

Equações de Maxwell. Parte III: formas.

Esmerindo Bernardes ¹

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

25 de maio de 2022

¹email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

1	Introito	1
2	Equações de campo	2
2.1	Campo EM	2
2.2	Maxwell	5
2.3	Resumo	8
3	Conservações	10
3.1	Forças	10
3.2	Esforços	12
	Appendices	14
A	Tensores	14
A.1	Introito	14
A.2	Espaço tangente	14
A.3	Derivada exterior	16
A.4	Tensor	17
A.5	Métrica	18
B	Formas	21
B.1	k -formas	21
B.2	Produto exterior	21
B.2.1	Bases	22
B.2.2	Matrizes	23
B.2.3	Operações	25
B.2.4	Geometria	26
B.3	Derivada exterior	27
B.4	Espaço vetorial	28
B.5	Mapa dual	29

B.6 Produto interior	32
B.7 Derivada de Lie	34

Capítulo 1

Introito

Comentar as referências básicas.[\[1\]](#)

Capítulo 2

Equações de campo

2.1 Campo EM

As componentes do quadripotencial,

$$(A_\mu) = (\phi, -c\vec{A}), \quad (2.1)$$

formado pelo potencial escalar ϕ e o potencial vetor $c\vec{A}$, são também as componentes da 1-forma potencial,

$$\mathbf{A} = A_\nu \mathbf{dx}^\nu, \quad \nu \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (2.2)$$

Explicitamente,

$$\mathbf{A} = \phi \mathbf{dx}^0 - cA_x \mathbf{dx}^1 - cA_y \mathbf{dx}^2 - cA_z \mathbf{dx}^3. \quad (2.3)$$

Será muito útil reescrever esta 1-forma potencial na forma 1 + 3,

$$\mathbf{A} = \bar{\phi} - c\bar{\mathbf{A}}, \quad \bar{\phi} = \phi \mathbf{dx}^0, \quad \bar{\mathbf{A}} = A_x \mathbf{dx}^1 + A_y \mathbf{dx}^2 + A_z \mathbf{dx}^3 = A_i \mathbf{dx}^i, \quad (2.4)$$

onde a barra indica projeções no eixo tempo e no espaço tridimensional. Os índices latinos pertencem ao intervalo $\{1, 2, 3\}$.

Usando (B.58), a 1-forma potencial dual é

$$\begin{aligned} {}^*\mathbf{A} &= -\phi \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 \\ &\quad + cA_x \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 + cA_y \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^3 \wedge \mathbf{dx}^1 + cA_z \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Interessante observar que a derivada exterior desta 3-forma (verifique),

$$\mathbf{d}^*\mathbf{A} = -c \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3, \quad (2.6)$$

ou, usando (B.57),

$$*\mathbf{d}^*\mathbf{A} = -c \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right), \quad (2.7)$$

se igualada a zero fornece o calibre de Lorentz (5.20). Usando a linguagem de formas, o calibre de Lorentz impõe que a 3-forma (2.6) seja fechada, $\mathbf{d}^*\mathbf{A} = 0$.

A derivada exterior

$$\mathbf{d} = \partial_0 \mathbf{d}\mathbf{x}^0 + \mathbf{d}\mathbf{r}, \quad \mathbf{d}\mathbf{r} = \partial_i \mathbf{d}\mathbf{x}^i, \quad (2.8)$$

da 1-forma potencial (2.3) cria a 2-forma campo eletromagnético (verifique),

$$\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A} = (\partial_0 \mathbf{d}\mathbf{x}^0 + \mathbf{d}\mathbf{r}) \wedge (\bar{\phi} - c\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{d}\mathbf{x}^0 \wedge \bar{\mathbf{E}} - c\bar{\mathbf{B}}, \quad (2.9)$$

onde

$$\bar{\mathbf{E}} = E_x \mathbf{d}\mathbf{x}^1 + E_y \mathbf{d}\mathbf{x}^2 + E_z \mathbf{d}\mathbf{x}^3 = E_i \mathbf{d}\mathbf{x}^i, \quad (2.10a)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = B_x \mathbf{d}\mathbf{x}^2 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^3 + B_y \mathbf{d}\mathbf{x}^3 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^1 + B_z \mathbf{d}\mathbf{x}^1 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} B_i \mathbf{d}\mathbf{x}^j \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^k, \quad (2.10b)$$

e

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \partial_t = c\partial_0. \quad (2.11)$$

Note em (2.9) a presença da 1-forma campo elétrico, restrita ao espaço tridimensional, definida em (2.10a), bem como a presença da 2-forma campo magnético, também restrita ao espaço tridimensional e definida em (2.10b). Note também a diferença de caráter entre esses dois campos: o campo elétrico é 1-forma e o campo magnético é uma 2-forma. Essa diferença não é explícita na notação de vetores.

Em termos de coordenadas, a 2-forma campo eletromagnético (2.9) é (verifique),

$$\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A} = F_{\mu\nu} \mathbf{d}\mathbf{x}^\mu \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^\nu, \quad \mu < \nu, \quad (2.12)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.13)$$

Explicitamente (verifique),

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A} = & E_1 \mathbf{d}\mathbf{x}^0 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^1 + E_2 \mathbf{d}\mathbf{x}^0 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^2 + E_3 \mathbf{d}\mathbf{x}^0 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^3 \\ & - cB_1 \mathbf{d}\mathbf{x}^2 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^3 - cB_2 \mathbf{d}\mathbf{x}^3 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^1 - cB_3 \mathbf{d}\mathbf{x}^1 \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Também podemos usar uma matriz antissimétrica para escrever as componentes desta 2-

forma campo eletromagnético,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

a qual abriga, simultaneamente, os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} dados em (2.11) como 1-forma e uma 2-forma, respectivamente. Note a localização do campo elétrico no setor tempo-espaço e do campo magnético no setor espaço-espaço (tridimensional).

Usando (B.59), vemos que o dual da 2-forma campo eletromagnético (2.14) troca o campo elétrico pelo campo magnético e o campo magnético pelo negativo do campo elétrico,

$$\begin{aligned} *F = cB_1 dx^0 \wedge dx^1 + cB_2 dx^0 \wedge dx^2 + cB_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ + E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A forma matricial correspondente é

$$(*F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_1 & cB_2 & cB_3 \\ -cB_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -cB_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -cB_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Comparando as matrizes (2.15) e (2.17), identificamos a mesma substituição (5.5), como já observada nas equações de Maxwell (5.4) ligadas à indução. Isto sugere uma identificação entre as transformações entre os campos elétrico e magnético (indução) e o mapa dual.

Também podemos calcular o dual da 2-forma campo eletromagnético diretamente de (2.9) (verifique),

$$*F = *(dx^0 \wedge \vec{E} - c\vec{B}) = dx^0 \wedge (c*\vec{B}) + *\vec{E}, \quad (2.18)$$

onde o dual das projeções é restrito ao espaço tridimensional,

$$*\vec{B} = B_x dx^1 + B_y dx^2 + B_z dx^3 = B_i dx^i, \quad (2.19a)$$

$$*\vec{E} = E_x dx^2 \wedge dx^3 + E_y dx^3 \wedge dx^1 + E_z dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} E_i dx^j \wedge dx^k. \quad (2.19b)$$

Observe a troca de caráter entre os campos elétrico e magnético no espaço dual: o campo magnético é uma 1-forma e o campo elétrico é uma 2-forma.

2.2 Maxwell

O conjunto das equações de Maxwell sem as fontes é uma consequência geométrica da derivada exterior ser nilpotente. A derivada exterior da 2-forma campo eletromagnético (2.12) (verifique),

$$\mathbf{H} = \mathbf{dF} = H_{\nu_1\nu_2\nu_3} \mathbf{dx}^{\nu_1} \wedge \mathbf{dx}^{\nu_2} \wedge \mathbf{dx}^{\nu_3}, \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3, \quad (2.20)$$

onde

$$H_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \partial_{\nu_1} F_{\nu_2\nu_3} + \partial_{\nu_3} F_{\nu_1\nu_2} + \partial_{\nu_2} F_{\nu_3\nu_1}, \quad (2.21)$$

é nula pois, devido ao Teorema 1,

$$\mathbf{dF} = \mathbf{d}^2\mathbf{A} = 0. \quad (2.22)$$

Então as componentes (2.21) precisam ser nulas,

$$\partial_{\nu_1} F_{\nu_2\nu_3} + \partial_{\nu_3} F_{\nu_1\nu_2} + \partial_{\nu_2} F_{\nu_3\nu_1} = 0. \quad (2.23)$$

Esta condição fornece as duas equações de Maxwell sem as fontes (verifique),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.24)$$

De fato, explicitamente, a 3-forma (2.20) é

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{dF} &= H_{123} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 \\ &+ H_{023} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 - H_{013} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^3 \wedge \mathbf{dx}^1 + H_{012} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde (verifique)

$$H_{123} = -c \vec{\nabla} \cdot \vec{B}, \quad (2.26a)$$

$$H_{023} = - \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x, \quad (2.26b)$$

$$H_{013} = + \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_y, \quad (2.26c)$$

$$H_{012} = - \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_z. \quad (2.26d)$$

Usando a linguagem de formas, o fato da 2-forma campo eletromagnético (2.14) ser exata implica nas equações de Maxwell (2.24) sem as fontes.

É muito instrutivo calcular a derivada exterior da 2-forma campo eletromagnético (2.9) (verifique),

$$\mathbf{dF} = \mathbf{d}^2\mathbf{A} = -\mathbf{dx}^0 \wedge [\mathbf{dr} \wedge \bar{\mathbf{E}} + \partial_0(c\bar{\mathbf{B}})] - \mathbf{dr} \wedge (c\bar{\mathbf{B}}) = 0. \quad (2.27)$$

Como essa 3-forma está decomposta numa base com elementos linearmente independentes e precisa ser nula, então a única solução é zerar independentemente os coeficientes contendo a coordenada temporal \mathbf{dx}^0 e o coeficiente do volume $\mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3$,

$$\mathbf{dr} \wedge \bar{\mathbf{E}} + \partial_0(c\bar{\mathbf{B}}) = 0, \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{dr} \wedge (c\bar{\mathbf{B}}) = 0. \quad (2.28b)$$

Essas são as versões em termos de formas das equações de Maxwell (2.24) sem as fontes (verifique),

$$\mathbf{dr} \wedge \bar{\mathbf{E}} + \partial_0(c\bar{\mathbf{B}}) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} \right)_k \varepsilon^k_{ij} \mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j = 0, \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{dr} \wedge (c\bar{\mathbf{B}}) = c\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 = 0, \quad (2.29b)$$

onde usamos (2.10a)–(2.10b). Note que, mesmo sem levar em conta a covariância, mesmo separando tempo e espaço, as equações de Maxwell pode ser escritas em termos de formas (tridimensionais) de forma elegante e sintética.

O conjunto das equações de Maxwell com as fontes, a lei de Coulomb e a lei de Ampère (corrigida), respectivamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho, \quad \vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \partial_0 \vec{E} = \frac{4\pi C_e}{c} \vec{J}, \quad (2.30)$$

é uma consequência da derivada exterior da 2-forma campo eletromagnético dual,

$$\mathbf{G} = \mathbf{d}^*\mathbf{F} = G_{\nu_1\nu_2\nu_3} \mathbf{dx}^{\nu_1} \wedge \mathbf{dx}^{\nu_2} \wedge \mathbf{dx}^{\nu_3}, \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3, \quad (2.31)$$

onde (verifique)

$$G_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \partial_{\nu_1}^* F_{\nu_2\nu_3} + \partial_{\nu_3}^* F_{\nu_1\nu_2} + \partial_{\nu_2}^* F_{\nu_3\nu_1}. \quad (2.32)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \mathbf{d}^*\mathbf{F} &= G_{123} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 \\ &+ G_{023} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 - G_{013} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^3 \wedge \mathbf{dx}^1 + G_{012} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

com (verifique)

$$G_{123} = \partial_1^* F_{23} + \partial_3^* F_{12} + \partial_2^* F_{31} = +\vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \quad (2.34a)$$

$$G_{023} = \partial_0^* F_{23} + \partial_3^* F_{02} + \partial_2^* F_{30} = - \left[\vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right]_x, \quad (2.34b)$$

$$G_{013} = \partial_0^* F_{13} + \partial_3^* F_{01} + \partial_1^* F_{30} = + \left[\vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right]_y, \quad (2.34c)$$

$$G_{012} = \partial_0^* F_{12} + \partial_2^* F_{01} + \partial_1^* F_{20} = - \left[\vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right]_z. \quad (2.34d)$$

Como as equações de Maxwell para as fontes (2.30) já estão parcialmente visíveis em (2.34), devemos calcular o dual da 3-forma (2.33),

$$*\mathbf{G} = -G_{123} \mathbf{dx}^0 - G_{023} \mathbf{dx}^1 + G_{013} \mathbf{dx}^2 - G_{012} \mathbf{dx}^3, \quad (2.35)$$

para comparar com a 1-forma potencial

$$\mathbf{J} = J_\mu \mathbf{dx}^\mu = \rho \mathbf{dx}^0 - \bar{\mathbf{J}}/c, \quad \bar{\mathbf{J}} = J_x \mathbf{dx}^1 + J_y \mathbf{dx}^2 + J_z \mathbf{dx}^3. \quad (2.36)$$

Conhecendo as equações de Maxwell para as fontes (2.30), elas são dadas pela condição

$$*\mathbf{G} = *\mathbf{d}^*\mathbf{F} = -4\pi C_e \mathbf{J}, \quad (2.37)$$

ou, equivalentemente (verifique),

$$\mathbf{G} = \mathbf{d}^*\mathbf{F} = -4\pi C_e *\mathbf{J}. \quad (2.38)$$

Também é muito instrutivo calcular a derivada exterior da 2-forma campo eletromagnético dual (2.18) (verifique),

$$\mathbf{d}^*\mathbf{F} = -\mathbf{dx}^0 \wedge [\mathbf{dr} \wedge (c^*\vec{\mathbf{B}}) - \partial_0^* \vec{\mathbf{E}}] + \mathbf{dr} \wedge *\vec{\mathbf{E}}. \quad (2.39)$$

Os duais das formas campo elétrico e campo magnético estão dados em (2.19). Usando esses duais, a 3-forma (2.39) torna-se em (verifique),

$$\mathbf{d}^*\mathbf{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 - \frac{1}{2} \varepsilon^k{}_{ij} \left[\vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \partial_0 \vec{E} \right]_k \mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j. \quad (2.40)$$

Essa 3-forma deve ser proporcional à 3-forma potencial dual (verifique)

$$*\mathbf{J} = -*\bar{\rho} + \mathbf{dx}^0 \wedge (*\bar{\mathbf{J}}/c), \quad (2.41)$$

onde

$$*\bar{\rho} = \rho \, \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3, \quad *\bar{\mathbf{J}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{kij} J_k \, \mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j. \quad (2.42)$$

Desta forma, de acordo com a prescrição (2.38), temos (verifique)

$$\mathbf{dr} \wedge (c*\bar{\mathbf{B}}) - \partial_0 *\bar{\mathbf{E}} = 4\pi C_e *\bar{\mathbf{J}}/c, \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{dr} \wedge *\bar{\mathbf{E}} = 4\pi C_e *\bar{\rho}. \quad (2.43b)$$

Essas são as versões via formas tridimensionais das equações de Maxwell com as fontes. Comparando com as equações de Maxwell sem as fontes em (2.28), vemos as substituições $\bar{\mathbf{E}} \rightarrow c*\bar{\mathbf{B}}$ e $c\bar{\mathbf{B}} \rightarrow *\bar{\mathbf{E}}$.

Graças ao Teorema 1, as equações de Maxwell em (2.38) implicam na conservação da carga elétrica,

$$\mathbf{dG} = \mathbf{d}^2*\mathbf{F} = 0 \implies \mathbf{d}*\mathbf{J} = 0. \quad (2.44)$$

Explicitamente, esta condição é equivalente a (verifique)

$$\mathbf{d}*\mathbf{J} = -\frac{1}{c} \left(\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 = 0, \quad (2.45)$$

ou, usando (B.57),

$$*\mathbf{d}*\mathbf{J} = -\frac{1}{c} \left(\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) = 0, \quad (2.46)$$

a qual é equação da continuidade (3.19). Mais uma vez, a conservação da carga elétrica é uma consequência das equações de Maxwell para as fontes. Usando (2.42), a condição (2.44) pode ser reescrita como (verifique)

$$\partial_t *\bar{\rho} + \mathbf{dr} \wedge *\bar{\mathbf{J}} = 0, \quad (2.47)$$

a qual é a versão via formas tridimensionais da conservação da carga elétrica. Lembre-se que o dual de formas tridimensionais (marcadas com uma barra) é feito no espaço tridimensional euclidiano, como em (B.51).

2.3 Resumo

Os esquemas em (2.48) resumem a estrutura do eletromagnetismo de Coulomb-Ampère-Faraday-Maxwell via k -formas. A derivada exterior \mathbf{d} da 1-forma potencial \mathbf{A} gera o campo eletromagnético \mathbf{F} , uma 2-forma exata. A derivada exterior \mathbf{d} da 2-forma campo eletromagnético \mathbf{F} gera as equações de Maxwell sem as fontes. No espaço dual, a derivada exterior do campo eletromagnético dual $*\mathbf{F}$ gera a 1-forma densidade dual $*\mathbf{J}$ e, conseqüentemente,

equações de Maxwell com as fontes. A derivada exterior da 1-forma densidade dual gera a conserva da carga elétrica. A Tabela 2.1 mostra um pouco mais de detalhes, com destaque para o calibre de Lorentz na última linha.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbf{F} \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbf{0}, \quad (2.48a)$$

$$*\mathbf{F} \xrightarrow{\mathbf{d}} *\mathbf{J} \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbf{0}. \quad (2.48b)$$

Potencial	\mathbf{A}	$A_\mu \mathbf{dx}^\mu$	$(A_\mu) = (\phi, -c\vec{A})$
Campo EM	$\mathbf{F} = \mathbf{dA}$	$F_{\mu\nu} \mathbf{dx}^\mu \wedge \mathbf{dx}^\nu$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
Maxwell I	$\mathbf{dF} = 0$		
Densidade	\mathbf{J}	$J_\mu \mathbf{dx}^\mu$	$(J_\mu) = (\rho, -\vec{J}/c)$
Maxwell II	$\mathbf{d}^*\mathbf{F} = -4\pi C_e *\mathbf{J}$		
Carga conservada	$\mathbf{d}^*\mathbf{J} = 0$		
Calibre de Lorentz	$\mathbf{d}^*\mathbf{A} = 0$		

Tabela 2.1: Potenciais, densidades, campo eletromagnético, equações de Maxwell, conservação da carga elétrica e calibre de Lorentz em termos de k -formas no espaço tangente de Minkowski.

Capítulo 3

Conservações

3.1 Forças

A forma covariante da quadridensidade de força exibida em (4.6) tem uma versão única (a menos de um sinal) em termos de uma 3-forma resultante do produto exterior entre a 2-forma campo eletromagnético dual ${}^*\mathbf{F}$, dada em (2.18), e a 1-forma densidade \mathbf{J} , definida em (2.36),

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \wedge {}^*\mathbf{F} = {}^*\mathbf{F} \wedge \mathbf{J} = -(\bar{\mathbf{J}}/c) \wedge {}^*\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{dx}^0 \wedge [\rho {}^*\bar{\mathbf{E}} + (\bar{\mathbf{J}}/c) \wedge (c {}^*\bar{\mathbf{B}})]. \quad (3.1)$$

Temos aqui a densidade (volumétrica) de potência elétrica (verifique),

$$\bar{\mathbf{J}} \wedge {}^*\bar{\mathbf{E}} = \vec{J} \cdot \vec{E} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3, \quad (3.2)$$

e a densidade (volumétrica) de força de Lorentz (verifique),

$$\rho {}^*\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \wedge {}^*\bar{\mathbf{B}} = (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_k \frac{1}{2} \varepsilon^k{}_{ij} \mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j. \quad (3.3)$$

As somas implícitas estão restritas ao intervalo $\{1, 2, 3\}$. Assim, a 3-forma densidade de força em componentes é

$$\mathbf{f} = -(\bar{\mathbf{J}}/c) \cdot \vec{E} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 + [\rho \vec{E} + (\vec{J}/c) \times (c \vec{B})]_k \frac{1}{2} \varepsilon^k{}_{ij} \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j \quad (3.4)$$

O dual de (3.4) nos dá o quadrivetor densidade de força na forma covariante (verifique),

$${}^*\mathbf{f} = (\bar{\mathbf{J}}/c) \cdot \vec{E} \mathbf{dx}^0 - [\rho \vec{E} + (\vec{J}/c) \times (c \vec{B})]_k \mathbf{dx}^k. \quad (3.5)$$

Este resultado motivou a escolha do sinal em (3.1).

Como a densidade de força (3.4) é uma 3-forma, cada uma de suas partes pode ser acessada com um produto exterior (verifique),

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{f} \wedge \mathbf{dx}^\nu. \quad (3.6)$$

Todas as 4-formas resultantes possuem o mesmo sinal:

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f} \wedge \mathbf{dx}^0 (\vec{J}/c) \cdot \vec{E} \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f} \wedge \mathbf{dx}^i [\rho \vec{E} + (\vec{J}/c) \times (c\vec{B})]_i \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.7b)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3$.

Também podemos usar o produto interior (B.67) para selecionar uma determinada parte da densidade de força (3.1),

$$\mathbf{f}_\nu = * \mathbf{J} \wedge (\iota_\nu \mathbf{F}) = -(\iota_\nu \mathbf{F}) \wedge * \mathbf{J}. \quad (3.8)$$

Novamente, temos a liberdade de escolher o sinal. Usando (B.72), temos (verifique)

$$\mathbf{f}_0 = +\mathbf{dx}^0 \wedge (*\vec{J}/c) \wedge \vec{E} = (\vec{J}/c) \cdot \vec{E} \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{dx}^0 \wedge [\rho * \vec{E} + (\vec{J}/c) \wedge (c* \vec{B})] \wedge \mathbf{dx}^i = -[\rho \vec{E} + (\vec{J}/c) \times (c\vec{B})]_i \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.9b)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. Note que estas densidades de força são 4-formas, enquanto a densidade de força (3.4) é uma 3-forma. A escolha do sinal em (3.8) identifica a componente de \mathbf{f}_0 com a componente temporal da 1-forma (3.5). Vale lembrar que a flecha representa um vetor no espaço euclidiano tridimensional e a barra representa uma forma também no espaço euclidiano tridimensional (onde o dual deve ser efetuado).

Interessante observar que dentre os produtos exteriores possíveis entre \mathbf{J} e \mathbf{F} e seus duais, apenas $\mathbf{J} \wedge * \mathbf{F}$ e $\mathbf{J} \wedge \mathbf{F}$ são diferentes de zero. É instrutivo ver este outro produto exterior não-nulo (verifique),

$$\mathbf{g} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F} \wedge \mathbf{J} = \vec{J} \wedge \vec{B} - \mathbf{dx}^0 \wedge [\rho(c\vec{B}) - (\vec{J}/c) \wedge \vec{E}], \quad (3.10)$$

onde

$$\vec{J} \wedge \vec{B} = \vec{J} \cdot \vec{B} \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3, \quad (3.11)$$

e

$$\rho(c\vec{B}) - (\vec{J}/c) \wedge \vec{E} = [\rho(c\vec{B}) - (\vec{J}/c) \times \vec{E}]_k \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} \mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j. \quad (3.12)$$

As somas implícitas estão restritas ao intervalo $\{1, 2, 3\}$. O dual de (3.10) é (verifique),

$$*\mathbf{g} = -(\vec{J}/c) \cdot (c\vec{B}) \, \mathbf{dx}^0 + [\rho(c\vec{B}) - (\vec{J}/c) \times \vec{E}]_k \, \mathbf{dx}^k. \quad (3.13)$$

Compare com (3.5). Novamente, fizemos uma escolha de sinal em (3.10) para vermos as transformações $*\vec{E} \rightarrow -c\vec{B}$ e $c*\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ ao passarmos de (3.1) para (3.10) e vice-versa.

As 4-formas densidade de força correspondente a (3.10) é (verifique)

$$\mathbf{g}_\nu = (\iota_\nu * \mathbf{F}) \wedge * \mathbf{J} = -* \mathbf{J} \wedge (\iota_\nu * \mathbf{F}). \quad (3.14)$$

Usando (B.73), temos (verifique)

$$\mathbf{g}_0 = -\mathbf{dx}^0 \wedge (*\vec{J}/c) \wedge (c*\vec{B}) = -(\vec{J}/c) \cdot (c\vec{B}) \, \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{g}_i = +\mathbf{dx}^0 \wedge [\rho(c\vec{B}) - (\vec{J}/c) \wedge \vec{E}] \wedge \mathbf{dx}^i = [\rho(c\vec{B}) - (\vec{J}/c) \times \vec{E}]_i \, \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.15b)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. Note as transformações $\vec{E} \rightarrow -c\vec{B}$ e $c\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ ao passarmos de (3.9) para (3.15).

3.2 Esforços

Appendices

Apêndice A

Tensores

A.1 Introito

Comentar as referências básicas.[\[1-4\]](#)

A.2 Espaço tangente

Falando de uma maneira coloquial, uma **variedade diferenciável** \mathcal{M} de dimensão n é um espaço que pode ser coberto com cópias de espaços euclidianos \mathbb{R}^n de dimensão n . Uma variedade diferenciável é uma colcha de retalhos, onde cada retalho é um espaço euclidiano diminuto. Um ponto p num destes “retalhos” euclidianos tem coordenadas x^i (coordenadas locais). O adjetivo “diferenciável” em variedade diferenciável é herdado destes “retalhos” euclidianos. Esses retalhos não precisam ser necessariamente euclidianos. Eles podem ser riemannianos (euclidianos) ou pseudo-riemannianos (como o espaço de Minkowski), ou algum outro tipo de espaço. O conjunto de todos os mapas $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis, é o espaço das funções diferenciáveis \mathcal{F} .

Uma variedade contém em seus “retalhos”, localizados num ponto p qualquer, uma estrutura de espaço vetorial, de dimensão n , denominada de **espaço tangente** $T_p(\mathcal{M})$. Os vetores $\mathbf{v} \in T_p(\mathcal{M})$ são denominados de **vetores tangentes**. Um vetor tangente \mathbf{v} é um segmento orientado de reta, dado pela **derivada direcional**,

$$\mathbf{v}_p = \left. \frac{d}{dt} C(p + t\mathbf{v}) \right|_p, \quad (\text{A.1})$$

onde C é uma curva na variedade \mathcal{M} , passando pelo ponto p (veja a Fig. [A.1](#)). Naturalmente,

o espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$ possui uma base canônica,

$$\mathbf{v}_p = \sum_i v^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.2})$$

onde estamos usando a convenção de soma implícita no mesmo índice em posições diferentes numa mesma expressão. Note a posição dos índices que distinguem os diferentes vetores tangentes da base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, posição **covariante**. Compare estes índices covariantes com os índices que distinguem as diferentes componentes v^i de um vetor tangente descrito nesta base. Os índices nas componentes v^i estão na posição **contravariante**.

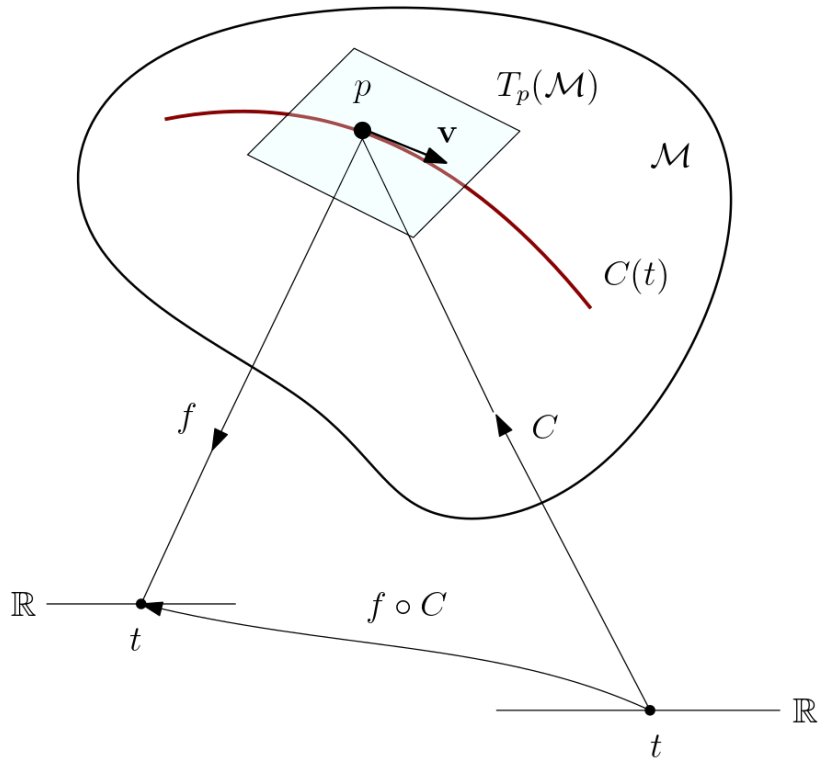


Figura A.1: Variedade diferenciável \mathcal{M} , espaço tangente T_p em p , curva C e função f .

Se tem um espaço vetorial, então existe também o **espaço dual** $T_p^*(\mathcal{M})$. Os vetores ω do espaço tangente dual são denominados de **covetores tangentes**, os quais formam o mapa linear (função real f na Fig. A.1) $\omega_p : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. Então, por definição,

$$\omega_p(\mathbf{v}) \equiv \langle \omega | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \omega \rangle \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

é um número real. A base canônica $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n\}$ do espaço dual é definida pela condição

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}^i \rangle = \delta_j^i. \quad (\text{A.4})$$

Assim, um covetor tangente ω pode ser escrito em termos de coordenadas,

$$\omega_p = \omega_i \mathbf{e}^i. \quad (\text{A.5})$$

Note a posição covariante dos índices das componentes de um covetor tangente e a posição contravariante dos índices das componentes de um vetor tangente. Esta mesma dualidade ocorre com os índices dos vetores de base nos espaços tangente e seu dual.

A.3 Derivada exterior

O conceito de covetores permite uma interpretação geométrica (moderna) para a diferencial clássica $\mathbf{d}x^i$. A razão por grafar de forma diferente a diferencial $\mathbf{d}x^i$, usando o negrito \mathbf{d} é por que $\mathbf{d}f$ é um covetor especial denominado de **derivada exterior**. Para ver o quão especial, considere uma curva $C(t)$ na variedade \mathcal{M} passando pelo ponto p . Esta curva é uma aplicação $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, de pontos da reta real \mathbb{R} em pontos da variedade \mathcal{M} , conforme ilustrado na Figura A.1. Suponha que o ponto p corresponda ao parâmetro $t = 0$. Suponha também que esta curva $C(t)$ seja parametrizada pelas coordenadas locais $x^i(t)$. Então, da definição da derivada direcional (A.1), as coordenadas v^i do vetor tangente \mathbf{v}_p em p são

$$v^i = \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{A.6})$$

Para vermos o papel (definição) do covetor derivada exterior \mathbf{d} , basta tomar a derivada da função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto p , em relação ao parâmetro t ,

$$\left. \frac{df(C(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

onde a soma implícita foi usada na última igualdade. Podemos ver este resultado como um mapa do vetor tangente \mathbf{v}_p , criado pela curva $C(t)$ em p , em um número real. Mas isto é justamente a definição (A.3) de um covetor. Este covetor $\mathbf{d}f$ (em p) é denominado de derivada exterior \mathbf{d} da função f (soma implícita),

$$\mathbf{d}f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{d}f | \mathbf{v} \rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (\text{A.8})$$

Isto nos mostra que as coordenadas da derivada exterior são as derivadas parciais em relação às coordenadas locais do ponto p (soma implícita),

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{e}^i \partial_i. \quad (\text{A.9})$$

Note a notação ∂_i introduzida na última igualdade, bem como a posição dos índices. Mais importante: a derivada exterior (A.9) lembra o conhecido operador gradiente. **Para manter na mente: a derivada exterior é a versão moderna do operador gradiente.** Naturalmente teremos uma regra própria, nova, para a multiplicação de derivadas exteriores, como veremos em breve.

Resta vermos a identificação $\mathbf{e}^i = \mathbf{d}x^i$. Para tal considere todas as curvas $C_i(t)$ passando pelo ponto p com todas as coordenadas nulas exceto uma delas, $x^i(t)$, de cada vez. As coordenadas $x^i(t)$ são funções na variedade \mathcal{M} . Essas são as curvas (funções) coordenadas e podem ser consideradas iguais a t no ponto p . Seus vetores tangentes orientam os eixos do sistema de coordenadas em p , formando uma base no espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$,

$$(\mathbf{e}_i)_j = \left. \frac{dC_i(t)}{dt} \right|_{t=0} \delta_{ij} = \left. \frac{dx^i(t)}{dt} \right|_{t=0} \delta_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.10})$$

Não tem soma implícita aqui. Similarmente, a ação da derivada exterior em uma dessas curvas coordenadas é um vetor de base do espaço dual $T_p^*(\mathcal{M})$,

$$\mathbf{d}x^i = \mathbf{e}^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \mathbf{e}^j \delta_{ij} = \mathbf{e}^i. \quad (\text{A.11})$$

Este processo também sugere que a base \mathbf{e}_i no espaço tangente, introduzida simbolicamente em (A.2), seja a derivada parcial ∂_i ,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i. \quad (\text{A.12})$$

Assim, observamos que a ação da derivada exterior $\mathbf{d}f(\mathbf{v})$ dada em (A.8) é idêntica à ação do vetor tangente $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ na função f (verifique),

$$\mathbf{d}f(\mathbf{v}) = v^i \partial_i f = \mathbf{v}(f). \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, temos

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{d}x^i(\partial_j) = \partial_j(x^i) = \delta_j^i. \quad (\text{A.14})$$

A.4 Tensor

Definimos covetores como um mapa linear de vetores tangentes no conjunto dos números reais. Essa ideia pode ser generalizada. Um **tensor** T do tipo (k, l) é um mapa multilinear de k vetores tangentes e l vetores cotangentes (duais), num determinado ponto p , no conjunto

dos números reais:

$$T : \mathbb{T}_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathbb{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathbb{T}_p^*(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathbb{T}_p^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.15})$$

Em coordenadas (somas implícitas em índices repetidos em posições contra e covariantes),

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_k} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\nu_l}, \quad (\text{A.16})$$

onde $\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}^\nu$ representa um produto ordenado, denominado de **produto tensorial**. O tensor T do tipo (k, l) tem **posto** $k + l$. Em geral estas componentes de tensores são funções da posição, ou seja, são **campos tensoriais**. Usando uma notação simplificada, onde cada índice é na verdade um conjunto de índices, o tensor (A.16) pode ser reescrito na forma

$$T = T^\mu{}_\nu \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}^\nu. \quad (\text{A.17})$$

A forma operacional é

$$T(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}_\beta) = T^\mu{}_\nu \mathbf{e}_\mu(\mathbf{e}^\alpha) \mathbf{e}^\nu(\mathbf{e}_\beta) = T^\mu{}_\nu \delta_\mu^\alpha \delta_\beta^\nu = T^\alpha{}_\beta. \quad (\text{A.18})$$

De acordo com a definição (A.15), os covetores definidos anteriormente são tensores do tipo $(1, 0)$, de posto um. Os próprios vetores tangentes \mathbf{v} são tensores do tipo $(0, 1)$, pois sempre teremos um covetor $\boldsymbol{\omega}$ para definir o mapa $\mathbf{v}_p : \mathbb{T}_p^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\boldsymbol{\omega}_p \rightarrow \langle \boldsymbol{\omega}_p | \mathbf{v}_p \rangle$.

Uma das vantagens de se lidar com tensores é a previsibilidade em saber como suas componentes mudam mediante uma transformação linear de coordenadas, as quais são muito úteis. Por exemplo, considere o tensor com componentes $T_\mu(x^i)$. Ao passarmos para um outro sistema de coordenadas, $y^j(x^i)$, as componentes $T_\nu(y^j)$ serão (soma implícita)

$$T_\nu(y^j) = T_\mu(x^i) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (\text{A.19})$$

Esta regra vale para qualquer índice nas componentes de qualquer tensor. Caso esteja usando uma quantidade física que não seja um tensor, perderá este poder de previsibilidade mediante mudanças de coordenadas. Por isso toda teoria física deve ser escrita numa forma covariante, isto é, em termos de quantidades tensoriais.

A.5 Métrica

O **tensor métrico** g é um tensor do tipo $(0, 2)$,

$$g = g_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j. \quad (\text{A.20})$$

de forma que

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (\text{A.21})$$

Este tensor métrico satisfaz as propriedades seguintes:

Simetria: $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Linearidade: $g(\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + ag(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Não-degenerescência: $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$.

O tensor métrico informa a orientação relativa dos vetores tangentes formando uma base num determinado espaço tangente. Em geral suas componentes são campos escalares.

A existência de uma métrica permite a existência de um produto interno no espaço tangente \mathbb{T} ,

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.22})$$

Dado dois vetores tangentes \mathbf{u} e \mathbf{v} , o produto interno entre eles é

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij} \mathbf{e}^i(\mathbf{u}) \mathbf{e}^j(\mathbf{v}) = g_{ij} u^i v^j. \quad (\text{A.23})$$

Naturalmente, haverá também um produto interno no espaço tangente dual \mathbb{T}^* , via o inverso do tensor métrico:

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}^j \rangle = g^{ij}, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i. \quad (\text{A.24})$$

Esse produto interno herda as mesmas propriedades de simetria, linearidade e não-degenerescência da métrica.

A matriz representando a métrica possui uma propriedade global, independente de qualquer parametrização local: seu determinante não muda de sinal, será sempre positivo ou negativo. Como o determinante é (também) o produto dos autovalores de uma matriz, isto significa que não haverá autovalores nulos. A quantidade (p, n) de autovalores positivos (p) e negativos (n) é denominada de **assinatura** da métrica. Alguns preferem a assinatura da métrica na forma $p - n$.

Um espaço com uma métrica contendo autovalores com os mesmos sinais positivos é denominada de **métrica euclidiana** e o espaço de **espaço riemanniano**. Quando os autovalores da métrica possuem sinais diferentes, o espaço é denominado de **espaço pseudo-riemanniano**.

A métrica simétrica de Minkowski, de assinatura $(1, 3)$ ou -2 ,

$$(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

é de um espaço pseudo-riemanniano. Essa será a métrica padrão na reformulação do eletromagnetismo na forma covariante. Em geral, índices gregos assumirão os valores 0 (tempo) e 1, 2, 3 (espaço) no espaço-tempo pseudo-riemanniano de Minkowski (ou simplesmente espaço de Minkowski).

Outra grande utilidade da métrica é permitir a mudança de índices covariantes (abaixo) para contravariantes (acima) e vice-versa,

$$T_\mu = g_{\mu\nu}T^\nu, \quad T^\mu = g^{\mu\nu}T_\nu. \quad (\text{A.26})$$

Cada índice requer uma contração (soma implícita) com as componentes do tensor métrico. Esta propriedade é independente da escolha de coordenadas.

Vale ressaltar que alguns preferem definir um tensor geral com a ordem inversa daquela em (A.15), ou seja, um mapa dos vetores cotangentes seguido de um mapa dos vetores tangentes. As vezes os tensores definidos como mapas de vetores tangentes são denominados de cotensores.

Apêndice B

Formas

B.1 k -formas

Uma k -forma é um tensor antissimétrico do tipo $(k, 0)$. Um **tensor antissimétrico** muda de sinal mediante a permutação de dois vetores tangentes quaisquer,

$$F(\dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}, \dots) = -F(\dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{u}, \dots), \quad (\text{B.1})$$

ou mediante a permutação de duas de suas componentes quaisquer,

$$F_{\dots\mu\dots\nu\dots} = -F_{\dots\nu\dots\mu\dots}. \quad (\text{B.2})$$

Note que não é possível falar em simetria ou antissimetria para tensores de posto $k = 1$ ou $k = 0$. No entanto, um tensor de posto zero, tipo $(0, 0)$, uma função escalar, é uma 0-forma. Um tensor de posto um, tipo $(1, 0)$, um covetor, é uma 1-forma. Portanto, os covetores de base dx^i são 1-formas (básicas).

B.2 Produto exterior

Um produto entre uma k -forma F e uma l -forma G , denominado de **produto cunha** ou **produto exterior**, associativo e distributivo, é uma $(k + l)$ -forma definida pela condição

$$F \wedge G = (-1)^{kl} G \wedge F. \quad (\text{B.3})$$

Duas propriedades importantes desse produto exterior para 1-formas podem ser verificadas imediatamente: se F e G são 1-formas, então $F \wedge G = -G \wedge F$ e $F \wedge F = 0$.

Em geral, as componentes do produto exterior são dadas pela antissimetriação das

componentes das formas envolvidas,

$$F \wedge G \rightarrow \frac{(k+l)!}{k!l!} F_{[a_1 \dots a_k} G_{b_1 \dots b_l]}. \quad (\text{B.4})$$

A antissimetriação nos índices é definida via o grupo de permutações dos índices,

$$\omega_{[a_1 \dots a_k]} = \frac{1}{k!} \left\{ \begin{matrix} b_1 \dots b_k \\ a_1 \dots a_k \end{matrix} \right\} \omega_{b_1 \dots b_k}, \quad (\text{B.5})$$

com somas implícitas nos índices b e o sinal da permutação dado pelo operador

$$\left\{ \begin{matrix} b_1 \dots b_k \\ a_1 \dots a_k \end{matrix} \right\} = \begin{cases} +1 & \text{se } b_1 \dots b_k \text{ é uma permutação par,} \\ -1 & \text{se } b_1 \dots b_k \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Por exemplo, a antissimetriação de um tensor de posto dois é

$$\omega_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}). \quad (\text{B.7})$$

De posto três,

$$\omega_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{1}{6}(\omega_{\alpha\mu\nu} + \omega_{\nu\alpha\mu} + \omega_{\mu\nu\alpha} - \omega_{\alpha\nu\mu} - \omega_{\mu\alpha\nu} - \omega_{\nu\mu\alpha}). \quad (\text{B.8})$$

Naturalmente, para um tensor antissimétrico, a antissimetriação não fornece um tensor novo.

B.2.1 Bases

Uma utilidade do produto exterior definido em (B.3) é poder reescrever k -formas em coordenadas usando o produto exterior entre os vetores de base. Para vermos isso, vamos considerar uma 2-forma escrita em coordenadas com somas irrestritas,

$$F = \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu), \quad (\text{B.9})$$

onde a última igualdade é devida à antissimetria $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$. Esse termo entre parênteses é uma antissimetriação e pode ser identificado com um produto exterior,

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \quad (\text{B.10})$$

Assim, uma 2-forma pode ser escrita em termos desse produto exterior (verifique),

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (\text{B.11})$$

Este caso de estudo sugere a identificação entre a antissimetriação de uma base e uma base em termos de produtos exteriores (somas implícitas),

$$dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k} = \left\{ \begin{matrix} a_1 \dots a_k \\ b_1 \dots b_k \end{matrix} \right\} dx^{b_1} \otimes \cdots \otimes dx^{b_k}, \quad (\text{B.12})$$

onde usamos o operador sinal de uma permutação definido em (B.6). Essa identificação permite escrevermos uma k -forma como (somas restritas)

$$F = \sum_{a_1 < \dots < a_k} F_{a_1 \dots a_k} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k}, \quad (\text{B.13})$$

ou, numa forma compacta onde as somas restritas também estão implícitas,

$$F = F_{a_1 \dots a_k} dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k}. \quad (\text{B.14})$$

O uso do produto exterior para escrever uma base no espaço das k -formas torna desnecessário o processo de antissimetriação indicado em (B.4).

B.2.2 Matrizes

Outra utilidade do produto exterior definido em (B.3) é poder usar k -formas para representar quantidades vetoriais e matriciais. Por exemplo, considere F um tensor antissimétrico de ordem dois ($k = 2$), ou seja, uma 2-forma. Então

$$F = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (\text{B.15})$$

Note a diferença entre a primeira soma, restrita, e a segunda, irrestrita. Suponha que os índices em (B.15) pertençam ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, como é comum no espaço euclidiano tridimensional. Então (verifique)

$$F = F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3, \quad (\text{B.16})$$

ou na forma canônica (base com orientações positivas)

$$F = F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{31} dx^3 \wedge dx^1 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3, \quad (\text{B.17})$$

onde usamos a antissimetria do produto exterior no segundo termo. A expressão (B.17) nos permite identificar as componentes da 2-forma F com as componentes do vetor (a menos de um sinal)

$$\vec{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}). \quad (\text{B.18})$$

A regra de identificação da ordem das componentes é dada pelas permutações circulares positivas de 123. Os subíndices em F_{12} é a parte inicial da permutação 123 e indica que F_{12} é a terceira componente do vetor \vec{F} . Analogamente, os subíndices em F_{31} é a parte inicial da permutação 312 e indica que F_{31} é segunda componente do vetor \vec{F} . Os subíndices em F_{23} é a parte inicial da permutação 231 e indica que F_{23} é primeira componente do vetor \vec{F} . Um vetor também pode ser reescrito como uma matriz antissimétrica,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_z & \\ & 0 & F_x \\ F_y & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & \\ & 0 & F_{23} \\ F_{31} & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & -F_{31} \\ & 0 & F_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

onde escrevemos apenas uma de cada duas componentes antissimétricas. Note que a componente multiplicando o termo $dx^i \wedge dx^j$ vai na entrada (i, j) da matriz F . Note também que estamos abusando, usando o mesmo nome F para a 2-forma (B.17), o vetor (B.18) e a matriz (B.19).

Suponha agora que os índices em (B.15) pertençam ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, como é comum no espaço de Minkowski da Relatividade Especial. As permutações positivas são:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0123 & 0312 & 0231 & 1032 & 2013 & 3021 \\ 1203 & 3102 & 2301 & 1320 & 2130 & 3210 \end{array}. \quad (\text{B.20})$$

Simplemente desenvolvendo as somas implícitas (restritas) em (B.15), temos (verifique)

$$F = F_{01} dx^0 \wedge dx^1 + F_{02} dx^0 \wedge dx^2 + F_{03} dx^0 \wedge dx^3 \\ + F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3. \quad (\text{B.21})$$

Usando as permutações positivas exibidas em (B.20), a forma canônica para a 2-forma (B.21) é

$$F = F_{01} dx^0 \wedge dx^1 + F_{02} dx^0 \wedge dx^2 + F_{03} dx^0 \wedge dx^3 \\ + F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{31} dx^3 \wedge dx^1 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3. \quad (\text{B.22})$$

A regra para identificar a forma canônica é observar a posição do índice 0 no sentido esquerda

para a direita no conjunto (B.20). Assim, 12 é parte de 1203, 31 é parte de 3102 e 23 é parte de 2301.

Usando o procedimento anterior, este resultado nos permite representar esta 2-forma por meio de uma matriz antissimétrica,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{31} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & +F_{31} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Dois vetores tridimensionais podem ser vistos nesta matriz 4×4 antissimétrica:

$$\vec{E} = (F_{01}, F_{02}, F_{03}), \quad \vec{B} = (-F_{23}, -F_{31}, -F_{12}). \quad (\text{B.24})$$

Certamente, os nomes destes dois vetores e o sinal do último não foram escolhidos ao acaso. Dica: encontrou uma matriz antissimétrica? Associe ela com uma 2-forma e explore as consequências.

B.2.3 Operações

Como fica a forma operacional de uma k -forma em termos dos produtos exteriores? Para aprendermos, vamos considerar novamente o caso de estudos de uma 2-forma. Como uma k -forma atua em vetores tangentes, vamos considerar dois vetores tangentes de base (somadas restritas implícitas),

$$F(e_{a_1}, e_{a_2}) = F_{b_1 b_2} (dx^{b_1} \wedge dx^{b_2})(e_{a_1}, e_{a_2}). \quad (\text{B.25})$$

Aqui precisamos usar a identificação (B.12) para efetuarmos as devidas ações,

$$\begin{aligned} (dx^{b_1} \wedge dx^{b_2})(e_{a_1}, e_{a_2}) &= (dx^{b_1} \otimes dx^{b_2} - dx^{b_2} \otimes dx^{b_1})(e_{a_1}, e_{a_2}) \\ &= dx^{b_1}(e_{a_1})dx^{b_2}(e_{a_2}) - dx^{b_2}(e_{a_1})dx^{b_1}(e_{a_2}) = \delta_{a_1}^{b_1} \delta_{a_2}^{b_2} - \delta_{a_1}^{b_2} \delta_{a_2}^{b_1}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Este resultado é um determinante,

$$(dx^{b_1} \wedge dx^{b_2})(e_{a_1}, e_{a_2}) = \begin{vmatrix} dx^{b_1}(e_{a_1}) & dx^{b_2}(e_{a_1}) \\ dx^{b_1}(e_{a_2}) & dx^{b_2}(e_{a_2}) \end{vmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

A generalização é imediata:

$$(dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_k})(e_{a_1}, \dots, e_{a_k}) = \begin{vmatrix} dx^{b_1}(e_{a_1}) & \cdots & dx^{b_k}(e_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ dx^{b_1}(e_{a_k}) & \cdots & dx^{b_k}(e_{a_k}) \end{vmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

O determinante (B.28) define uma **orientação**, positiva ou negativa. Quando esse determinante for positivo, se diz que as bases $(dx^{b_1} \wedge \cdots \wedge dx^{b_k})$ e $(e_{a_1}, \dots, e_{a_k})$ possuem a mesma orientação. A orientação de uma das bases pode ser escolhida livremente. Esse conceito de orientação é bem conhecido no espaço euclidiano tridimensional, onde escolhemos a base $\{e_1, e_2, e_3\}$ com orientação positiva. Nos planos coordenados, a “regra da mão-direita” orienta positivamente as bases $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_1\}$ e $\{e_2, e_3\}$. Note que ao completarmos os subíndices dessas bases nos planos coordenados, inserindo o terceiro subíndice no início ou no final, teremos as permutações positivas de $\{1, 2, 3\}$.

B.2.4 Geometria

Como um caso de estudos para evidenciar uma interpretação geométrica de k -formas, considere os vetores tangentes

$$X = x e_1, \quad Y = y e_2, \quad Z = z e_3, \quad W = X + Y + Z. \quad (\text{B.29})$$

Observe que as ações (verifique)

$$dx^1(W) = x dx^1(e_1) = x, \quad dx^2(W) = y, \quad dx^3(W) = z, \quad (\text{B.30})$$

são as projeções do vetor tangente W nas direções independentes.

Similarmente, as ações (verifique)

$$dx^1 \wedge dx^2(X, Y) = xy, \quad dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(X, Y, Z) = xyz, \quad (\text{B.31})$$

são, respectivamente, a área formada pelos vetores tangentes X e Y , projetada no plano 1 – 2, e o volume formado pelos vetores X , Y e Z . Note que a orientação desses segmentos de reta, de áreas e de volume dependem exclusivamente dos sinais das componentes dos vetores tangentes. Esta noção de orientação é importante para integração.

B.3 Derivada exterior

Outra situação de interesse particular importante é o produto entre a 1-forma derivada exterior e uma 2-forma. A derivada exterior foi definida em (A.9). Ela é uma 1-forma, com $\mathbf{e} = \mathbf{dx}$,

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}^\alpha \partial_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{dx}^\alpha, \quad (\text{B.32})$$

satisfazendo uma regra de Leibniz generalizada,

$$\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) = (\mathbf{d}\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\mathbf{d}\eta), \quad \omega \in \Lambda^k, \quad \eta \in \Lambda^l. \quad (\text{B.33})$$

Essa derivada exterior tem outra propriedade importantíssima. A derivada exterior \mathbf{d} é nilpotente,

Teorema 1.

$$\mathbf{d}^2 = \mathbf{d} \wedge \mathbf{d} = 0. \quad (\text{B.34})$$

Para ver a essência desse teorema, permita a derivada exterior atuar duas vezes numa 0-forma (uma função). Devido à comutatividade das derivadas parciais e da antissimetria das 1-formas, haverá cancelamentos aos pares dos termos da forma (verifique)

$$\partial_i \partial_j dx^i \wedge dx^j + \partial_j \partial_i dx^j \wedge dx^i = 0. \quad (\text{B.35})$$

Considere a 1-forma

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (\text{B.36})$$

Assim, a derivada exterior dF de uma 1-forma é a 2-forma

$$F = dA = d \wedge A = d \wedge (A_\mu dx^\mu). \quad (\text{B.37})$$

A derivada exterior d é uma derivada. Ao aplicarmos a regra da derivada do produto em (B.37), temos de usar a propriedade (B.3) do produto exterior,

$$d \wedge (A_\mu dx^\mu) = d \wedge (A_\mu) + (-1)^0 A_\mu d \wedge dx^\mu = \partial_\alpha A_\mu dx^\alpha \wedge dx^\mu, \quad (\text{B.38})$$

onde usamos também o Teorema 1, $d^2 x^i = 0$. Portanto, a 2-forma (B.37) pode ser escrita como

$$F = dA = \partial_\alpha A_\mu dx^\alpha \wedge dx^\mu = \sum_{\alpha < \mu} (\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\mu. \quad (\text{B.39})$$

Desenvolvendo as somas dentro do espaço tridimensional, temos (verifique)

$$F = dA = (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) dx^3 \wedge dx^1 + (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) dx^2 \wedge dx^3. \quad (\text{B.40})$$

Da discussão anterior, podemos ver que as componentes desta 2-forma são as mesmas componentes do rotacional do vetor $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, base ortonormal cartesiana. Este exemplo mostra que a derivada exterior de uma 1-forma calcula o rotacional do vetor formado pelas componentes desta 1-forma. **A derivada exterior de uma 1-forma é a versão moderna do rotacional.**

Devido ao Teorema 1, a derivada exterior da 2-forma (B.40) é identicamente nula, $dF = d^2A = 0$,

$$F = dA \Leftrightarrow dF = 0. \quad (\text{B.41})$$

Neste caso se diz que a 2-forma $F = dA$ é exata. A 2-forma $F = dA$ é a “diferencial exata” (derivada exterior) da 1-forma A .

Vamos considerar uma 2-forma que não seja necessariamente exata, como no exemplo dado por (B.15). Tomemos a derivada exterior da 2-forma (B.15) para formar a 3-forma

$$dF = d \wedge \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) = \sum_{\alpha < \mu < \nu} (\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha}) dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\text{B.42})$$

onde usamos a prescrição (antissimetrização) (B.4) na última igualdade (verifique),

$$(dF)_{\alpha\mu\nu} = \frac{3!}{2!} \partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha}. \quad (\text{B.43})$$

Escrevendo as somas explicitamente (espaço tridimensional), temos (verifique)

$$\begin{aligned} dF &= \partial_1 F_{23} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \partial_2 F_{31} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \partial_3 F_{12} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= (\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Note que a única componente não-nula desta 3-forma é exatamente o divergente do vetor (F_{23}, F_{31}, F_{12}) , formado pelas componentes da 2-forma F . **A derivada exterior de uma 2-forma é a versão moderna do divergente.**

B.4 Espaço vetorial

O conjunto das k -formas forma um espaço vetorial, denotado por $\Lambda^k \mathbf{T}$, de dimensão

$$\dim(\Lambda^k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (\text{B.45})$$

onde n é a dimensão do espaço tangente \mathbf{T} . A Tabela B.1 mostra as bases canônicas dos espaços vetoriais Λ^k considerando o espaço de Minkowski como o espaço tangente ($n = 4$),

com a métrica (A.25). O ordenamento dos índices é tal que cada sequência de índices é parte de uma permutação positiva, como exibidas em (B.20).

k	Λ^k	dim
0	$\{1\}$	1
1	$\{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\}$	4
2	$\{dx^0 \wedge dx^1, dx^0 \wedge dx^2, dx^0 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2\}$	6
3	$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2\}$	4
4	$\{dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}$	1

Tabela B.1: Bases para as k -formas no espaço de Minkowski.

Vimos em (A.23)–(A.24) que é possível introduzir um produto interno no espaço tangente, bem como em seu dual. Um produto interno no espaço Λ^k das k -formas pode ser definido por um determinante:

$$\langle \mathbf{e}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{\mu_k} | \mathbf{e}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{\nu_k} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}^{\mu_1} | \mathbf{e}^{\nu_1} \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}^{\mu_1} | \mathbf{e}^{\nu_k} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}^{\mu_k} | \mathbf{e}^{\nu_1} \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}^{\mu_k} | \mathbf{e}^{\nu_k} \rangle \end{vmatrix}. \quad (\text{B.46})$$

Esse produto escalar satisfaz as três propriedades requeridas: simetria, linearidade e não-degenerescência. Essa definição coincide com a ação dada em (B.28). Usando esse produto escalar podemos verificar facilmente que as bases não-triviais exibidas na Tabela B.1 são ortonormais e pseudo-riemannianas (verifique).

B.5 Mapa dual

Devido a (B.45), os espaços Λ^k e Λ^{n-k} têm dimensões idênticas. Desta forma, podemos definir um mapa linear, denominado de **estrela ou dualidade de Hodge**, para identificar estes dois espaços,

$$* : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{n-k}. \quad (\text{B.47})$$

Sejam as formas $\lambda \in \Lambda^k$, $\mu \in \Lambda^{n-k}$ e $\sigma \in \Lambda^n$. Então a forma operacional deste mapa dual é dada por

$$\lambda \wedge \mu = \langle * \lambda | \mu \rangle \sigma, \quad (\text{B.48})$$

para qualquer $(n - k)$ -forma μ .

Como exemplo, considere $n = 3$, com um espaço tangente euclidiano, $\langle e^i | e^j \rangle = \delta^{ij}$. Naturalmente, podemos escolher $\sigma = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$. Suponha que queremos encontrar o dual da 2-forma $\lambda = e^2 \wedge e^3$. Esse dual será uma 1-forma, $*\lambda = a e^1 + b e^2 + c e^3$. Temos a liberdade de escolher a 1-forma μ para usar (B.48). Escolha $\mu = e^1$. A condição (B.48) fornece

$$\lambda \wedge \mu = e^2 \wedge e^3 \wedge e^1 = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \quad (\text{B.49})$$

e

$$\langle *\lambda | \mu \rangle \sigma = \langle a e^1 + b e^2 + c e^3 | e^1 \rangle e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = a e^1 \wedge e^2 \wedge e^3. \quad (\text{B.50})$$

Identificando estas duas informações, obtemos $a = 1$. As escolhas $\mu = e^2$ e $\mu = e^3$ fornecem $b = c = 0$ (verifique). Portanto, o dual de $\lambda = e^2 \wedge e^3$ é $*\lambda = e^1$. Verifique as seguintes dualidades para $n = 3$ (euclidiano):

$$*1 = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \quad *(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) = 1, \quad (\text{B.51a})$$

$$*(e^1 \wedge e^2) = e^3, \quad *(e^3 \wedge e^1) = e^2, \quad *(e^2 \wedge e^3) = e^1, \quad (\text{B.51b})$$

$$*e^1 = e^2 \wedge e^3, \quad *e^2 = e^3 \wedge e^1, \quad *e^3 = e^1 \wedge e^2. \quad (\text{B.51c})$$

Um espaço tangente euclidiano é sempre nilpotente (de ordem dois) em relação ao mapa dual: o (mapa) dual do (mapa) dual é a identidade. Pode haver uma troca de sinais em espaços pseudo-riemannianos (digamos, antinilpotente).

O mapa dual de Hodge entre 1-formas tem o significado de produto vetorial. Sejam

$$\vec{u} = u_1 e^1 + u_2 e^2 + u_3 e^3, \quad \vec{v} = v_1 e^1 + v_2 e^2 + v_3 e^3, \quad (\text{B.52})$$

dois vetores numa base ortonormal. O produto vetorial entre eles é

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) e^1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e^3. \quad (\text{B.53})$$

Podemos representar estes dois vetores pelas 1-formas

$$u = u_1 e^1 + u_2 e^2 + u_3 e^3, \quad v = v_1 e^1 + v_2 e^2 + v_3 e^3. \quad (\text{B.54})$$

O produto exterior entre elas é

$$u \wedge v = (u_1 v_2 - u_2 v_1) e^1 \wedge e^2 - (u_3 v_1 - u_1 v_3) e^1 \wedge e^3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) e^2 \wedge e^3. \quad (\text{B.55})$$

Verifique que o mapa dual deste produto exterior é exatamente o produto vetorial (B.53):

$$\begin{aligned} *(u \wedge v) &= (u_1v_2 - u_2v_1) *(e^1 \wedge e^2) - (u_3v_1 - u_1v_3) *(e^1 \wedge e^3) + (u_2v_3 - u_3v_2) *(e^2 \wedge e^3) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)e^1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e^3. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Considerando o espaço tangente com a métrica de Minkowski (A.25), será muito útil calcular, via (B.48), todos os duais $*\lambda$ de cada elemento λ nas bases mostradas na Tabela B.1. Em todos os casos, temos $\sigma = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$, com a identificação $e^i = dx^i$. Os espaços Λ^0 e Λ^4 são complementares,

$$*1 = -e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \quad *(e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) = 1. \quad (\text{B.57})$$

Note que o dual do dual aqui troca de sinal.

Os espaços Λ^1 e Λ^3 também são complementares. A forma genérica de um dual $*\lambda$ ao espaço Λ^1 é uma combinação linear dos elementos da base $k = 3$ na Tabela B.1 e podemos usar μ como um dos elementos desta mesma base para determinar, via (B.48), os coeficientes da combinação linear em $*\lambda$. Aplicando este procedimento aos espaços Λ^1 e Λ^3 , obtemos (verifique)

$$\begin{aligned} *e^0 &= -e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, & *(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) &= -e^0, \\ *e^1 &= -e^0 \wedge e^2 \wedge e^3, & *(e^0 \wedge e^2 \wedge e^3) &= -e^1, \\ *e^2 &= -e^0 \wedge e^3 \wedge e^1, & *(e^0 \wedge e^3 \wedge e^1) &= -e^2, \\ *e^3 &= -e^0 \wedge e^1 \wedge e^2, & *(e^0 \wedge e^1 \wedge e^2) &= -e^3, \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

respectivamente. Desta vez, o dual do dual não troca de sinal.

Por fim, o espaço Λ^2 é dual a ele mesmo. Repetindo o procedimento anterior, temos (verifique)

$$\begin{aligned} *(e^0 \wedge e^1) &= +e^2 \wedge e^3, & *(e^2 \wedge e^3) &= -e^0 \wedge e^1, \\ *(e^0 \wedge e^2) &= +e^3 \wedge e^1, & *(e^3 \wedge e^1) &= -e^0 \wedge e^2, \\ *(e^0 \wedge e^3) &= +e^1 \wedge e^2, & *(e^1 \wedge e^2) &= -e^0 \wedge e^3. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Aqui, o dual do dual troca de sinal.

Em geral, considerando uma métrica com assinatura t (soma dos autovalores) num espaço tangente de dimensão n , a paridade do mapa dual no espaço Λ^k é dada por

$$**\lambda = (-1)^p \lambda, \quad p = k(n - k) + (n - t)/2 \pmod{2}. \quad (\text{B.60})$$

Verifique isto para os exemplos anteriores.

B.6 Produto interior

A Tabela B.2 sintetiza as operações binárias envolvendo k -formas (no espaço Λ^k) e vetores tangentes (no espaço \mathbb{T}) e seus duais (no espaço \mathbb{T}^*). A derivada exterior é um caso particular de produto exterior. Naturalmente, os produtos internos (ou escalares) dependem da métrica e sua inversa. Apesar do mapa dual não ser uma operação binária, foi adicionado por depender do produto exterior e do produto interno, portanto, dependente da métrica. A derivada exterior também não é uma operação binária, mas foi adicionada para completar o quadro de mapas lineares importantes. Esta seção explora a forma operacional do produto interior, uma operação binária envolvendo um vetor tangente e uma k -forma.

exterior	$\cdot \wedge \cdot$	$\Lambda^k \times \Lambda^l \rightarrow \Lambda^{k+l}$	$\lambda \wedge \mu = (-1)^{kl} \mu \wedge \lambda$
interior	$\iota \cdot$	$\mathbb{T} \times \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k-1}$	$\iota_v \mu(e_{j_1}, \dots, e_{j_{k-1}}) = \mu(v, e_{j_1}, \dots, e_{j_{k-1}})$
Lie	$\mathcal{L} \cdot$	$\mathbb{T} \times \Lambda^k \rightarrow \Lambda^k$	$\mathcal{L}_v \mu = \iota_v(d\mu) + d(\iota_v \mu)$
interno	$\langle \cdot \cdot \rangle$	$\mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$	$\langle e_i e_j \rangle = g_{ij}$
interno	$\langle \cdot \cdot \rangle$	$\mathbb{T}^* \times \mathbb{T}^* \rightarrow \mathbb{R}$	$\langle e^i e^j \rangle = g^{ij}$
dual	$*$	$\Lambda^k \rightarrow \Lambda^{n-k}$	$\lambda \wedge \mu = \langle * \lambda \mu \rangle \sigma, \sigma \in \Lambda^n$
derivada	\mathbf{d}	$\Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}$	$\mathbf{d} = \mathbf{d}\mathbf{x}^i \partial_i$

Tabela B.2: Operações binárias envolvendo k -formas (no espaço Λ^k) e vetores tangentes (no espaço \mathbb{T}) e seus duais (no espaço \mathbb{T}^*). A operação Lie é denominada de derivada de Lie.

O produto interior, definido por

$$\iota \cdot : \mathbb{T} \times \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k-1}, \quad \iota_v \mu(e_{j_1}, \dots, e_{j_{k-1}}) = \mu(v, e_{j_1}, \dots, e_{j_{k-1}}), \quad (\text{B.61})$$

onde $v \in \mathbb{T}$, $\lambda, \mu \in \Lambda^k$ e $\iota_v \mu \in \Lambda^{k-1}$, é (verifique) bilinear, antissimétrico e uma antiderivada (para uma k -forma ímpar):

$$\iota_v f = 0, \quad f \in \Lambda^0, \quad (\text{B.62a})$$

$$\iota_v(\lambda + a\mu) = \iota_v \lambda + a \iota_v \mu, \quad (\text{B.62b})$$

$$\iota_{v+au} \lambda = \iota_v \lambda + a \iota_u \lambda, \quad (\text{B.62c})$$

$$\iota_u \iota_v \lambda = -\iota_v \iota_u \lambda, \quad (\text{B.62d})$$

$$\iota_v(\lambda \wedge \omega) = (\iota_v \lambda) \wedge \omega + (-1)^k \lambda \wedge (\iota_v \omega). \quad (\text{B.62e})$$

Nesta última propriedade, $\omega \in \Lambda^p$, ou seja, ω e λ não precisam ser do mesmo tipo. Note que o produto interior de uma função $f \in \Lambda^0$ é nulo, por definição, $\iota_v f = 0$.

Considerando o espaço Λ^1 das 1-formas, o espaço Λ^0 é o espaço das funções escalares, cuja base é a unidade. Assim, a definição (B.61) torna-se em

$$\iota_v \mu = \mu(v), \quad (\text{B.63})$$

a própria definição de um vetor tangente dual (covetores) dada em (A.3). Será útil especializar o produto interno (B.63) para a 1-forma (B.32), a derivada exterior, (verifique)

$$\iota_v df = df(v) = v(f). \quad (\text{B.64})$$

Para μ no espaço Λ^2 das 2-formas, espaço tangente T tridimensional,

$$\mu = \mu_{12} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + \mu_{31} \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 + \mu_{23} \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3, \quad \mu_{ij} = -\mu_{ji}, \quad (\text{B.65})$$

o produto interior $\iota_v \mu$ é uma 1-forma, portanto uma combinação linear da base \mathbf{e}^i

$$\iota_i \mu = \alpha_{ij} \mathbf{e}^j, \quad (\text{B.66})$$

onde introduzimos a notação conveniente,

$$\iota_i = \iota_{\mathbf{e}_i}. \quad (\text{B.67})$$

Basta considerar os vetores tangentes de base, $v = \mathbf{e}_i$. Os coeficientes α_{ij} da combinação linear (B.66), como sempre, são dados pelas ações do produto interior na base \mathbf{e}_i do espaço tangente associado (verifique),

$$\alpha_{ij} = \iota_i \mu(\mathbf{e}_j) = \mu(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mu_{ij}. \quad (\text{B.68})$$

Portanto, temos (verifique)

$$v = \mathbf{e}_1 \implies \iota_1 \mu = \mu_{12} \mathbf{e}^2 + \mu_{13} \mathbf{e}^3, \quad (\text{B.69a})$$

$$v = \mathbf{e}_2 \implies \iota_2 \mu = \mu_{21} \mathbf{e}^1 + \mu_{23} \mathbf{e}^3, \quad (\text{B.69b})$$

$$v = \mathbf{e}_3 \implies \iota_3 \mu = \mu_{31} \mathbf{e}^1 + \mu_{32} \mathbf{e}^2. \quad (\text{B.69c})$$

É instrutivo considerar os produtos interiores da 2-forma campo eletromagnético

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{dx}^0 \wedge \bar{\mathbf{E}} - c\bar{\mathbf{B}} = E_1 \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 + E_2 \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^2 + E_3 \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^3 \\ - cB_1 \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 - cB_2 \mathbf{dx}^3 \wedge \mathbf{dx}^1 - cB_3 \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2, \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

no espaço tangente de Minkowski, e sua dual

$$\begin{aligned} *F = dx^0 \wedge c^* \bar{B} + *E = cB_1 dx^0 \wedge dx^1 + cB_2 dx^0 \wedge dx^2 + cB_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ + E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned} \quad (B.71)$$

na direção dos vetores tangentes de base e_ν . Temos (verifique),

$$\iota_0 F = +E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 = \bar{E}, \quad (B.72a)$$

$$\iota_1 F = -E_1 dx^0 + cB_2 dx^3 - cB_3 dx^2, \quad (B.72b)$$

$$\iota_2 F = -E_2 dx^0 + cB_3 dx^1 - cB_1 dx^3, \quad (B.72c)$$

$$\iota_3 F = -E_3 dx^0 + cB_1 dx^2 - cB_2 dx^1 \quad (B.72d)$$

e (verifique)

$$\iota_0 *F = +cB_1 dx^1 + cB_2 dx^2 + cB_3 dx^3 = c^* \bar{B}, \quad (B.73a)$$

$$\iota_1 *F = -cB_1 dx^0 - E_2 dx^3 + E_3 dx^2, \quad (B.73b)$$

$$\iota_2 *F = -cB_2 dx^0 - E_3 dx^1 + E_1 dx^3, \quad (B.73c)$$

$$\iota_3 *F = -cB_3 dx^0 - E_1 dx^2 + E_2 dx^1. \quad (B.73d)$$

Novamente vemos as transformações $*\bar{E} \rightarrow -c\bar{B}$ e $c^*\bar{B} \rightarrow \bar{E}$ ao passarmos de (B.72) para (B.73), bem como as transformações $\bar{E} \rightarrow c^*\bar{B}$ e $c\bar{B} \rightarrow -*\bar{E}$ ao passarmos de (B.73) para (B.72).

B.7 Derivada de Lie

A derivada de Lie de uma k -forma é um mapa linear,

$$\mathcal{L} : T \times \Lambda^k \rightarrow \Lambda^k, \quad (B.74)$$

definido pela operação binária

$$\mathcal{L}_u \omega = [\iota_u, \mathbf{d}]_+ \omega = \iota_u(\mathbf{d}\omega) + \mathbf{d}(\iota_u \omega), \quad u \in T, \quad \omega \in \Lambda^k. \quad (B.75)$$

Esta derivada de Lie quando aplicada a uma função,

$$\mathcal{L}_u f = \iota_u(\mathbf{d}f) \quad (B.76)$$

onde usamos a propriedade $\iota_u f = 0$, é idêntica à ação de um vetor tangente (verifique),

$$\mathcal{L}_u f = \iota_u(\mathbf{d}f) = \mathbf{d}f(u) = u(f). \quad (\text{B.77})$$

Quando aplicada à derivada exterior, sua ação é idêntica à derivada exterior (verifique),

$$\mathcal{L}_u \mathbf{d}f = \mathbf{d}(\iota_u \mathbf{d}f) = \mathbf{d}u(f) = \mathbf{d}\mathcal{L}_u f, \quad (\text{B.78})$$

onde usamos $\mathbf{d}^2 = 0$ e a ação (B.77) na última igualdade.

A derivada de Lie (B.75) satisfaz a regra de Leibniz para quaisquer formas $\omega \in \Lambda^k$ e $\eta \in \Lambda^l$,

$$\mathcal{L}_u(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_u \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_u \eta). \quad (\text{B.79})$$

Para verificar esta propriedade (verifique), precisamos usar as propriedades (B.33) e (B.62e) após desenvolver o lado esquerdo usando a definição em (B.75).

As derivadas exterior e de Lie comutam,

$$[\mathbf{d}, \mathcal{L}_u]\omega = 0, \quad \mathbf{d}(\mathcal{L}_u \omega) = \mathcal{L}_u(\mathbf{d}\omega). \quad (\text{B.80})$$

Para verificarmos esta propriedade, podemos proceder por indução, iniciando escrevendo a k -forma ω na forma

$$\omega = \mathbf{d}f \wedge \eta, \quad \eta \in \Lambda^{k-1}. \quad (\text{B.81})$$

Assim, temos (verifique)

$$\mathbf{d}\omega = -\mathbf{d}f \wedge (\mathbf{d}\eta). \quad (\text{B.82})$$

Desta forma, temos (verifique)

$$\mathcal{L}_u \omega = (\mathcal{L}_u \mathbf{d}f) \wedge \eta + \mathbf{d}f \wedge (\mathcal{L}_u \eta), \quad (\text{B.83a})$$

$$\mathcal{L}_u \mathbf{d}\omega = -(\mathcal{L}_u \mathbf{d}f) \wedge \mathbf{d}\eta - \mathbf{d}f \wedge (\mathcal{L}_u \mathbf{d}\eta). \quad (\text{B.83b})$$

Precisamos tomar a derivada exterior da primeira destas relações (verifique),

$$\mathbf{d}(\mathcal{L}_u \omega) = -(\mathcal{L}_u \mathbf{d}f) \wedge \mathbf{d}\eta - \mathbf{d}f \wedge (\mathbf{d}\mathcal{L}_u \eta), \quad (\text{B.84})$$

onde usamos o Teorema 1, $\mathbf{d}^0 = 0$, e a ação (B.78). Portanto, podemos observar que se a propriedade (B.80) é válida em Λ^{k-1} , isto é, $\mathbf{d}\mathcal{L}_u \eta = \mathcal{L}_u \mathbf{d}\eta$, então ela será válida também em Λ^k . A ação (B.78) completa a demonstração.

A derivada de Lie em si não é comutativa e não comuta com o produto interior:

$$\mathcal{L}_{[u,v]}\omega = [\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v]\omega, \quad (\text{B.85a})$$

$$\iota_{[u,v]}\omega = [\mathcal{L}_u, \iota_v]\omega. \quad (\text{B.85b})$$

Vale mencionar que a derivada de Lie é um mapa multilinear, porém os coeficientes das combinações lineares precisam ser constantes,

$$\mathcal{L}_u(\omega + a\eta) = \mathcal{L}_u\omega + a\mathcal{L}_u\eta, \quad (\text{B.86a})$$

$$\mathcal{L}_{u+av}\omega = \mathcal{L}_u\omega + a\mathcal{L}_v\omega, \quad (\text{B.86b})$$

$$\mathcal{L}_{fu}\omega = f\mathcal{L}_u\omega + \mathbf{d}f \wedge (\iota_u\omega), \quad (\text{B.86c})$$

com $u, v \in \mathbf{T}$, $\omega, \eta \in \Lambda^k$, $f \in \Lambda^0$ e a uma constante.

Referências Bibliográficas

- [1] F. W. Hehl and Yuri N. Obukhov. *Foundations of Classical Electrodynamics*. Birkhäuser, 2003.
- [2] R. W. R. Darling. *Differential Forms and Connections*. Cambridge, 1999.
- [3] B. Felsager. *Geometry, Particles, and Fields*. Springer, 1998.
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.