Equações de Maxwell. Parte II: forma covariante.

Esmerindo Bernardes [1]

L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

25 de maio de 2022

[1]email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introito

O Eletromagnetismo de Maxwell está intimamente interligado com a Relatividade Especial de Einstein, embora esta tenha sido descoberta (elaborada?) cerca de meio século depois. Tivemos uma pequena demonstração desta inter-relação na Seção 3.5.1. Ainda que de forma singela, vamos "construir" uma formulação covariante para as equações de Maxwell. Isto significa reescrever as equações de Maxwell de forma a facilitar a verificação de que elas são invariantes perante às transformações de Lorentz na Relatividade Especial de Einstein.

Dadas as 1-formas (componentes) densidade e potencial

$$(J^\mu) = (\rho, \vec{J}/c), \quad (A^\mu) = (\phi, c\vec{A}), \tag{1.1}$$

o campo eletromagnético é representado pela 2-forma (conexão)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.2}$$

A carga elétrica é conservada,

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0. \tag{1.3}$$

As equações de Maxwell são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi C_e J^\nu, \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0, \tag{1.4}$$

sendo ${}^*F^{\mu\nu}$ o dual do campo eletromagnético.

As leis de conservação da energia e do momentum linear podem ser escritas como

$$\partial_\alpha T^{\alpha\nu} = 0, \tag{1.5}$$

onde $T = T_{mec} + T_{em}$ é o tensor dos esforços totais, mecânico T_{mec} e eletromagnético,

$$T_{em}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi C_e}\frac{1}{2}\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} + {}^{*}F^{\mu\alpha}{}^{*}F_{\alpha}{}^{\nu}\right). \tag{1.6}$$

Capítulo 2

Espaço de Minkowski

2.1 Métrica

Vamos iniciar estabelecendo notações. As definições, como usual, estão implícitas nas afirmações. A geometria da Relatividade Especial não é mais a euclidiana. A geometria da Relatividade Especial é aquela estabelecida por Minkowski (hiperbólica). Tempo não é mais absoluto. O tempo junto com o espaço euclidiano tridimensional, forma o espaço-tempo quadridimensional, onde um evento em um referencial inercial $\mathcal{O}$ ocorrendo num "instante" t (ou ct), na posição espacial (x, y, z), será grafado como um quadrivetor (um tensor de ordem um),

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \tag{2.1}$$

As coordenadas x^μ são denominadas de contravariantes. Como a métrica deste espaço não é a identidade, teremos também as coordenadas covariantes,

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu. \tag{2.2}$$

Note a soma implícita nos índices contra e covariante designados pela mesma letra numa mesma expressão.

Neste espaço de Minkowski, a distância infinitesimal entre dois pontos (ou eventos) é um invariante dado por

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu, \tag{2.3}$$

onde a métrica $g_{\mu\nu}$ é diagonal (os demais elementos são nulos),

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1. \tag{2.4}$$

Esta forma (2.3) de calcular a distância infinitesimal e o fato dela ser invariante perante às transformações de Lorentz define a geometria deste espaço (espaço de Minkowski).

Usando a métrica (2.4) e a prescrição (2.2), as coordenadas covariantes da quadriposição são (verifique)

$$(x_\mu) = (g_{\mu\nu}x^\nu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z). \tag{2.5}$$

De forma similar, podemos passar das coordenadas contravariantes de um tensor de segunda ordem para as suas coordenadas covariantes usando a prescrição (2.2) para cada um dos índices contravariantes,

$$T_{\mu\nu} = T^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}. \tag{2.6}$$

Usando a métrica (2.4), temos (verifique)

$$T_{00} = T^{\alpha\beta}g_{\alpha 0}\, g_{\beta 0} = +T^{00}, \tag{2.7a}$$

$$T_{0i} = T^{\alpha\beta}g_{\alpha 0}\, g_{\beta i} = -T^{0i}, \tag{2.7b}$$

$$T_{ij} = T^{\alpha\beta}g_{\alpha i}\, g_{\beta j} = +T^{ij}. \tag{2.7c}$$

Naturalmente, esse procedimento é estendido a um tensor de ordem arbitrária.

Se não fosse pelos sinais diferentes nos elementos não-nulos (2.4), essa métrica seria a mesma de um espaço euclidiano de quatro dimensões. Note que o traço da métrica do espaço de Minkowski é -2, enquanto o traço da métrica do espaço euclidiano é sempre igual à dimensão do espaço. Note também a presença da velocidade da luz c multiplicando o tempo t, para formar $x^0 = ct$. Bom não esquecer que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial.

Exercício 1. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

2.2 Taxas

Taxas "temporais" devem ser feitas em um local fixo, usando o "relógio" próprio do objeto visto em movimento. Assim, a distância infinitesimal (2.3) é

$$(ds)^2 = (cd\tau)^2, \tag{2.8}$$

onde τ é o tempo próprio. Da invariância do intervalo infinitesimal ds, temos (verifique)

$$(ds)^2 = (cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 \left(1 - \left\| \frac{d\vec{r}}{cdt} \right\|^2 \right). \tag{2.9}$$

Esta expressão geralmente é escrita na forma

$$(ds)^2 = (cd\tau)^2 = \frac{(cdt)^2}{\gamma_v^2} \tag{2.10}$$

onde

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}, \ \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.11}$$

Portanto, de (2.10) podemos escolher

$$ds = cd\tau = \frac{cdt}{\gamma_v}. \tag{2.12}$$

Assim, podemos definir a quadrivelocidade v^μ (índices gregos) como (verifique)

$$(v^\mu) = \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \gamma_v \left(c, \vec{v}\right), \tag{2.13}$$

ou como

$$(u^\mu) = \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{1}{c} \left(v^\mu\right) = \gamma_v \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right). \tag{2.14}$$

Note que a quadrivelocidade tem o módulo constante (verifique)

$$v_\mu v^\mu = c^2, \quad u_\mu u^\mu = 1. \tag{2.15}$$

Podemos definir o quadrimomentum linear como

$$(p^\mu) = mc \left(u^\mu\right) = m \left(v^\mu\right) = \left(\gamma_v mc^2/c, \gamma_v m\vec{v}\right). \tag{2.16}$$

Podemos introduzir o vetor momentum linear relativístico

$$\vec{p} = \gamma_v m\vec{v} \tag{2.17}$$

e a energia relativística

$$\mathcal{E} = \gamma_v mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \tag{2.18}$$

para reescrever o quadrimomentum linear (2.16) como

$$(p^\mu) = (\mathcal{E}/c, \vec{p})\,. \tag{2.19}$$

Desta forma, a taxa temporal desse quadrimomentum linear é (verifique)

$$\left(\frac{dp^\mu}{dt}\right) = \gamma_v \left(\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right). \tag{2.20}$$

Naturalmente, o módulo do quadrimomentum linear é constante,

$$p_\mu p^\mu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + p^2 = (mc)^2. \tag{2.21}$$

Desse resultado, temos a relação de dispersão

$$\mathcal{E}^2 + c^2 p^2 = (mc^2)^2. \tag{2.22}$$

Exercício 2. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

Capítulo 3

Equações de campo

3.1 Quadridensidade

Note a presença da velocidade da luz, c, sempre multiplicando o tempo t, para formar $x^0 = ct$, tanto no quadrivetor posição (2.1), quanto no grupo das equações de Maxwell ligado à indução,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (c\vec{B}) = -4\pi C_e(\vec{J}/c), \tag{3.1a}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial (c\vec{B})}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{3.1b}$$

Assim, os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético (rebatizado) $c\vec{B}$ têm as mesmas dimensões (verifique). Isso sugere "rebatizarmos" também a densidade de corrente para $\vec{J}/c$, a qual passa a ter as mesmas dimensões de densidade de carga (verifique).

Note que tudo está confluindo para percebermos que as equações de Maxwell vivem no espaço de Minkowski. Tem mais. Tomando o divergente da equação de Maxwell que tem o rotacional do campo magnético e usando a primeira equação de Maxwell para introduzir a densidade da cargas, obteremos a equação da continuidade (3.19), uma lei de conservação (da carga elétrica). Esta equação da continuidade (3.19) está "implorando" para definirmos um quadrivetor densidade ou quadridensidade (J^ν),

$$(J^\nu) = (\rho, J_x/c, J_y/c, J_z/c), \quad (J_\nu) = (\rho, -J_x/c, -J_y/c, -J_z/c), \tag{3.2}$$

tal que

$$0 = \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}/c) = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^1}{\partial x^1} + \frac{\partial J^2}{\partial x^2} + \frac{\partial J^3}{\partial x^3} \equiv \partial_\nu J^\nu. \tag{3.3}$$

Ou seja, o quadridivergente da quadridensidade igual a zero,

$$\partial_\nu J^\nu = 0, \tag{3.4}$$

é a forma covariante da conservação da carga no espaço-tempo de Minkowski.

Exercício 3. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

3.2 Quadripotencial

Outra equação que também está implorando para ser reescrita na forma covariante é o calibre de Lorentz (5.20),

$$0 = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (c\vec{A}) = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = \partial_\nu A^\nu, \tag{3.5}$$

onde o quadrivetor

$$(A^\nu) = (\phi, cA_x, cA_y, cA_z), \quad (A_\nu) = (\phi, -cA_x, -cA_y, -cA_z), \tag{3.6}$$

é o quadripotencial.

A versão covariante do calibre de Lorentz,

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \tag{3.7}$$

afirma que o quadridivergente do quadripotencial é nulo. Seria outra lei de conservação? Ou simplesmente a conservação da carga (elétrica) em termos dos potenciais?

Seguindo a mesma linha, a versão covariante da simetria de calibre (5.19) é (verifique)

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu(c\xi). \tag{3.8}$$

Note aqui os índices covariantes.

Resumo até aqui: densidade de carga (campo escalar) se junta com densidade de corrente (campo vetorial) para formar o quadrivetor densidade; potencial escalar (campo escalar) se junta com potencial vetor (campo vetorial) para formar o quadrivetor potencial. Usando estes dois quadrivetores, a versão covariante das equações de ondas (5.21) para os potenciais, com o calibre de Lorentz (3.7), é (verifique)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi C_m\, J^\nu. \tag{3.9}$$

Exercício 4. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

3.3 O campo eletromagnético

E os campos elétrico e magnético, o que eles formam no espaço-tempo de Minkowski? Como já temos os potenciais no espaço-tempo, vamos usá-los para tentarmos uma versão covariante para os campos. Para tal, usemos as relações (5.13) entre os campos e seus potenciais. A equação do campo elétrico em (5.13) pode ser reescrita assim:

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial (cA_i)}{\partial t} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{\partial (cA_i)}{\partial x^0} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^i} + \frac{\partial (A_i)}{\partial x^0}, \tag{3.10}$$

onde usamos o quadrivetor potencial na última igualdade (mesma notação do potencial vetor). Não se deixe levar pelo fato de usarmos a mesma letra para indicar o potencial vetor A_i e o quadrivetor potencial $A_i \to -cA_i$.

O resultado acima sugere (depois de algum esforço manual) definirmos um campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ por uma matriz antissimétrica (tensor de ordem dois),

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.11}$$

Excelente exercício: verifique que esta matriz assume as formas (verifique)

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ & & 0 & -cB_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ & & 0 & -cB_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Impressionante! Os campos vetoriais elétrico e magnético se juntam para formar um objeto único no espaço de Minkowski: um tensor de ordem dois (uma matriz antissimétrica de ordem dois).

O dual do tensor campo eletromagnético, considerando a métrica de Lorentz,

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{3.13}$$

onde ϵ é o tensor completamente antissimétrico, tem a seguinte representação matricial

(verifique)

$$({}^*F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_1 & cB_2 & cB_3 \\ & 0 & E_3 & -E_2 \\ & & 0 & E_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad ({}^*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -cB_1 & -cB_2 & -cB_3 \\ & 0 & E_3 & -E_2 \\ & & 0 & E_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Note que o dual corresponde à transformação

$$\vec{E} \to c\vec{B}, \quad c\vec{B} \to -\vec{E}, \tag{3.15}$$

ao passarmos de (3.12) para (3.14). O tensor campo eletromagnético e seu dual são "perpendiculares" (verifique)

$${}^*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.16}$$

Nota: o tensor completamente antissimétrico dentro do pacote Physics no Maple 2021 é definido levando em consideração as coordenadas (x, y, z, ct) ao invés de (ct, x, y, z) como temos usado. A assinatura da métrica é a mesma que temos usado.

Exercício 5. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

3.4 Equações de Maxwell

Como reobter as equações de Maxwell diretamente do campo eletromagnético (3.11) ou (3.12)? Por inspeção direta, as duas equações de Maxwell ligadas às fontes são (verifique),

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi C_e J^\nu. \tag{3.17}$$

Vamos verificar uma delas, por exemplo a lei de Coulomb, a primeira equação de Maxwell,

$$4\pi C_e J^0 = 4\pi C_e \rho = \sum_{i=1}^{3} \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \tag{3.18}$$

Mais uma,

$$4\pi C_e J^1 = 4\pi \frac{C_e}{c} J_x = \sum_{i=2}^{3} \partial_i F^{i1} = c(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x - \frac{\partial E_x}{\partial ct}, \tag{3.19}$$

a qual, usando $C_e = c^2 C_m$, pode ser reescrita como

$$4\pi C_m J_x = (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \tag{3.20}$$

uma das componentes da terceira equação de Maxwell, ou a lei de Ampère, dada em (4.5).

As outras duas equações de Maxwell, independentes das fontes, são dadas por (verifique),

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.21}$$

Como exemplo, verifique que a componente temporal fornece o divergente do campo magnético,

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu 0} = c\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.22}$$

fornecendo assim a segunda equação de Maxwell. As componentes espaciais em (3.21) fornecem a quarta equação de Maxwell, ou a lei de Faraday (4.9). Note o papel do campo eletromagnético dual em propiciar uma certa unidade às equações (3.17) e (3.21).

A segunda e a quarta das equações de Maxwell exibidas na Sec. 1.2, as equações sem as fontes, também podem ser escritas numa forma diferente daquela em (3.21). Considere a relação

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\alpha\nu} + \partial_\nu F_{\mu\alpha}, \tag{3.23}$$

a qual lembra a regra da derivada do produto (para os índices) ou

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} = W_{\alpha\mu\nu} = 0, \tag{3.24}$$

a qual contém as permutações cíclicas (positivas) dos índices (α, μ, ν). Verifique que as componentes da forma $W_{0,i,j}$, com $i \neq j \neq 0$, fornece as componentes da quarta equação de Maxwell, ligada à indução de Faraday, e $W_{i,j,k}$, com $i \neq j \neq k \neq 0$, fornece a divergência nula do campo magnético (segunda equação de Maxwell).

Note as receitas muito distintas (3.17) e (3.24) de escrever as equações de Maxwell. Esperávamos uma derivada primeira das coordenadas. A receita (3.17) envolve uma soma em um dos índices do tensor campo eletromagnético. A receita (3.24) envolve apenas permutações dos índices do tensor $W_{\alpha\mu\nu}$. Aparentemente são receitas muito distintas.

De fato, apenas a condição (3.17) (aparentemente) tem uma origem física, fruto de leis físicas. Note que a condição (3.17) envolve as fontes (densidades de carga e corrente). A condição (3.24) é de origem geométrica. Uma vez identificado o campo eletromagnético com uma forma diferencial de posto dois, como em (3.11)–(3.12), que é a derivada exterior de uma 1-forma (o quadripotencial vetor A), $F = dA$, então a derivada exterior dessa 2-forma representado o campo eletromagnético é nula, $dF = d^2A = 0$, conforme o Teorema 1. Note (e verifique) que o resultado (B.42) combinado com $dF = 0$ fornece a condição (3.24). Isto parece um forte indício que carga magnética não precisa existir ou nem mesmo ter existido. Se existisse carga magnética, ela não "caberia" na presente descrição matemática/geométrica. Afinal qual o problema de aceitarmos que fenômenos magnéticos estão associados à existência de cargas elétricas em movimento?

Exercício 6. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

Capítulo 4

Leis de conservação

4.1 Quadriforça

O vetor quadriforça para uma carga pontual q é formado pela potência (componente temporal) e pela força de Lorentz (parte espacial). Sua representação é dada pela projeção do tensor campo eletromagnético (3.11)–(3.12) sobre a quadrivelocidade (adimensional) (2.14), como podemos verificar (verifique)

$$q(F^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}) = \gamma_v \left(\frac{1}{c} q\vec{v} \cdot \vec{E}, q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \right). \tag{4.1}$$

Newton impôs que a trajetória da carga pontual q é determinada igualando força com a taxa de variação (temporal) do vetor momentum linear. Assim, usando a taxa de variação (2.20) para o quadrimomentum linear (2.19), a segunda lei de Newton relativística é

$$\gamma_v \left(\frac{1}{c} q\vec{v} \cdot \vec{E}, q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \right) = \gamma_v \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right). \tag{4.2}$$

Portanto, temos a potência e a força de Lorentz

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \tag{4.3}$$

respectivamente, para uma carga pontual q.

Considerando uma distribuição contínua de carga total Q, um elemento de carga tem carga $dq = \rho\, dV$ e velocidade $\vec{v}$. Assim (verifique), a potência total é a integral de volume da densidade volumétrica de potência $\wp_m$,

$$\wp_m = \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E}, \tag{4.4}$$

e a força de Lorentz total é a integral de volume da densidade volumétrica de força $\vec{f}_m$,

$$\vec{f}_m = \frac{\partial \vec{\varrho}_m}{\partial t} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v}\times\vec{B} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}, \tag{4.5}$$

onde introduzimos a densidade volumétrica de energia ε_m e a densidade volumétrica de momentum linear $\vec{\varrho}_m$, bem como usamos a densidade de corrente $\vec{J} = \rho\vec{v}$. O subíndice m indica quntidades mecânicas, de origem não-eletromagnética. A equação (4.5) é a segunda lei de Newton, na forma de densidade volumétrica. Não podemos esquecer que o momentum linear é relativístico (tem um fator gama). Desta forma, podemos introduzir o quadrivetor densidade de força eletromagnética,

$$(f^\mu) = \left(\vec{J}\cdot\vec{E}/c, \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\right), \tag{4.6}$$

formado pelas densidades potência elétrica e força de Lorentz.

Exercício 7. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

4.2 Esforços

Como expressar as leis de conservação encontradas no Cap. 6 numa forma covariante? Como generalizar a ideia de forças conservativas como sendo (literalmente) derivadas de potenciais? Considerando que estas leis de conservação e a quadridensidade de força contêm termos quadráticos nos campos elétrico e magnético, é razoável esperar uma contração envolvendo dois exemplares do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ dado em (3.11)–(3.12). Após um pouco de inspeção verifica-se que a quantidade $F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu$ contém metade das expressões aparecendo nas leis de conservação apresentadas no Cap. 6. Por exemplo, temos (sem a constante elétrica)

$$F^{0\alpha}F_\alpha{}^0 = E^2. \tag{4.7}$$

A outra metade está contida na contração ${}^*F^{\mu\alpha}\,{}^*F_\alpha{}^\nu$ entre exemplares do campo eletromagnético dual,

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{4.8}$$

onde ϵ é o tensor completamente antissimétrico. Como exemplo,

$${}^*F^{0\alpha}\,{}^*F_\alpha{}^0 = c^2B^2. \tag{4.9}$$

Desta forma, o tensor simétrico

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi C_e}\frac{1}{2}\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} + {}^*F^{\mu\alpha}{}^*F_{\alpha}{}^{\nu}\right), \tag{4.10}$$

denominado de tensor dos esforços (eletromagnéticos) de Maxwell, é um forte candidato a um potencial generalizado. Simbolicamente, temos (verifique)

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{em} & S_1/c & S_2/c & S_3/c \\ c\varrho_{em,1} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ c\varrho_{em,2} & T^{12} & T^{22} & T^{23} \\ c\varrho_{em,3} & T^{13} & T^{22} & T^{33} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

e

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{em} & -S_1/c & -S_2/c & -S_3/c \\ -c\varrho_{em,1} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ -c\varrho_{em,2} & T^{12} & T^{22} & T^{23} \\ -c\varrho_{em,3} & T^{13} & T^{22} & T^{33} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

onde ε_{em} é a densidade de energia eletromagnética,

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{4\pi C_e}\frac{1}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right), \tag{4.13}$$

$\vec{\varrho}_{em}$ é a densidade de momentum linear eletromagnético,

$$c\vec{\varrho}_{em} = \vec{S}/c = \frac{1}{4\pi C_e}\vec{E}\times c\vec{B}, \tag{4.14}$$

$\vec{S}$ é o vetor de Poynting e T^{ij} é o tensor dos esforços de Maxwell, tridimensional, já introduzido em (6.30).

A quadridivergência do tensor dos esforços de Maxwell é proporcional à quadridensidade de força (4.6),

$$f^{\mu} = -\partial_{\alpha}T^{\alpha\mu}. \tag{4.15}$$

Ou seja, o tensor dos esforços de Maxwell é uma espécie de densidade de potencial generalizado para a quadridensidade de força. É a generalização da situação mostrada em (6.31). Assim, temos (verifique)

$$\partial_{\mu}T^{0\mu} = \partial_0T^{00} + \partial_iT^{0i} = \partial_0\varepsilon_{em} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{S}/c) = -\vec{E}\cdot(\vec{J}/c) = -f^0, \tag{4.16}$$

a qual é a densidade de potência (energia por tempo) dada em (6.18) dividida pela velocidade da luz, portanto, uma densidade de força. As demais componentes da densidade de força são dadas por (verifique)

$$\partial_\mu T^{i\mu} = \partial_0 T^{i0} + \partial_j T^{ij} = \partial_0(c\varrho_{em,i}) + \partial_j T^{ij} = -f^i. \tag{4.17}$$

Introduzindo a densidade de momentum linear mecânico $f^i = \partial_t \varrho_{m,i}$, a densidade de força acima torna-se na segunda lei de Newton (6.31). Note que a lei de conservação da carga elétrica, dada em (3.19), está fora da condição (4.15).

Verificar. As leis de conservação para a densidade de momentum angular, apresentadas na Sec. 6.4, podem ser reescritas numa forma covariante (verifique) em termos do tensor dos esforços eletromagnéticos (4.11):

$$\partial_\alpha(x^i \bar{T}^{j\alpha} - x^j \bar{T}^{i\alpha}) = 0. \tag{4.18}$$

Como sempre, os índices gregos varrem todo o espaço-tempo, $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, e os índices latinos estão restritos apenas ao espaço, $i, j \in \{1,2,3\}$. Vale lembrar que $\bar{T}$ é uma quantidade total, incluindo as partes eletromagnética T e mecânica $\mathcal{T}$.

As leis de conservação (4.18) sugerem um tensor densidade eletromagnética de momentum angular,

$$M^{\mu\nu\alpha} = x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}. \tag{4.19}$$

Note que a condição (4.18), divergência nula da densidade total de momentum angular, é uma consequência da condição (4.15) e da simetria do tensor dos esforços (verifique),

$$\partial_\alpha \bar{M}^{\mu\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha \bar{T}^{\nu\alpha} + x^\mu \partial_\alpha \bar{T}^{\nu\alpha} - \delta^\nu_\alpha \bar{T}^{\mu\alpha} - x^\nu \partial_\alpha \bar{T}^{\mu\alpha} = \bar{T}^{\nu\mu} - \bar{T}^{\mu\nu} = 0. \tag{4.20}$$

Exercício 8. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta "verifique".*

Appendices

Apêndice A

Tensores

A.1 Introito

Comentar as referências básicas.[1–4]

A.2 Espaço tangente

Falando de uma maneira coloquial, uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ de dimensão n é um espaço que pode ser coberto com cópias de espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ de dimensão n. Uma variedade diferenciável é uma colcha de retalhos, onde cada retalho é um espaço euclidiano diminuto. Um ponto p num destes "retalhos" euclidianos tem coordenadas x^i (coordenadas locais). O adjetivo "diferenciável" em variedade diferenciável é herdado destes "retalhos" euclidianos. Esses retalhos não precisam ser necessariamente euclidianos. Eles podem ser riemannianos (euclidianos) ou pseudo-riemannianos (como o espaço de Minkowski), ou algum outro tipo de espaço. O conjunto de todos os mapas $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, diferenciáveis, é o espaço das funções diferenciáveis $\mathcal{F}$.

Uma variedade contém em seus "retalhos", localizados num ponto p qualquer, uma estrutura de espaço vetorial, de dimensão n, denominada de espaço tangente $\mathtt{T}_p(\mathcal{M})$. Os vetores $\mathbf{v} \in \mathtt{T}_p(\mathcal{M})$ são denominados de vetores tangentes. Um vetor tangente $\mathbf{v}$ é um segmento orientado de reta, dado pela derivada direcional,

$$\mathbf{v}_p = \frac{d}{dt} C(p + t\mathbf{v}) \bigg|_p , \tag{A.1}$$

onde C é uma curva na variedade $\mathcal{M}$, passando pelo ponto p (veja a Fig. A.1). Naturalmente, o espaço tangente $\mathtt{T}_p(\mathcal{M})$ possui uma base canônica,

$$\mathbf{v}_p = \sum_i v^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{e}_i, \tag{A.2}$$

onde estamos usando a convenção de soma implícita no mesmo índice em posições diferentes numa mesma expressão. Note a posição dos índices que distinguem os diferentes vetores tangentes da base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, posição covariante. Compare estes índices covariantes com os índices que distinguem as diferentes componentes v^i de um vetor tangente descrito nesta base. Os índices nas componentes v^i estão na posição contravariante.

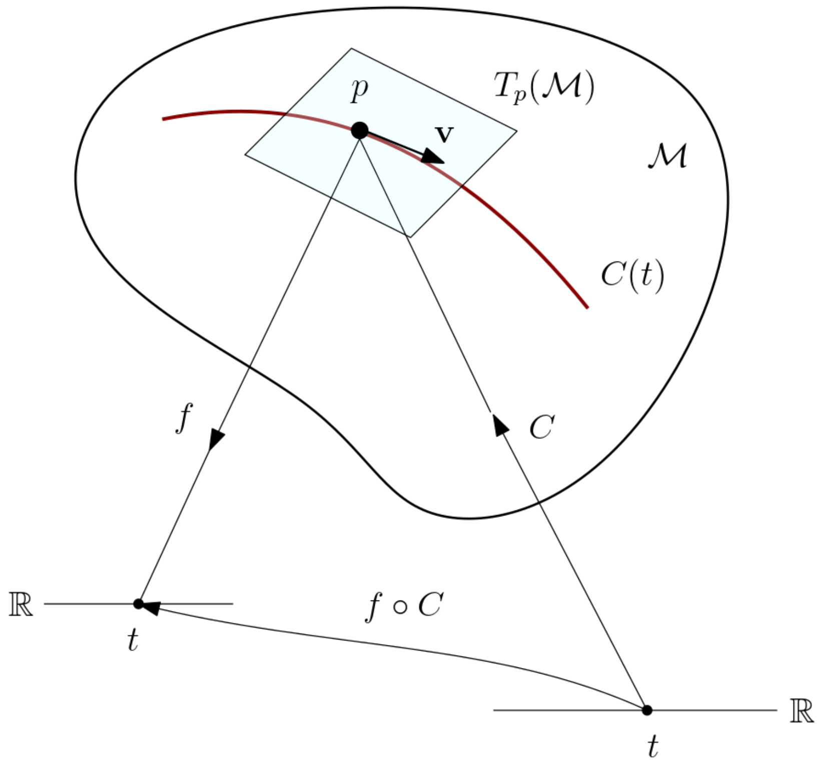

Figura A.1: Variedade diferenciável $\mathcal{M}$, espaço tangente $\mathtt{T}_p$ em p, curva C e função f.

Se tem um espaço vetorial, então existe também o espaço dual $\mathtt{T}_p^*(\mathcal{M})$. Os vetores $\boldsymbol{\omega}$ do espaço tangente dual são denominados de covetores tangentes, os quais formam o mapa linear (função real f na Fig. A.1) $\boldsymbol{\omega}_p : \mathtt{T}_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$. Então, por definição,

$$\boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{v}) \equiv \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \boldsymbol{\omega} \rangle \in \mathbb{R} \tag{A.3}$$

é um número real. A base canônica $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ do espaço dual é definida pela condição

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}^i \rangle = \delta^i_j. \tag{A.4}$$

Assim, um covetor tangente $\boldsymbol{\omega}$ pode ser escrito em termos de coordenadas,

$$\boldsymbol{\omega}_p = \omega_i \mathbf{e}^i. \tag{A.5}$$

Note a posição covariante dos índices das componentes de um covetor tangente e a posição contravariante dos índices das componentes de um vetor tangente. Esta mesma dualidade ocorre com os índices dos vetores de base nos espaços tangente e seu dual.

A.3 Derivada exterior

O conceito de covetores permite uma interpretação geométrica (moderna) para a diferencial clássica $\mathbf{d}x^i$. A razão por grafar de forma diferente a diferencial $\mathbf{d}x^i$, usando o negrito $\mathbf{d}$ é por que $\mathbf{d}f$ é um covetor especial denominado de derivada exterior. Para ver o quão especial, considere uma curva $C(t)$ na variedade $\mathcal{M}$ passando pelo ponto p. Esta curva é uma aplicação $C : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, de pontos da reta real $\mathbb{R}$ em pontos da variedade $\mathcal{M}$, conforme ilustrado na Figura A.1. Suponha que o ponto p corresponda ao parâmetro $t = 0$. Suponha também que esta curva $C(t)$ seja parametrizada pelas coordenadas locais $x^i(t)$. Então, da definição da derivada direcional (A.1), as coordenadas v^i do vetor tangente $\mathbf{v}_p$ em p são

$$v^i = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0}. \tag{A.6}$$

Para vermos o papel (definição) do covetor derivada exterior $\mathbf{d}$, basta tomar a derivada da função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ no ponto p, em relação ao parâmetro t,

$$\left.\frac{df(C(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \in \mathbb{R}, \tag{A.7}$$

onde a soma implícita foi usada na última igualdade. Podemos ver este resultado como um mapa do vetor tangente $\mathbf{v}_p$, criado pela curva $C(t)$ em p, em um número real. Mas isto é justamente a definição (A.3) de um covetor. Este covetor $\mathbf{d}f$ (em p) é denominado de derivada exterior $\mathbf{d}$ da função f (soma implícita),

$$\mathbf{d}f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{d}f | \mathbf{v} \rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{A.8}$$

Isto nos mostra que as coordenadas da derivada exterior são as derivadas parciais em relação às coordenadas locais do ponto p (soma implícita),

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{e}^i \partial_i. \tag{A.9}$$

Note a notação ∂_i introduzida na última igualdade, bem como a posição dos índices. Mais importante: a derivada exterior (A.9) lembra o conhecido operador gradiente. Para manter na mente: a derivada exterior é a versão moderna do operador gradiente. Naturalmente teremos uma regra própria, nova, para a multiplicação de derivadas exteriores, como veremos em breve.

Resta vermos a identificação $\mathbf{e}^i = \mathbf{d}x^i$. Para tal considere todas as curvas $C_i(t)$ passando pelo ponto p com todas as coordenadas nulas exceto uma delas, $x^i(t)$, de cada vez. As coordenadas $x^i(t)$ são funções na variedade $\mathcal{M}$. Essas são as curvas (funções) coordenadas e podem ser consideradas iguais a t no ponto p. Seus vetores tangentes orientam os eixos do sistema de coordenadas em p, formando uma base no espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$,

$$(\mathbf{e}_i)_j = \left.\frac{dC_i(t)}{dt}\right|_{t=0} \delta_{ij} = \left.\frac{dx^i(t)}{dt}\right|_{t=0} \delta_{ij} = \delta_{ij}. \tag{A.10}$$

Não tem soma implícita aqui. Similarmente, a ação da derivada exterior em uma dessas curvas coordenadas é um vetor de base do espaço dual $\mathtt{T}^*_p(\mathcal{M})$,

$$\mathbf{d}x^i = \mathbf{e}^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \mathbf{e}^j \delta_{ij} = \mathbf{e}^i. \tag{A.11}$$

Este processo também sugere que a base $\mathbf{e}_i$ no espaço tangente, introduzida simbolicamente em (A.2), seja a derivada parcial ∂_i,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i. \tag{A.12}$$

Assim, observamos que a ação da derivada exterior $\mathbf{d}f(\mathbf{v})$ dada em (A.8) é idêntica à ação do vetor tangente $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ na função f (verifique),

$$\mathbf{d}f(\mathbf{v}) = v^i \partial_i f = \mathbf{v}(f). \tag{A.13}$$

Desta forma, temos

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{d}x^i(\partial_j) = \partial_j(x^i) = \delta^i_j. \tag{A.14}$$

A.4 Tensor

Definimos covetores como um mapa linear de vetores tangentes no conjunto dos números reais. Essa ideia pode ser generalizada. Um tensor T do tipo (k, l) é um mapa multilinear de k vetores tangentes e l vetores cotangentes (duais), num determinado ponto p, no conjunto dos números reais:

$$T : \mathtt{T}_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathtt{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathtt{T}^*_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathtt{T}^*_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}. \tag{A.15}$$

Em coordenadas (somas implícitas em índices repetidos em posições contra e covariantes),

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_k} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\nu_l}, \tag{A.16}$$

onde $\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}^\nu$ representa um produto ordenado, denominado de produto tensorial. O tensor T do tipo (k, l) tem posto $k + l$. Em geral estas componentes de tensores são funções da posição, ou seja, são campos tensoriais. Usando uma notação simplificada, onde cada índice é na verdade um conjunto de índices, o tensor (A.16) pode ser reescrito na forma

$$T = T^\mu{}_\nu \, \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}^\nu. \tag{A.17}$$

A forma operacional é

$$T(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}_\beta) = T^\mu{}_\nu \, \mathbf{e}_\mu(\mathbf{e}^\alpha)\mathbf{e}^\nu(\mathbf{e}_\beta) = T^\mu{}_\nu \delta^\alpha_\mu \delta^\nu_\beta = T^\alpha{}_\beta. \tag{A.18}$$

De acordo com a definição (A.15), os covetores definidos anteriormente são tensores do tipo $(1, 0)$, de posto um. Os próprios vetores tangentes $\mathbf{v}$ são tensores do tipo $(0, 1)$, pois sempre teremos um covetor $\boldsymbol{\omega}$ para definir o mapa $\mathbf{v}_p : \mathtt{T}^*_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ dado por $\boldsymbol{\omega}_p \to \langle \boldsymbol{\omega}_p | \mathbf{v}_p \rangle$.

Uma das vantagens de se lidar com tensores é a previsibilidade em saber como suas componentes mudam mediante uma transformação linear de coordenadas, as quais são muito úteis. Por exemplo, considere o tensor com componentes $T_\mu(x^i)$. Ao passarmos para um outro sistema de coordenadas, $y^j(x^i)$, as componentes $T_\nu(y^j)$ serão (soma implícita)

$$T_\nu(y^j) = T_\mu(x^i) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \tag{A.19}$$

Esta regra vale para qualquer índice nas componentes de qualquer tensor. Caso esteja usando uma quantidade física que não seja um tensor, perderá este poder de previsibilidade mediante mudanças de coordenadas. Por isso toda teoria física deve ser escrita numa forma covariante, isto é, em termos de quantidades tensoriais.

A.5 Métrica

O tensor métrico g é um tensor do tipo $(0, 2)$,

$$g = g_{ij} \, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j. \tag{A.20}$$

de forma que

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \tag{A.21}$$

Este tensor métrico satisfaz as propriedades seguintes:

Simetria: $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Linearidade: $g(\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + ag(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Não-degenerescência: $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$.

O tensor métrico informa a orientação relativa dos vetores tangentes formando uma base num determinado espaço tangente. Em geral suas componentes são campos escalares.

A existência de uma métrica permite a existência de um produto interno no espaço tangente $\mathtt{T}$,

$$\big\langle \cdot \big| \cdot \big\rangle : \mathtt{T} \times \mathtt{T} \to \mathbb{R}. \tag{A.22}$$

Dado dois vetores tangentes $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o produto interno entre eles é

$$\big\langle \mathbf{u} \big| \mathbf{v} \big\rangle = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij}\, \mathbf{e}^i(\mathbf{u})\mathbf{e}^j(\mathbf{v}) = g_{ij} u^i v^j. \tag{A.23}$$

Naturalmente, haverá também um produto interno no espaço tangente dual $\mathtt{T}^*$, via o inverso do tensor métrico:

$$\big\langle \mathbf{e}^i \big| \mathbf{e}^j \big\rangle = g^{ij},\ g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \tag{A.24}$$

Esse produto interno herda as mesma propriedades de simetria, linearidade e não-degenerescência da métrica.

A matriz representando a métrica possui uma propriedade global, independente de qualquer parametrização local: seu determinante não muda de sinal, será sempre positivo ou negativo. Como o determinante é (também) o produto dos autovalores de uma matriz, isto significa que não haverá autovalores nulos. A quantidade (p, n) de autovalores positivos (p) e negativos (n) é denominada de assinatura da métrica. Alguns preferem a assinatura da métrica na forma $p - n$.

Um espaço com uma métrica contendo autovalores com os mesmos sinais positivos é denominada de métrica euclidiana e o espaço de espaço riemanniano. Quando os autovalores da métrica possuem sinais diferentes, o espaço é denominado de espaço pseudo-riemanniano.

A métrica simétrica de Minkowski, de assinatura $(1, 3)$ ou -2,

$$(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.25}$$

é de um espaço pseudo-riemanniano. Essa será a métrica padrão na reformulação do eletromagnetismo na forma covariante. Em geral, índices gregos assumirão os valores 0 (tempo) e $1, 2, 3$ (espaço) no espaço-tempo pseudo-riemanniano de Minkowski (ou simplesmente espaço de Minkowski).

Outra grande utilidade da métrica é permitir a mudança de índices covariantes (abaixo) para contravariantes (acima) e vice-versa,

$$T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu, \; T^\mu = g^{\mu\nu} T_\nu. \tag{A.26}$$

Cada índice requer uma contração (soma implícita) com as componentes do tensor métrico. Esta propriedade é independente da escolha de coordenadas.

Vale ressaltar que alguns preferem definir um tensor geral com a ordem inversa daquela em (A.15), ou seja, um mapa dos vetores cotangentes seguido de um mapa dos vetores tangentes. As vezes os tensores definidos como mapas de vetores tangentes são denominados de cotensores.

Referências Bibliográficas

[1] F. W. Hehl and Yuri N. Obukhov. *Foundations of Classical Electrodynamics.* Birkhäuser, 2003.

[2] R. W. R. Darling. *Differential Forms and Connections.* Cambridge, 1999.

[3] B. Felsager. *Geometry, Particles, and Fields.* Springer, 1998.

[4] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* Freeman, 1973.