_j é a densidade de carga na porção $\Delta\nu_j$.
Usando superposição teremos então,

$$Q_{\text{tot}} = \sum_j^N q_j = \sum_j^N \rho_j \Delta\nu_j,$$

no limite em que $N \to \infty$ e $\Delta\nu_j \to 0$ ficamos com

$$dq = \rho d\nu \to Q_{\text{tot}} = \int dq = \int \rho \, d\nu.$$

Campo elétrico

Conceito cuja importância se tornará particularmente visível quando passarmos da eletrostática para eletrodinâmica (tempo será uma variável).

Pelo princípio da superposição, vimos que a força sobre uma carga i é proporcional a sua carga q_i

$$\vec{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3},$$

definimos essa proporcionalidade como sendo o *campo elétrico* dado por

$$\vec{E}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}.$$

Podemos pensar então nas demais cargas $j \neq i$ como "fontes" do campo elétrico, que é "sentido"pela carga q_i.

Cálculo do campo elétrico

Teremos dois possíveis tipos de distribuição de cargas:

- Distribuição discreta de cargas puntiformes (q_1, q_2, ..., q_N): cálculo feito pela soma vetorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}.$$

- Distribuição contínua de cargas (dq): cálculo feito por integração

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}.$$

  Possíveis fontes de distribuição de cargas dq:

  - Linear: $dq' = \lambda(\vec{r}')\, d\ell' \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda(\vec{r}') \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} d\ell'.$$

  - Superficial: $dq' = \sigma(\vec{r}')\, dA' \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma(\vec{r}') \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} dA'.$$

  - Volumétrica: $dq' = \rho\, d\nu' \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} d\nu'.$$

Lei de Gauss

Permite simplificar significamente o cálculo do campo eletrostático de uma distribuição de cargas. Para isso, é essencial que a distribuição tenha elementos de simetria, de tal forma que possamos exprimir o fluxo total através de uma superfície gaussiana fechada, inteligentemente escolhida para aproveitar a simetria. Ela é expressa então por

$$\oint_{\Omega_S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

onde $d\vec{S}$ é o elemento de área da sua superfície gaussiana Ω_S fechada, e Q_{int} é a carga elétrica interna (englobada) por essa superfície.

- **IMPORTANTE**:
  - A superfície Ω_S é sempre fechada. No caso de uma superfície esférica, sua superfície é contínua. Já no caso de um cilíndro, temos a lateral e suas duas tampas.
  - Quando nosso problema tem simetria cilíndrica, as tampas nunca vão contribuir na Lei de Gauss pois seu elemento de área aponta perpendicularmente ao campo elétrico. Porém o correto seria descrever a Lei de Gauss para um caso cilíndrico como:

    $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{T1}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{T1}} + \iint_{\text{T2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{T2}} + \iint_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}},$$

    sendo $T1$, $T2$, e lat a tampa 1 (cima), tampa 2 (baixo) e lateral, respectivamente. Porém teremos que $\vec{E} \perp d\vec{S}_{T1}$ e $\vec{E} \perp d\vec{S}_{T2}$.

Potencial eletrostático

Provém do fato de que o campo eletrostático é conservativo, ou seja, sua *circulação* do campo ao longo de um caminho fechado orientado Γ é nulo

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0,$$

isso faz com que possamos escrever o campo elétrico em termos de um gradiente de uma função escalar, e por convenção, adotamos

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}).$$

Conseguimos definir o potencial eletrostático então por

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

A diferença de potencial entre dois pontos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por:

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \left(-\int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}\right) = -\int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= -\int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{\vec{a}}^{\vec{\mathcal{O}}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow$$

$$\rightarrow V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Cálculo do potencial eletrostático

Se tivermos uma distribuição de carga toda contida numa região *FINITA* do espaço (cargas puntiformes, esferas, etc) e sabemos o campo elétrico dessa distribuição no espaço todo, então podemos usar

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{\mathcal{O}}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

sendo $\vec{\mathcal{O}}$ geralmente tomado como sendo ∞, pois $\vec{E}(\infty) = 0$ para essas distribuições mencionadas.

Agora, quando não calculamos o campo elétrico, a mesma regra fale para o potencial:

- Distribuição discreta de cargas puntiformes (q_1, q_2, ..., q_N): cálculo feito pela soma vetorial

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|},$$

- Distribuição contínua de cargas (dq): cálculo feito por integração

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

  sendo dq' os mesmos descritos anteriormente.

Dielétricos

Até esse momento da matéria, quando fazíamos exercícios, ou estavamos trabalhando com materiais condutores, onde as cargas poderiam se mover livremente no material. Agora entenderemos como materiais isolantes (ou também conhecidos como dielétricos) funcionam.

Em dielétricos, todas as cargas estão anexadas a um especifico átomo ou especifica molécula, e conseguem somente se mover somente um pouco.

Dipólos induzidos

Quando colocamos um átomo neutro em uma região de campo elétrico $\vec{E}$, por mais que neutro, sua carga positiva (núcleo) e negativa (elétrons) irão sentir a presença desse campo, "deformando" o átomo (ainda sim neutro). Isso fará com que um pequeno dipolo $\vec{p}$ na mesma direção do campo, tal que

$$\vec{p} = \alpha \vec{E},$$

onde α é uma constante de proporcionalidade denominada "polarizibilidade atômica".

O campo elétrico de deslocamento

Dentro de um dielétrico, temos que a densidade de carga é dada por

$$\rho = \rho_f + \rho_l,$$

sendo ρ_l a densidade de cargas livres (elétrons em um condutor ou íons imersos em um dielétrico, que não é resultado de uma polarização) e ρ_f é a densidade de cargas fixas (resultado de uma polarização).

Em um material linear temos que a polarização é dada por

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E},$$

com χ_e sendo a susceptibilidade elétrica do meio.

Além disso, define-se (exite uma conta por trás dessa definição) o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$ como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

que usando a polarização em materiais lineares:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E},$$

sendo $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ a permissividade do material. Podemos definir também, a grandeza adimensional "constante dielétrica" por

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}.$$