Teste de Kruskal Wallis

Profa. Dra. Adriana Backx Noronha Viana

Profa. Dra. Daielly Melina Nassif Mantovani

Versão - Agosto / 2022

TESTE DE KRUSKAL-WALLIS

O teste de Kruskal-Wallis é um método não-paramétrico alternativo à análise de variância (ANOVA) que exige algumas hipóteses bastante restritivas quanto aos dados amostrais. Por exemplo, a ANOVA utiliza o teste F que exige que todas as amostras envolvidas tenham sido extraídas de populações normais com variâncias iguais.

SITUAÇÃO-PROBLEMA

A lanchonete *Double Cheese* vende diversos tipos lanches e possui três unidades na cidade de Ribeirão Preto, localizadas em bairros distintos. A proprietária da *Double Cheese* gostaria de verificar se as três unidades possuem o mesmo nível de atendimento. Para tanto foi realizada uma pesquisa com 90 clientes, 30 de cada unidade, escolhidos aleatoriamente. Foi solicitado a cada cliente que atribuísse uma nota de 1 a 10 para o atendimento recebido, sendo que a nota 1 indicava "nada satisfeito" e a nota 10 "muito satisfeito". Os dados obtidos encontram-se na tabela a seguir. Considerando um nível de significância de 5%, teste a hipótese de que não diferença significativa no nível de atendimento das três unidades da lanchonete *Double Cheese.*

Tabela 5.9: Notas obtidas pelas unidades da lanchonete *Double Cheese* no quesito atendimento

Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
9	9	8
10	2	7
7	7	9
9	9	10
8	8	10

7	8	9
10	6	7
8	7	10
7	10	8
9	5	7
6	10	9
10	7	8
8	10	10
7	6	9
9	9	8
8	8	7
10	9	9
7	8	8
9	8	10
8	7	9
7	7	9
10	7	6
9	9	9
9	7	10
10	9	7
8	10	9
9	7	8
9	9	9
9	7	8
9	9	10

VISÃO GERAL DO MÉTODO

O teste de Kruskal-Wallis é usado para testar hipóteses de que diferentes amostras provenham da mesma população ou de populações idênticas com a mesma mediana. Este teste adota premissas menos restritivas do que o teste F, não exigindo distribuições normais e podendo ser usado com dados no nível de mensuração ordinal, como dados que consistem em postos. Para aplicação deste teste é necessário ao menos três amostras aleatórias independentes e que cada amostra comporte no mínimo cinco observações.

COMO FUNCIONA

Ao aplicar o teste de Kruskal-Wallis, calculamos a estatística de teste H, cuja distribuição pode ser aproximada pela distribuição qui-quadrado, desde que cada amostra contenha ao menos cinco observações. Quando aplicamos a distribuição qui-quadrado neste contexto, o número de graus de liberdade é k - 1, onde k é o número de amostras. A estatística de teste é:

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + ... + \frac{R_k^2}{n_k}\right) - 3(N+1)$$

Onde:

N= número total de observações em todas as amostras combinadas

k = número de amostras

R_k = soma dos postos da *k*-ésima amostra

n_k = número de observações na amostra *k*-ésima amostra

O processo do teste de Kruskal-Wallis compreende os seguintes passos:

- PASSO 1: considerando todas as observações combinadas, atribua um posto a cada uma, do mais baixo para o mais alto, e em caso de empate, atribua a cada observação a média dos postos envolvidos.
- PASSO 2: para cada amostra, determine a soma dos postos e o tamanho.
- PASSO 3: com os resultados do PASSO 2, calcule a estatística de teste *H*.
- PASSO 4: com auxílio da tabela de valores críticos da distribuição qui-quadrado, obtenha o valor crítico e identifique a região de rejeição.
- PASSO 5: Tome a decisão de rejeitar ou não a hipótese nula.

A estatística de teste *H* é basicamente uma medida de variância das somas de postos R_1, R_2, ...,R_k. Se os postos são distribuídos equitativamente entre os grupos amostrais, então o valor *H* deve ser um número relativamente pequeno. Se as amostras são muito diferentes, então os postos serão excessivamente baixos em alguns grupos e alto em outros, resultando num valor H grande.

O valor calculado de *H* pode ser comparado a um valor tabulado de qui-quadrado e a hipótese nula será rejeitada se o valor calculado for maior que o valor tabulado, ao nível de significância escolhido. Apenas grandes valores de *H* conduzem à rejeição da hipótese nula, de que as amostras provenham de populações idênticas. Desta forma, o teste de Kruskal-Wallis é um teste unilateral à direita.

Um comentário importante refere-se às observações empatadas. Quando ocorrerem empates entre duas ou mais observações (independentemente do grupo), a cada uma delas é atribuída a média dos postos. Como a variância da distribuição amostral da estatística de teste *H* é influenciada por empates, pode-se desejar fazer uma correção para empates no cálculo da estatística de teste *H*. Para corrigir o efeito dos empates, o complemento à equação para cálculo da estatística *H* é:

$$1 - \sum_{i=1}^{g} \frac{(t_i^3 - t_i)}{N^3 - N}$$

Onde:

g= número de agrupamentos de postos empatados

t_i = número de postos empatados no *i*-ésimo agrupamento

N= número total de observações em todas as amostras combinadas

Assim, a estatística de teste *H* corrigida para empates é:

$$H = \frac{\dfrac{12}{N(N+1)}\left(\dfrac{R_1^2}{n_1}+\dfrac{R_2^2}{n_2}+...+\dfrac{R_k^2}{n_k}\right)-3(N+1)}{1-\sum_{i=1}^{g}\dfrac{(t_i^3-t_i)}{N^3-N}}$$

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

Resolveremos a situação-problema do teste de Kruskal-Wallis anteriormente apresentada, utilizando-se dos passos de um teste de hipótese, conforme descrição a seguir.

1) Formulação das hipóteses

H_0: Não diferença significativa no nível de atendimento entre as três unidades da lanchonete *Double Cheese.*

H_1: Há diferença significativa no nível de atendimento entre as três unidades da lanchonete *Double Cheese.*

2) Teste estatístico

O teste Q de Kruskal-Wallis é o teste escolhido, pois os dados advêm de três grupos independentes (k = 3) e estão dispostos em uma escala ordinal.

3) Nível de significância e tamanho da amostra

Seja α = 0,05 e N = 90, que representa o número total de observações em todas as amostras combinadas; n_1= 30, que corresponde ao número de observações na amostra 1; n_2= 30, que equivale ao número de observações na amostra 2 e n_3= 30, que estabelece o número de observações na amostra 3.

4) Distribuição amostral

Distribuição qui-quadrado com *gl = (k -1*) = (3-1) = 2.

5) Região de rejeição

Consultando a tabela de valores críticos da distribuição qui-quadrado para α = 0,05 e *gl* = 2, observamos que o valor tabelado ou valor crítico é igual a 5,99. Desta forma, a região de rejeição compreende todos os valores maiores ou iguais a 5,99.

6) Decisão

A tabela 5.9 apresenta as notas dadas pelos 90 clientes pesquisados da lanchonete *Double Cheese* ao atendimento recebido. Se as notas são postadas da menor para a maior, obtemos os postos apresentados na tabela a seguir.

Tabela 5.10: Notas obtidas pelas unidades da lanchonete *Double Cheese* no quesito atendimento (dados postados)

Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
59	59	35,5
82	1	16,5
16,5	16,5	59
59	59	82
35,5	35,5	82
16,5	35,5	59
82	4,5	16,5
35,5	16,5	82
16,5	82	35,5
59	2	16,5
4,5	82	59
82	16,5	35,5
35,5	82	82
16,5	4,5	59
59	59	35,5
35,5	35,5	16,5
82	59	59
16,5	35,5	35,5
59	35,5	82

35,5	16,5	59
16,5	16,5	59
82	16,5	4,5
59	59	59
59	16,5	82
82	59	16,5
35,5	82	59
59	16,5	35,5
59	59	59
59	16,5	35,5
59	59	82
R *1* = **1.457,5**	***R*** *2* = **1.138**	***R*** *3* = **1.499,5**

Note que as notas foram postadas em uma única sequência, como é exigido por este teste. A menor nota foi 2, assim lhe foi atribuído o posto 1. Houve vários casos de notas empatadas, como por exemplo, a nota 6 com quatro empates. Neste caso, o posto atribuído a cada observação foi 4,5 [(3 + 4 + 5 + 6)/4 = 4,5] , que corresponde à média dos postos envolvidos. Na tabela 5.10 também são apresentados a soma dos postos para cada amostra (R_1, R_2 e R_3).

Com os dados da tabela 5.10, podemos calcular o valor de *H*, não corrigido para empates, usando a equação:

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \ldots + \frac{R_k^2}{n_k}\right) - 3(N+1)$$

$$H = \frac{12}{90(90+1)}\left(\frac{1457{,}5^2}{30} + \frac{1138^2}{30} + \frac{1499{,}5^2}{30}\right) - 3(90+1)$$

$$H = 3{,}818$$

Para corrigir empates, precisamos determinar quais observações estão empatadas e quantas vezes ocorreu o empate. A tabela a seguir revela quais observações e quantos empates ocorreram para os dados da situação-problema.

Tabela 5.11: Observações empatadas e número de empates

Observação	6	7	8	9	10

Número de empates (t)	4	20	18	29	17
t³-t	60	7.980	5.814	24.360	4.896

Para corrigir o efeito dos empates, utilizamos o complemento à equação para cálculo da estatística *H*:

$$1-\sum_{i=1}^{g}\frac{(t_i^3-t_i)}{N^3-N}$$

$$1-\left(\frac{60+7.980+5.814+24.360+4.896}{90^3-90}\right)$$

$$1-0{,}059$$

$$0{,}941$$

Assim, a estatística de teste *H* corrigida para empates é:

$$H=\frac{\frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{R_1^2}{n_1}+\frac{R_2^2}{n_2}+\ldots+\frac{R_k^2}{n_k}\right)-3(N+1)}{1-\sum_{i=1}^{g}\frac{(t_i^3-t_i)}{N^3-N}}$$

$$H=\frac{3{,}818}{0{,}941}$$

$$H=4{,}058$$

Como o valor *H* calculado (4,058) é menor que o valor crítico (5,991), não podemos rejeitar H_o em favor de H_1, ou seja, não podemos afirmar que exista diferença significativa no nível de atendimento entre as três unidades da lanchonete *Double Cheese*.

RESOLUÇAO UTILIZANDO *SOFTWARE*

Para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis, siga os seguintes passos:

1) Digite os dados conforme mostra a figura a seguir. Vale destacar que as respostas de cada entrevistado estão em linha e as variáveis em coluna.

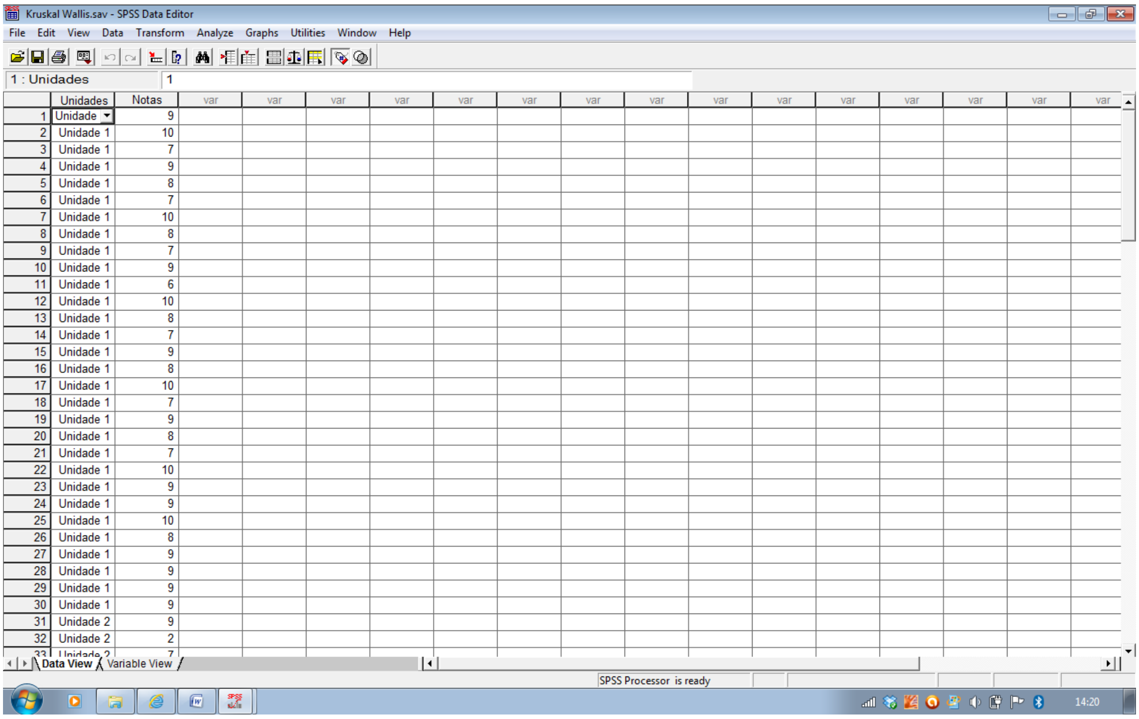

Figura 5.17: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

2) Clique em *Analyze*, *Nonparametric Tests* e depois em *K Independent Samples.*

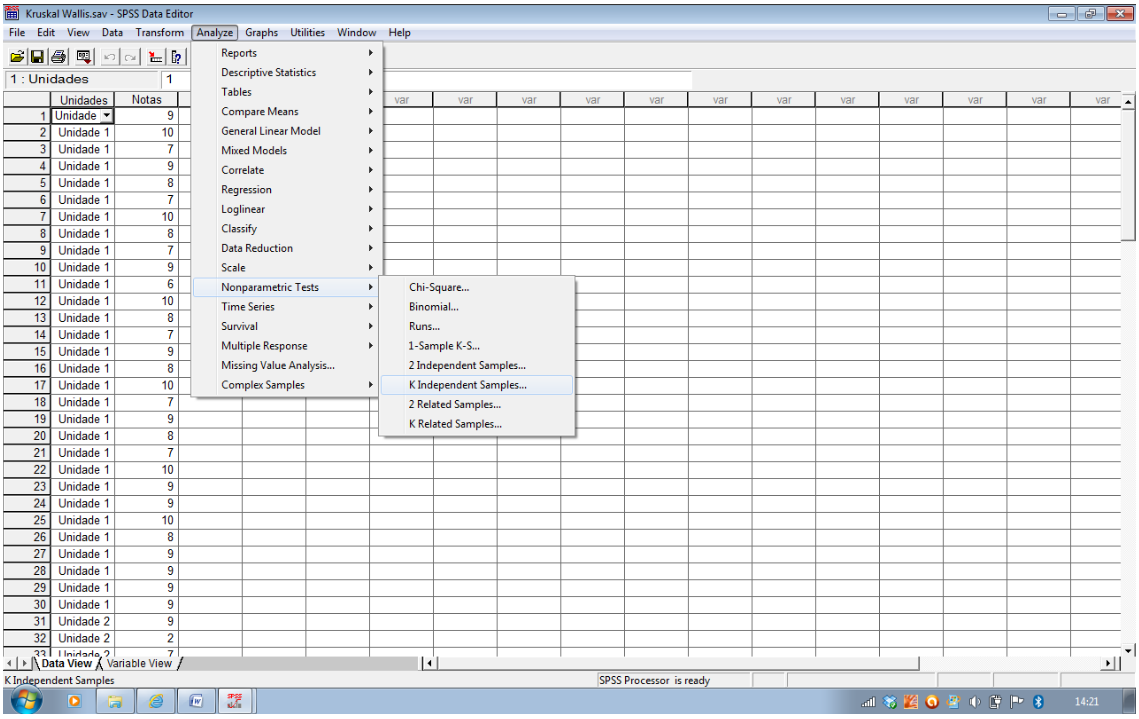

Figura 5.18: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

3) Selecione a variável que será testada e transfira para *Test Variable List.*

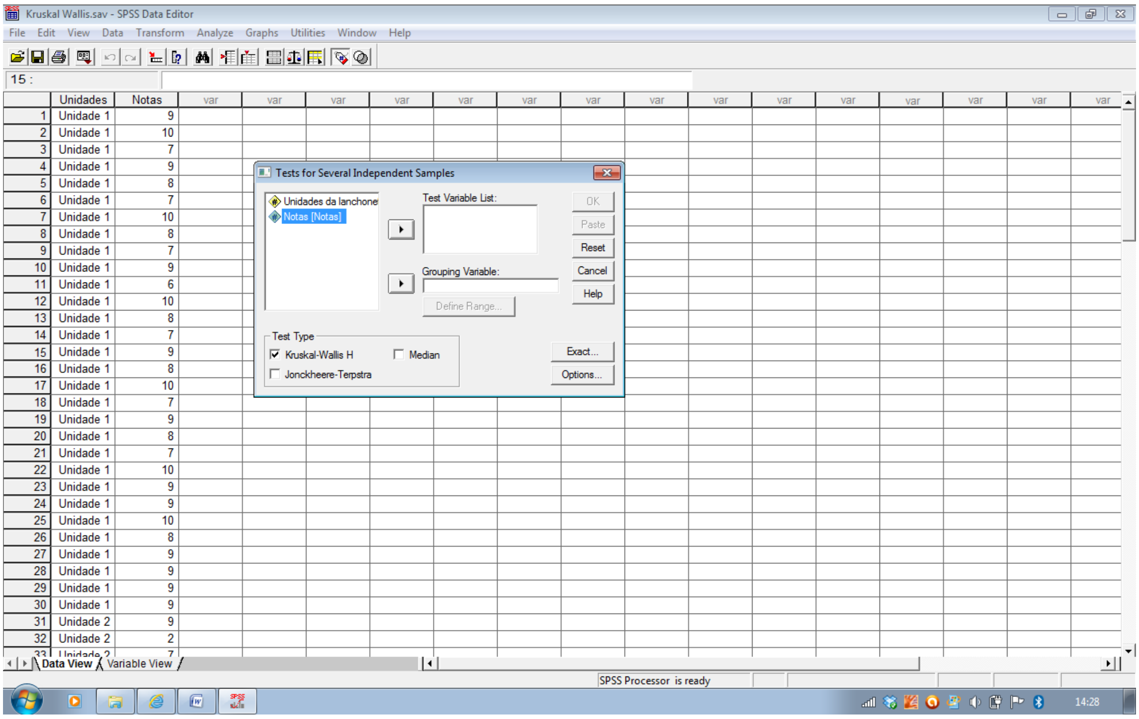

Figura 5.19: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

4) Selecione a variável que corresponde aos grupos em estudo e transfira para *Grouping Variable.*

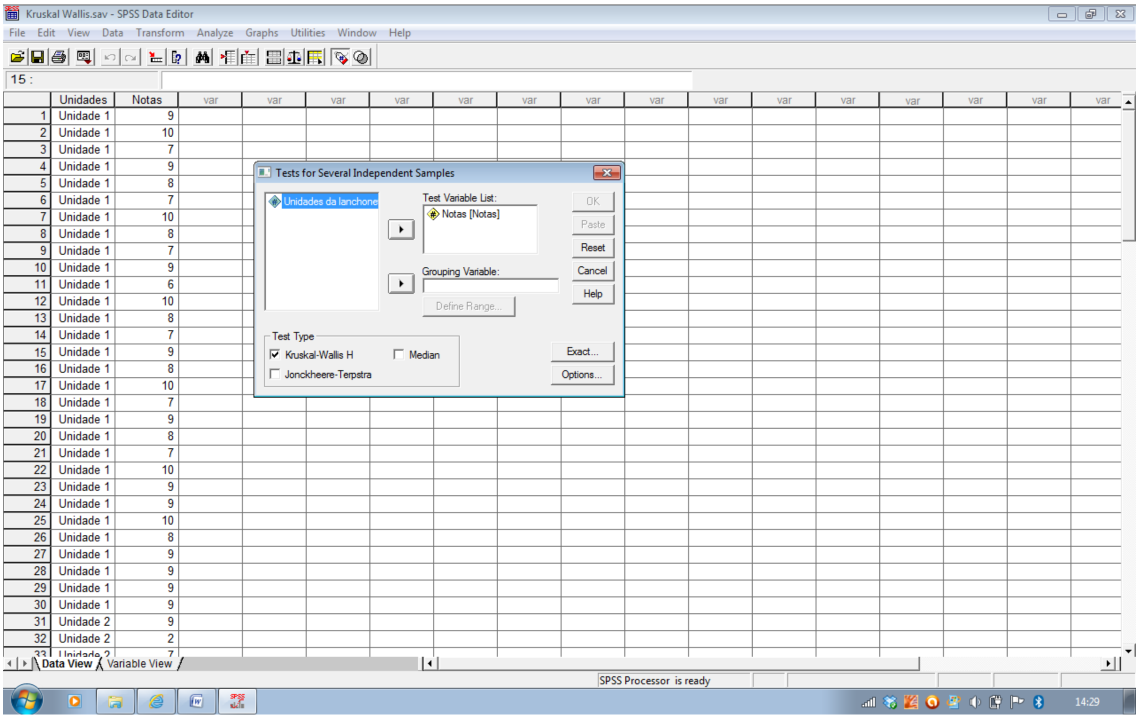

Figura 5.20: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

5) Clique em *Define Range.*

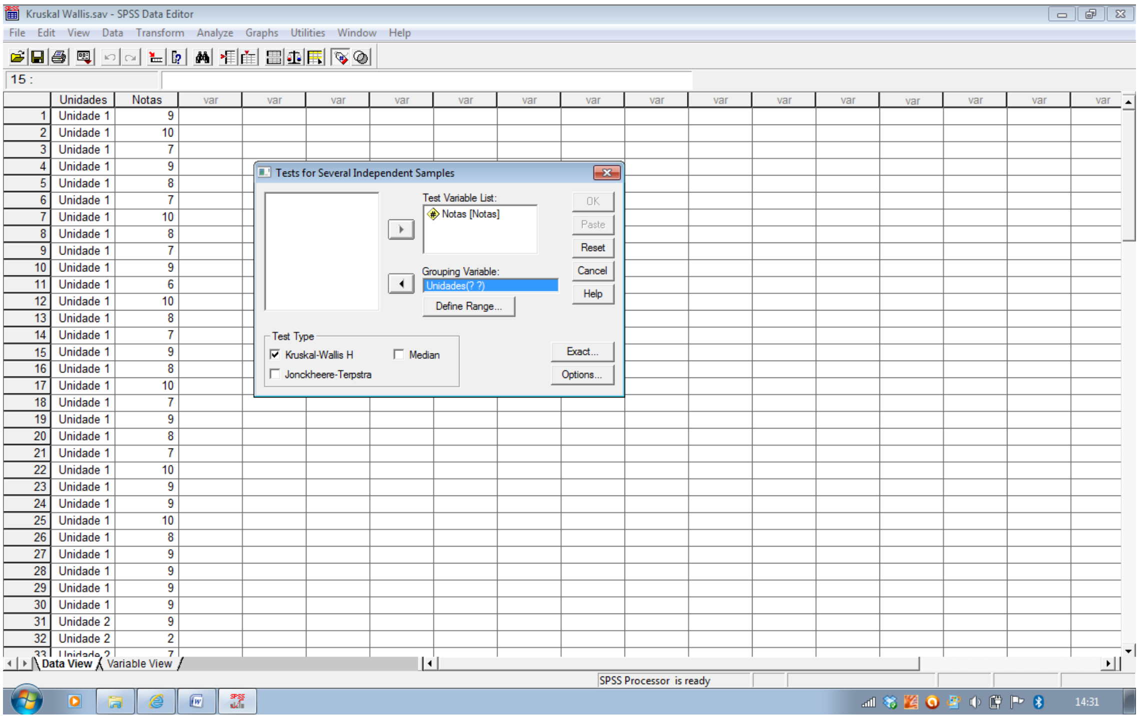

Figura 5.21: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

6) Em *Minimum e Maximum*, digite o intervalo de valores utilizado para definir os grupos em estudo. Neste exemplo, o número 1 foi utilizado para caracterizar a Unidade 1, o número 2 para a Unidade 2 e o número 3 para a Unidade 3. Assim, o intervalo de valores a ser utilizado será 1 (*Minimum*) e 3 (*Maximum*). Depois clique em *Continue.*

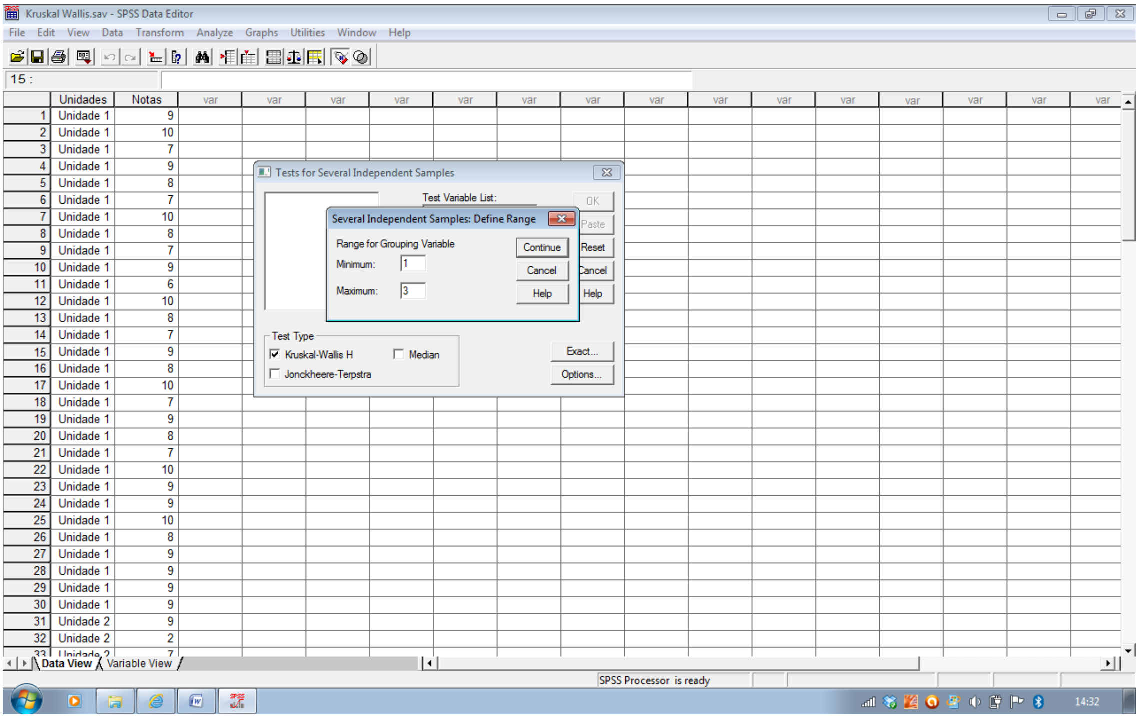

Figura 5.22: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

7) Em *Test Type*, selecione *Kruskal-Wallis H* e depois em *OK*.

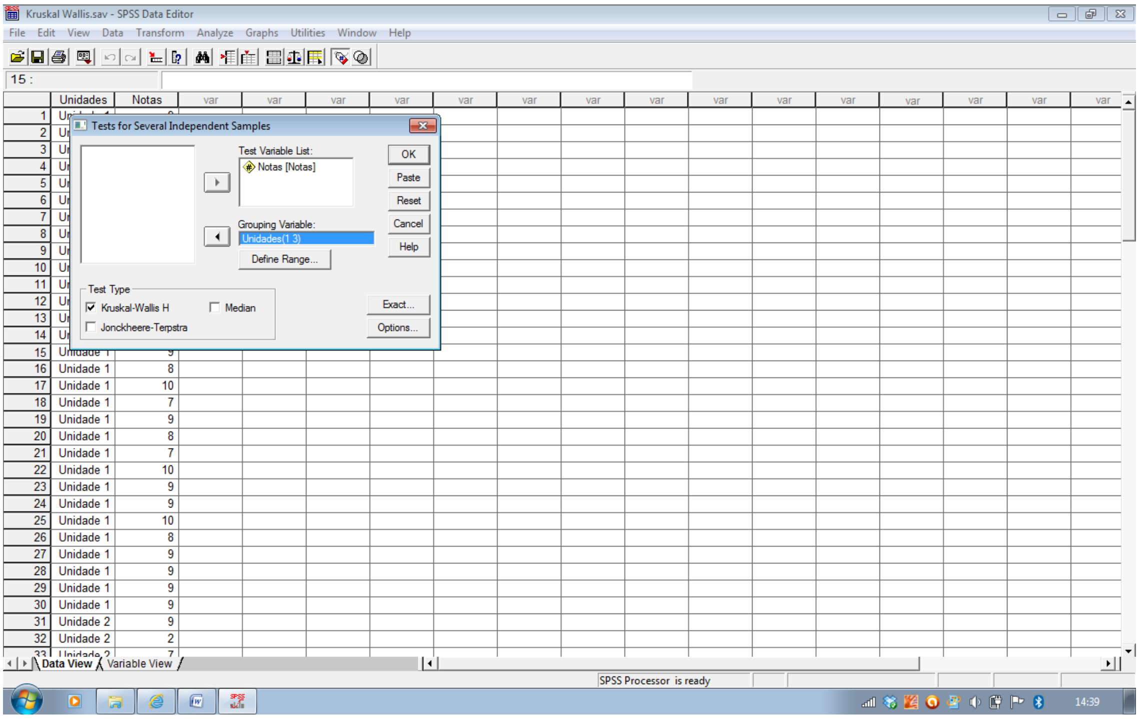

Figura 5.23: Passos para utilizar o *software* IBM SPSS Statistics para o teste de Kruskal-Wallis

8) Pronto! Agora é possível visualizar o resultado do teste de Kruskal-Wallis.

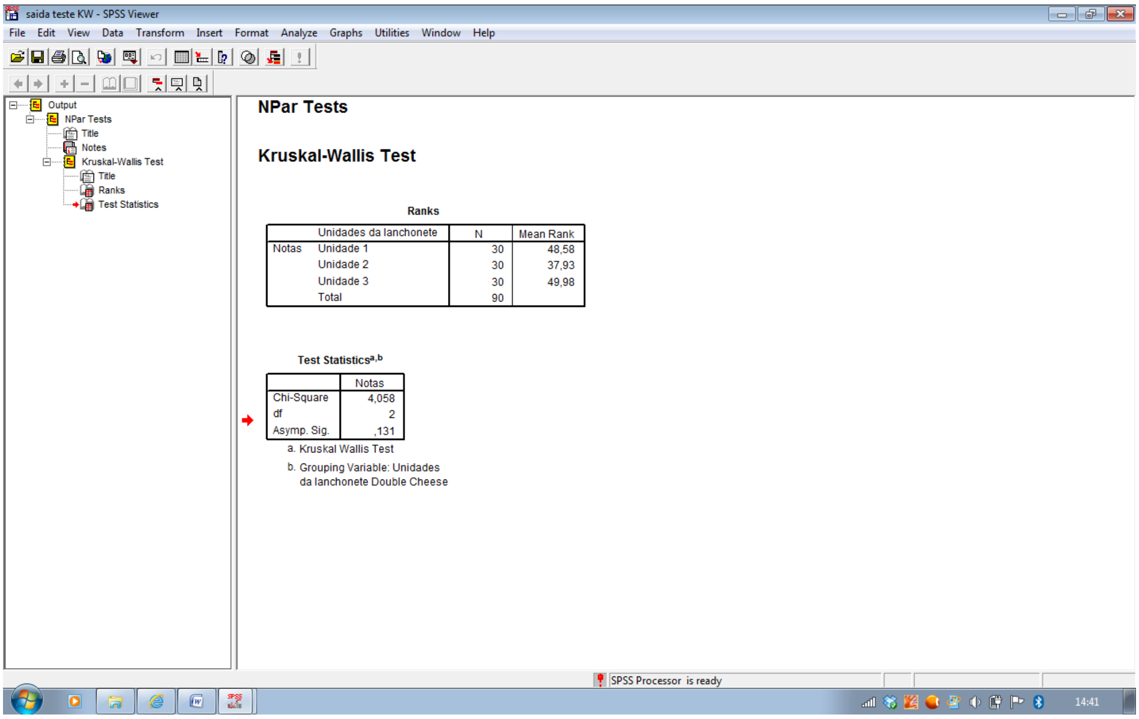

Figura 5.24: Resultado do teste de Kruskal-Wallis utilizando o *software* IBM SPSS Statistics

Analisando a tabela *Test Statistic*, observamos que a probabilidade calculada (p-valor = 0,131) é maior que o nível de significância definido (0,05), o que nos impede de rejeitar H_0 em favor de H_1. Portanto, com base nos resultados obtidos, não podemos afirmar que exista diferença significativa no nível de atendimento entre as três unidades da lanchonete *Double Cheese*.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) A matriz de uma agência de viagens, localizada em São Paulo, deseja implantar algumas medidas visando a aumentar a satisfação dos clientes de três filias da empresa, situadas no interior: Araraquara, Ribeirão Preto e São Carlos. Mas antes de implantar tais medidas, gostaria de saber se há diferença significativa na satisfação dos clientes de cada uma das três filiais. Para isso, foram selecionados aleatoriamente 10 clientes de cada filial, que participaram do programa de trabalho de férias nos Estados Unidos, chamado *Work and Travel*. Este programa é um dos mais rentáveis para a agência. Solicitou-se a cada cliente que desse uma nota de 0 a 10 ao atendimento recebido na agência, sendo que a nota 1 indicava "nada satisfeito" e a nota 10 "muito satisfeito". Considere um nível de significância de 1%.

Filial Araraquara	**Filial Ribeirão Preto**	**Filial São Carlos**
5	9	6
4	8	6
4	9	6
5	10	7
3	8	7
4	10	6
5	9	7
3	9	6
4	8	7
5	10	7

2) A indústria Alfa, do setor de bebidas, deseja comparar cinco máquinas de envase distintas (A, B, C, D e E), a fim de constatar se existe diferença de desempenho entre elas. Os engenheiros da empresa avaliaram as máquinas, por períodos de tempo e condições semelhantes. A quantidade de unidades produzidas por cada máquina está descrita na tabela a seguir. Adote $\alpha = 5\%$.

Máquina A	**Máquina B**	**Máquina C**	**Máquina D**	**Máquina E**
68	72	77	42	53
72	53	63	53	48
60	82	64	75	72
48	61	57	64	50
64	65	70	68	53

68	72	77	42	53
72	53	63	53	48
60	82	64	75	72

3) A tabela seguinte dá os preços de venda de apartamentos de 110 m^2 localizados em três capitais brasileiras (Salvador, São Paulo, Rio de Janeiro). Com base nestes dados, pode-se afirmar que exista diferença significativa de preços nas três cidades? Adote α = 1%.

Salvador	**São Paulo**	**Rio de Janeiro**
R$ 600.000,00	R$ 500.000,00	R$ 800.000,00
R$ 450.000,00	R$ 570.000,00	R$ 750.000,00
R$ 380.000,00	R$ 490.000,00	R$ 650.000,00
R$ 550.000,00	R$ 400.000,00	R$ 610.000,00
R$ 510.000,00	R$ 480.000,00	R$ 590.000,00
R$ 623.000,00	R$ 650.000,00	R$ 625.000,00
R$ 400.000,00	R$ 410.000,00	R$ 575.000,00
R$ 376.000,00	R$ 535.000,00	R$ 520.000,00
R$ 587.000,00	R$ 610.000,00	R$ 690.000,00
R$ 679.000,00	R$ 474.000,00	R$ 710.000,00

4) Foi realizada uma pesquisa com os alunos dos cursos de Administração, Ciências Contábeis e Ciências Econômicas de uma faculdade de negócios para identificar se havia diferença significativa no nível de satisfação desses alunos com o curso. Foram entrevistados 15 alunos de cada curso e foi solicitado que dessem uma nota de 0 a 100 para o nível de satisfação com o curso. A tabela a seguir mostra os dados obtidos. Adote um nível de significância de 5%.

Administração	**Ciências Contábeis**	**Ciências Econômicas**
80	100	75
79	90	70
88	98	60
90	76	65

98	55	80
100	90	90
95	90	100
94	88	65
87	76	85
84	65	90
93	60	55
80	67	75
89	89	40
90	87	100
95	90	95

5) Foi feita uma pesquisa para verificar se há diferença significativa nos salários recebidos pelos gerentes de marketing de grandes empresas das regiões Sul, Sudeste e Nordeste do Brasil. Os dados da pesquisa encontra-se na tabela a seguir. Considere um nível de significância de 0,01.

Região Sul	**Região Sudeste**	**Região Nordeste**
R$ 15.000,00	R$ 20.000,00	R$ 14.000,00
R$ 18.000,00	R$ 23.000,00	R$ 15.500,00
R$ 22.000,00	R$ 25.000,00	R$ 17.000,00
R$ 17.500,00	R$ 24.000,00	R$ 20.000,00
R$ 19.250,00	R$ 18.000,00	R$ 14.440,00
R$ 21.000,00	R$ 30.000,00	R$ 16.000,00
R$ 23.000,00	R$ 28.000,00	R$ 18.500,00

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LARSON, R.; FARBER, B. **Estatística aplicada**. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

MARTINS, G. A. **Estatística Geral e Aplicada**. São Paulo: Atlas, 2002.

SIEGEL, S.; CASTELLAN JR., N. J. **Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento.** 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. 448 p.

STEVENSON, W. J. **Estatística aplicada à Administração**. São Paulo: Harbra, 1986.

TRIOLA, M. F. **Introdução à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1999.