

Equações de Maxwell. Parte I: forma não-covariante.

Esmerindo Bernardes ¹

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

8 de junho de 2022

¹email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introito	1
1.2	Leis básicas	3
1.3	Fatos notáveis	3
1.4	Dimensões e unidades	4
1.5	Constantes universais	5
1.6	Efeito AAS	5
2	Primeira equação de Maxwell	6
2.1	Introdução	6
2.2	O campo elétrico	6
2.3	O potencial escalar	9
2.4	A energia potencial	13
2.5	Gauss	13
2.5.1	Ângulo sólido	14
2.5.2	O lema de Gauss	16
2.5.3	O teorema de Gauss	18
2.6	Casos de estudos	19
2.6.1	<i>Toy model</i>	19
2.6.2	Cargas pontuais	21
2.6.2.1	Intensidades iguais	21
2.6.2.2	Intensidades distintas	23
2.6.3	Esfera	24
2.6.4	Cilindro	30
2.6.5	Plano	33
3	Segunda equação de Maxwell	36
3.1	Introdução	36
3.2	O campo magnético	36

3.2.1	Sem carga magnética	36
3.2.2	Com carga magnética	37
3.3	O potencial vetor	38
3.3.1	Sem carga magnética	38
3.3.2	Com carga magnética	39
3.4	Densidade de corrente	40
3.5	Casos de estudos	42
3.5.1	Corrente em um fio	42
4	Indução	49
4.1	Introdução	49
4.2	Ampère	50
4.2.1	A lei de Ampère	50
4.2.2	Terceira equação de Maxwell	51
4.3	Faraday	51
4.3.1	Introdução	51
4.3.2	Experimentos	52
4.3.3	Quarta equação de Maxwell	52
4.4	Casos de estudos	54
4.4.1	Fio	54
4.4.2	Placas	56
4.4.2.1	Uma placa estática	56
4.4.2.2	Duas placas estáticas	58
4.4.2.3	Duas placas em movimento	58
5	Potenciais	62
5.1	Maxwell	62
5.2	Ondas	63
5.3	Potenciais	64
5.4	Calibre	65
5.5	Casos de estudos	67
5.5.1	Solenóide	67
6	Energia-momentum	71
6.1	Densidade de força	71
6.2	Densidade de energia	73
6.3	Densidade de momentum linear	75
6.4	Densidade de momentum angular	77

7	Matéria	78
7.1	Introito	78
7.2	Polarização	79
7.3	Maxwell	80
7.4	Nomes	81
	Appendices	84
A	Análise dimensional	84
A.1	Introdução	84
A.2	Exemplos	84
A.2.1	Cinemática	84
A.2.2	Dinâmica	85
A.2.3	Eletromagnetismo	85
B	Dispositivos eletrônicos	87
B.1	Resistores	87
B.2	Capacitores	89
B.3	Indutor	92
B.4	Circuito RC	93
B.5	Circuito RLC	94
C	Delta de Dirac	96
D	Campos e Operadores	99
D.1	Campos	99
D.2	Circulação	100
D.3	Fluxo	101
D.4	Operadores	101
D.4.1	Gradiente	101
D.4.2	Divergente	102
D.4.3	Rotacional	104
D.5	Teoremas	105

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introito

Apesar dos fenômenos elétricos e magnéticos fazerem parte do conhecimento humano desde tempos imemoráveis, somente no Século 19 eles foram unificados. Os fenômenos elétricos e magnéticos fazem parte do Eletromagnetismo, uma teoria regida por dois campos vetoriais obedecendo cinco leis. Campos são funções matemáticas da posição e do tempo. Um campo vetorial é uma regra para pegarmos vetores numa dada posição espacial num dado instante de tempo.

Para fixar uma notação, os fenômenos elétricos são descritos pelo campo elétrico \vec{E} e os fenômenos magnéticos são descritos pelo campo magnético \vec{B} . Esses dois campos vetoriais são criados por suas fontes, distribuições de cargas elétricas e, no caso do campo magnético, correntes elétricas (cargas em movimento). Curiosamente não temos cargas magnéticas (ou ainda não foram detectadas ou criadas artificialmente). Igualmente curioso, sabemos da existência da carga elétrica e que ela é somente encontrada em múltiplos inteiros da carga e do elétron e apresenta dois “sabores”: positiva e negativa. Por isso se costuma dizer que carga elétrica é quantizada, ou seja, não existe em qualquer quantidade e sabor. Massa também é um tipo de carga, a carga inercial, responsável pela dificuldade de mudarmos a trajetória de um objeto. Newton foi o primeiro a propor também a existência de uma carga gravitacional, responsável pela atração gravitacional. Também foi o primeiro a verificar (experimentalmente) a igualdade entre carga gravitacional e carga inercial. Desde então estas cargas, a gravitacional e a inercial, passaram a ser chamadas de apenas massa. Massa existe em qualquer quantidade (será?) e em apenas um sabor, positiva.

Em geral, um campo vetorial produz uma força num corpo teste. No Eletromagnetismo, esse corpo teste é uma (pequena) carga elétrica q . Na gravitação newtoniana, esse corpo teste é uma pequena massa m . A força elétrica produzida pelo campo elétrico \vec{E} numa carga teste q é simplesmente o produto do campo elétrico pela carga teste, $q\vec{E}$. É a mesma estrutura

da força gravitacional. O campo magnético produz uma força que depende da velocidade da carga teste, $q\vec{v} \times \vec{B}$, a qual não tem paralelo na gravitação newtoniana. Desta forma,

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.1)$$

denominada de força de Maxwell-Lorentz, ou simplesmente de força de Lorentz, caracteriza mecanicamente os campos vetoriais elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} .

Ao contrário da gravitação Newtoniana, que é descrita por apenas um campo vetorial, o Eletromagnetismo requer dois campos vetoriais. Mais ainda: estes dois campos vetoriais não são independentes. As quatro equações de Maxwell estabelecem vínculos entres as taxas de variação (no espaço e no tempo) das componentes dos campos vetoriais elétrico e magnético. Esses vínculos são equações diferenciais parciais (EDP) de primeira ordem. Como consequência, apenas duas entre as seis componentes destes campos vetoriais \vec{E} e \vec{B} serão independentes.

Cada equação de Maxwell representa uma lei do Eletromagnetismo. Cada uma das leis é uma história à parte, unificadas em definitivo por Maxwell em 1861. No Séc. 17, outra unificação importante foi revelada por Newton: força e aceleração estão intimamente relacionadas, embora sejam quantidades muito diferentes. Força é a representação matemática de uma interação entre dois corpos enquanto aceleração é uma quantidade cinemática, a taxa de variação do vetor velocidade. Essa foi a primeira grande unificação de dois fenômenos naturais aparentemente distintos. Essas unificações de fenômenos naturais servem para indicar o grau de compreensão acerca de algumas propriedades básicas da nossa natureza. A unificação dos efeitos elétricos e magnéticos foi um feito extraordinário. Tão extraordinário ao ponto de revelar que luz é um fenômeno eletromagnético (no caso, uma onda), com uma velocidade finita, a qual é um limite para velocidades de objetos. Nada pode ultrapassar a velocidade da luz. Esse limite foi estabelecido pela Relatividade Especial de Einstein em 1905. Certamente não podemos esquecer os avanços tecnológicos baseados em fenômenos eletromagnéticos.

Outra característica surpreendente das equações de Maxwell de 1861 é a íntima relação com a Relatividade Especial, estabelecida por Einstein em 1905, 30 anos depois. Logo após sua descoberta, a Relatividade Especial tornou-se num paradigma a ser respeitado por todas as teorias físicas. Notavelmente, a teoria eletromagnética de Maxwell, elaborada 30 anos antes, é totalmente compatível com a Relatividade Especial. É nossa intenção expor aqui as equações de Maxwell, suas interpretações e relação com a Relatividade Especial, destacando as bases matemáticas, bem como algumas de suas aplicações.

1.2 Leis básicas

Equações de Maxwell. Maxwell (1861) foi o responsável pela síntese das leis que regem os fenômenos elétricos e magnéticos e pela unificação deles. A constante c nestas equações representa a velocidade da luz. As demais quantidades serão definidas em seguida.

1. Existência de carga elétrica (Coulomb, 1785):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho, \quad C_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.2)$$

2. Ausência de carga magnética (Maxwell, 1861):

$$\vec{\nabla} \cdot c\vec{B} = 0. \quad (1.3)$$

3. Indução I (Ampère, 1825; Maxwell, 1861):

$$\vec{\nabla} \times c\vec{B} = +\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} C_e \vec{J}. \quad (1.4)$$

4. Indução II (Faraday, 1831):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c\vec{B}. \quad (1.5)$$

Quantidades. Maxwell foi o primeiro a mostrar que a velocidade da luz (no vácuo) é dada pelas constantes fundamentais presentes em suas equações: $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$, onde ϵ_0 é a constante elétrica (ou permissividade do vácuo) e μ_0 é a constante magnética (ou permeabilidade do vácuo). Os valores destas constantes estão dados logo abaixo. Na força de Maxwell-Lorentz, q é uma carga teste. Nas equações de Maxwell, ρ é a densidade de carga (carga por unidade de volume) da fonte e \vec{J} é a densidade de corrente (corrente por unidade de área), a qual será definida mais adiante. A unidade de carga elétrica no sistema internacional (SI) de medidas foi denominada de Coulomb (C). Carga elétrica em movimento é corrente elétrica, carga por unidade de tempo, cuja unidade (SI) é Ampere (A=C/s).

1.3 Fatos notáveis

O Eletromagnetismo permeia tanto o mundo clássico, dominado pelas leis da Mecânica newtoniana, para citar apenas uma teoria típica desse mundo, quanto no mundo quântico, dominado pelas leis da Física Quântica, que não tem precedentes no mundo clássico. Talvez por isso, haja tantos fatos extra-ordinários no Eletromagnetismo. Abaixo, uma lista singela de alguns deles:

1. Existe carga elétrica, mas não existe carga magnética.
2. A carga elétrica é quantizada, isto é, existe apenas como múltiplo inteiro da carga do elétron.
3. Carga elétrica é conservada e existem dois tipos (positiva e negativa).
4. A velocidade da luz é uma constante universal.

1.4 Dimensões e unidades

Dimensões. Como conhecemos as dimensões de força, uma concepção newtoniana, então podemos usar a força de Maxwell-Lorentz para determinar as dimensões dos campos elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{B}). Veja o Apêndice A para mais detalhes. Como as dimensões de força são as mesmas de massa (M) vezes velocidade ao quadrado e que as dimensões de velocidade são as mesmas de comprimento (L) por tempo (T), então as dimensões de força são

$$[F] = [ma] = \frac{ML}{T^2}. \quad (1.6)$$

Portanto, da força de Maxwell-Lorentz, temos

$$[F] = [qE] = [qvB] \implies [E] = \frac{ML^2}{QT^2}, \quad [B] = \frac{M}{QT}, \quad (1.7)$$

onde usamos Q para a dimensão de carga elétrica. Destas dimensões destes dois campos, podemos perceber que \vec{E} e $c\vec{B}$ possuem as mesmas dimensões.

Unidades. Usaremos o Sistema Internacional (SI) de unidades.¹

1. Carga elétrica: Coulomb (C).
2. Corrente elétrica: Ampere (A=C/s).
3. Força: Newton (N=kg m²/s²).
4. Campo magnético: Tesla (T=kg/C s).

¹Atualmente se usa o Ampere no lugar do Coulomb, mas continuaremos com Coulomb. Veja [aqui](#) as novas definições.

1.5 Constantes universais

As constantes abaixo são fundamentais ao Eletromagnetismo e são medidas periodicamente (veja [CODATA](#) para conferir os valores mais recentes). Valores no Sistema Internacional (SI) de unidades referentes ao vácuo.

1. Carga elétrica: $e = 1,602\,176\,634\,10^{-19}$ C.
2. Permissividade: $\epsilon_0 = 8,854\,187\,817\,10^{-12}$ C²/Nm².
3. Permeabilidade: $\mu_0 = 1,256\,637\,062\,10^{-6}$ Ns²/C².
4. Velocidade da luz: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458,0$ m/s.

1.6 Efeito AAS

A Figura 1.1 mostra a variação de intensidade do campo magnético perto da superfície terrestre. A ordem de grandeza é um bilionésimo (nano) de Tesla (nT). Note que estamos numa região onde os valores da intensidade deste campo está bem abaixo do valor médio. Trata-se da “Anomalia do Atlântico Sul” (AAS), muito ruim para satélites e naves espaciais (veja [aqui](#) para mais informações).

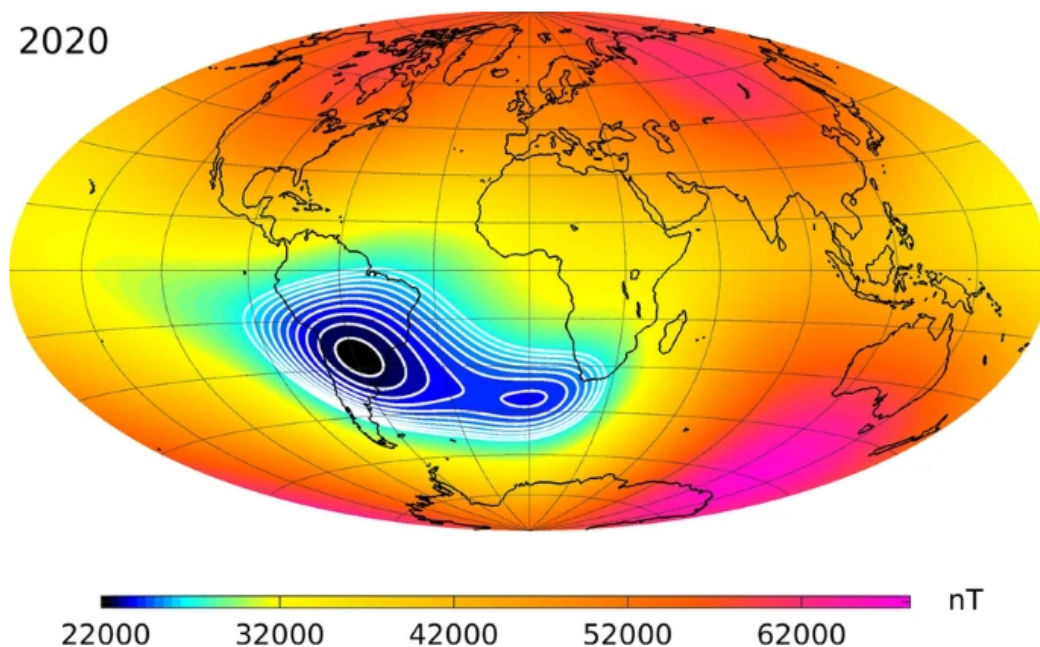


Figura 1.1: Intensidade do campo magnético perto da superfície terrestre. A região de intensidades baixas é denominada Anomalia do Atlântico Sul (AAS)

Capítulo 2

Primeira equação de Maxwell

2.1 Introdução

A primeira equação de Maxwell diz respeito à existência de carga elétrica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho, \quad C_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

A divergência $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ do campo elétrico \vec{E} é proporcional à densidade ρ de carga elétrica em cada posição, num determinado tempo. Aqui, tanto o campo vetorial \vec{E} , como o campo escalar ρ , podem ser considerados dependentes de quatro variáveis: três delas identificando uma posição espacial tridimensional e a quarta identificando um momento no tempo. Veremos mais adiante que a Relatividade Especial unifica posição e tempo, formando o espaçotempo quadridimensional.

A seguir, partindo da lei de Coulomb estabelecendo a força entre cargas elétricas, introduzindo a noção de campo elétrico, associado à fonte, bem como introduzindo os conceitos de potencial elétrico e energia elétrica, chegaremos à primeira equação de Maxwell na forma (2.1). Para tal, precisaremos dos conceitos de circuitação (ou circulação) e de fluxo de um campo vetorial. O lema de Gauss a respeito do fluxo de campos vetoriais com uma simetria radial e inversamente proporcionais ao inverso do quadrado da distância será a ponte entre a lei de Coulomb e a primeira equação de Maxwell.

2.2 O campo elétrico

O campo elétrico \vec{E} é responsável pela força elétrica entre cargas elétricas, descoberta por Coulomb em 1785. Postula-se hoje a existência de cargas elétricas, de dois tipos (positiva e negativa), com valores (absolutos) sempre como múltiplos inteiros da carga eletrônica

(em módulo), e conservadas. Estas cargas elétricas estão presentes em elétrons e prótons, constituintes de átomos (juntamente com nêutrons, que não possuem cargas elétricas). Por razões históricas, o próton tem carga positiva e o elétron tem carga negativa. Ambos, próton e elétron, têm a mesma intensidade da carga ($e = 1,602 \times 10^{-19}$ C).

O modelo básico é o campo elétrico \vec{E} criado por uma carga fonte “pontual” Q ,

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{r}, \quad E_r(r) = C_e \frac{Q}{r^2}, \quad (2.2)$$

onde C_e é a constante elétrica

$$C_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \text{ (SI)}. \quad (2.3)$$

Valores medidos no vácuo. Note que o campo vetorial em (2.2) tem simetria esférica: ele é sempre radial e seu módulo é o mesmo sobre a casca esférica de raio r . Portanto o uso de coordenadas esféricas (r, θ, φ) . Com a carga fonte Q na origem de um sistema de coordenadas cartesiano ortonormal, a distância radial r é o módulo do vetor posição \vec{r} ,

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}, \quad r^2 = \|\vec{r}\|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.4)$$

O que faz um campo elétrico? Ele cria uma força (mensurável) numa carga teste q ,

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (2.5)$$

Esta é a força elétrica, a qual define a ação do campo elétrico. A força elétrica entre cargas elétricas Q e q , separadas por uma distância r , foi descoberta por Coulomb em 1785,

$$\vec{F} = C_e \frac{qQ}{r^2} \hat{r}. \quad (2.6)$$

Note a semelhança com a força gravitacional proposta por Newton (quase um século antes). A diferença básica é que somente existe um tipo de carga gravitacional, positiva, denominada de “massa”. A força elétrica de Coulomb é atrativa para cargas com sinais diferentes e repulsiva para cargas de mesmo sinal.

Conseqüentemente, da Eq. (2.5), as unidades de campo elétrico no sistema internacional (SI) são as mesmas unidades de força (Newton) por carga elétrica (Coulomb), rebatizadas de Volt por metro, $\text{N/C} = \text{V/m}$. O Volt, uma homenagem a Alessandro Volta (1799), inventor das modernas baterias elétricas, é a unidade de potencial elétrico no SI como veremos adiante.

Como exemplo, considere o campo elétrico criado por um próton, carga elétrica $Q = +e$. O campo elétrico a uma distância de $0,5 \text{ \AA}$ (um Angstrom \AA equivale a 10^{-10} m) tem a

intensidade de $5,759 \times 10^{11}$ V/m. Um elétron, de carga $q = -e$, colocado nesta distância sofre uma força atrativa de intensidade $9,226 \times 10^{-8}$ N. Este é o modelo básico (clássico) do átomo de hidrogênio.

Havendo várias cargas fontes pontuais, Q_i , $i \leq N$, localizadas pelo vetor posição \vec{r}_i , o campo elétrico resultante na posição \vec{r} (veja a Figura 2.1 para visualizar estes dois vetores posição) será a soma vetorial de cada campo elétrico individual,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = C_e \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}. \quad (2.7)$$

Esta superposição de campos individuais somente é possível porque a carga fonte pontual entra de forma linear na definição (2.2) do campo elétrico correspondente. O sinal no numerador é decidido impondo que a força $q\vec{E}$ numa carga teste q é atrativa para cargas de mesmo sinal e repulsiva para cargas de sinais opostos.

Exercício 1. *Considere um sistema neutro formado por uma carga positiva $Q_1 = 2e$ e outras duas negativas $Q_2 = -e$ e $Q_3 = -e$ colocadas (fixas) nos vértices de um triângulo equilátero de lado $a = 1 \text{ \AA}$. Calcule o vetor força resultante numa carga teste colocada no centro desse triângulo. Sugestão: use a soma vetorial em 2.7 com o vetor posição \vec{r} dado pelas coordenadas do centro do triângulo. Use o sistema de coordenadas que simplifique suas expressões.*

Até agora temos considerado um sistema discreto de cargas pontuais. Uma situação igualmente interessante surge quando uma determinada região é preenchida por cargas elétricas segundo alguma função densidade dada, $\rho = \rho(x, y, z)$. A densidade pode ser volumétrica, carga por volume (dQ/dV), superficial, carga por área (dQ/dA), ou linear, carga por comprimento (dQ/dl). Estamos assumindo que esta distribuição de cargas seja contínua, podendo variar suavemente na posição, mas fixa no tempo. A carga total Q num volume V é dada por uma integral múltipla sobre toda a região contendo cargas

$$Q = \int_V \rho dV \quad (2.8)$$

Em geral o elemento de volume também é uma função da posição. Em coordenadas cartesianas, ele é da forma $dV = dx dy dz$, constante. No entanto, em coordenadas esféricas com simetria radial ele é dependente da coordenada radial, $dV = 4\pi r^2 dr$. Observe que a integração (em r) desse volume infinitesimal nos dá o volume de uma esfera de raio r , $V = 4\pi r^3/3$.

O campo elétrico resultante $\vec{E}(\vec{r})$ na posição da carga teste q mostrada na Figura 2.1 é a superposição linear de todos os campos infinitesimais criados pelo elemento de carga

infinitesimal dQ , ocupando um volume dV na posição \vec{u} ,

$$\vec{E} = C_e \int_V dQ \frac{\vec{r} - \vec{u}}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^3} = C_e \int_V \rho(\vec{u}) dV(\vec{u}) \frac{\vec{r} - \vec{u}}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^3}. \quad (2.9)$$

A integração é feita apenas na região contendo cargas, cujos pontos são descritos pelo vetor posição \vec{u} . Após a integração, nas coordenadas do vetor \vec{u} , restará um campo vetorial dependente das coordenadas do vetor posição \vec{r} , onde uma carga teste q pode ser colocada. Por mais interessante que seja este exercício de integração múltipla, usaremos uma outra forma, bem mais simples (devida a Gauss), de calcular o campo elétrico de uma distribuição contínua de cargas. A restrição é que tais distribuições precisam apresentar formas altamente simétricas, como esferas e cilindros.

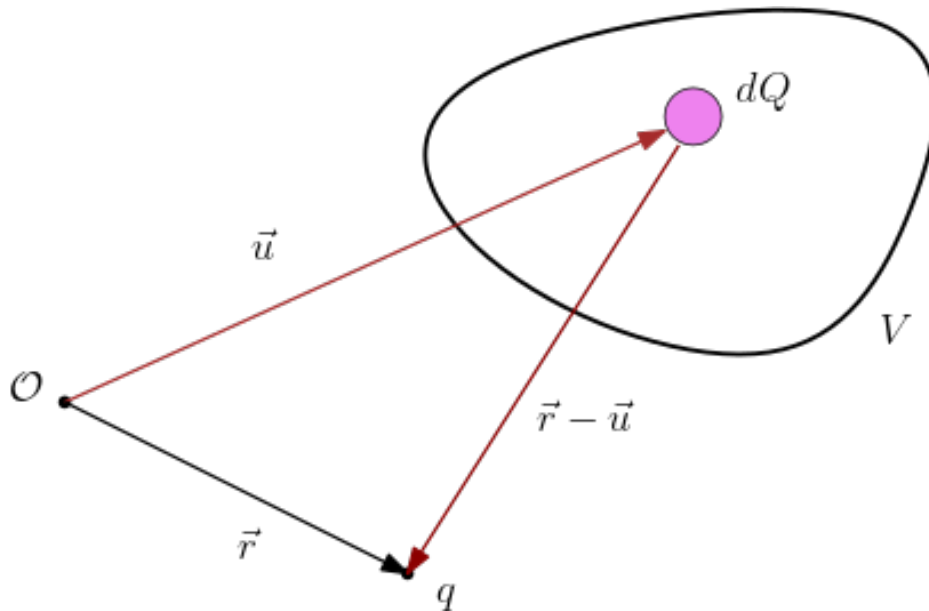


Figura 2.1: Sistema inercial de coordenadas \mathcal{O} . O vetor posição \vec{u} varre a região do volume V . O vetor posição \vec{r} especifica a posição da carga teste q .

2.3 O potencial escalar

Na mecânica newtoniana, o “custo por unidade de massa” para um objeto se movimentar numa trajetória determinada por um campo vetorial \vec{E} , que produz uma força numa massa teste, é denominado de trabalho específico w (trabalho por unidade de massa), definido por uma integral de caminho,

$$\Delta w = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.10)$$

Este é o trabalho (específico) para sair do ponto a e chegar ao ponto b numa trajetória representada (na forma paramétrica) pelo vetor posição \vec{r} do objeto em movimento sob a ação da força (resultante) produzida pelo campo vetorial \vec{E} . Trabalho (específico) é essencialmente a soma das projeções do campo vetorial \vec{E} sobre as direções tangentes $d\vec{r}$,

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}, \quad d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}. \quad (2.11)$$

Em princípio, a integral de caminho (2.10) depende da trajetória unindo os pontos a e b . No entanto, existem certos campos vetoriais especiais para as quais a integral de caminho (2.10) não depende da trajetória unindo os pontos a e b . Esta foi uma descoberta que permaneceu escondida por muitos séculos. Se a integral de caminho (2.10) não depende da trajetória, então o trabalho na ida, de a para b , por qualquer trajetória, dever ser menos o trabalho na volta, de b para a , por qualquer trajetória. Ou seja, o trabalho desses campos vetoriais especiais numa trajetória fechada é nulo,

$$\Delta W = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.12)$$

Quando o trabalho numa trajetória fechada é nulo, o campo vetorial é denominado de **campo vetorial conservativo**.

Como mostrado na Sec. D.2, um campo conservativo \vec{E} é derivado (teorema) de um campo escalar ϕ (verifique),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (2.13)$$

onde o sinal negativo foi introduzido por conveniência. O campo escalar ϕ é denominado de **potencial escalar** ou, simplesmente, **potencial elétrico** em Eletromagnetismo. Desta forma, como mostrado na Sec. D.2, introduzindo (2.13) na definição (2.10) de trabalho específico, temos (verifique)

$$\Delta w = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta\phi. \quad (2.14)$$

Como essa integral de caminho não depende da trajetória, o ponto inicial pode ser fixado (por alguma conveniência) e o ponto final b pode ser escolhido livremente como uma posição qualquer \vec{r} . Isto torna o potencial escalar ϕ num campo escalar $\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.15)$$

Assim, o potencial escalar estará definida a menos de uma constante arbitrária, a qual poderá ser escolhida por conveniência, por exemplo escolhendo o valor do potencial numa

determinada posição.

As dimensões de potencial elétrico são as mesmas de campo elétrico (força por carga) vezes comprimento,

$$[\phi] = [\vec{E} \cdot d\vec{r}] = \frac{ML^2}{QT^2}, \quad (\text{SI}): \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}. \quad (2.16)$$

Conseqüentemente, as unidades de potencial elétrico no Sistema Internacional (SI) de medidas são as mesmas de energia (Joule) por carga (Coulomb), rebatizada de Volt, $\mathbf{J/C=V}$, em homenagem a Alessandro Volta (1799), inventor das baterias modernas. O Volt tem um papel fundamental nas aplicações tecnológicas (eletrônica) do Eletromagnetismo.

Sobre a conveniência da introdução do sinal negativo em (2.13). Devido ao teorema trabalho-energia cinética, a variação de trabalho específico Δw pode ser calculada pela variação de energia cinética específica $\Delta\tau$, com $\tau = T/m = v^2/2$, isto é, $\Delta w = \Delta\tau$. Para um campo vetorial conservativo, de (2.14) temos $\Delta w = -\Delta\phi$. Portanto, a **soma** $\tau + \phi \equiv \varepsilon$, denominada de energia mecânica específica, é uma quantidade conservada,

$$\Delta\varepsilon = \Delta\tau + \Delta\phi = \Delta w - \Delta w = 0. \quad (2.17)$$

Multiplicando a energia mecânica específica pela massa do objeto teste se tem a energia mecânica dele. **Campos conservativos levam à conservação da energia mecânica.** O campo elétrico é conservativo, pois é derivado de um campo escalar. Conseqüentemente, a energia (elétrica) será conservada.

Conhecendo o campo elétrico \vec{E} produzido por uma carga pontual Q , dado pela lei de Coulomb em (2.2), o potencial elétrico correspondente pode ser calculado imediatamente em coordenadas esféricas ($d\vec{r} = dr \hat{r}$),

$$\phi(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -C_e Q \int \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot dr \hat{r} = C_e \frac{Q}{r} + cte. \quad (2.18)$$

A constante *cte* pode ser escolhida igual a zero para termos o valor do potencial elétrico nulo no infinito ($r \rightarrow \infty$). Assim, temos o potencial elétrico e o campo elétrico de uma carga pontual ($r > 0$),

$$\phi(r) = C_e \frac{Q}{r}, \quad \vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r) = -C_e \frac{Q}{r^2}, \quad (2.19)$$

onde o campo vetorial \vec{E} é criado pela variação do campo escalar ϕ , ou então

$$\vec{E}(r) = -C_e \frac{Q}{r^2}, \quad \phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = C_e \frac{Q}{r}, \quad (2.20)$$

onde o campo escalar ϕ é criado pela circulação (integral de caminho) do campo vetorial \vec{E} .

No átomo de hidrogênio, onde um elétron está a uma distância de $0,5 \text{ \AA}$ (um Angstrom \AA equivale a 10^{-10} m) do próton, o potencial elétrico na posição do elétron é $28,8 \text{ V}$ (verifique). Multiplicando o potencial elétrico pela carga do elétron, tem-se sua energia potencial.

Em geral, é mais econômico computacionalmente calcular primeiro o potencial de alguma distribuição de cargas (discreta ou contínua) e depois tomar o gradiente (com o sinal negativo) para obter o campo elétrico (um vetor). No entanto, para distribuições de cargas com uma geometria exibindo simetrias altas, poderemos calcular primeiro o campo elétrico com mais facilidade (via a lei de Gauss) e depois calcular o potencial elétrico por uma integração.

O potencial de um sistema de N cargas pontuais Q_i , localizadas na posição \vec{u}_i , é a soma dos potenciais (2.19) de cada carga pontual,

$$\phi(\vec{r}) = C_e \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{\|\vec{r} - \vec{u}_i\|} \quad (2.21)$$

A Figura 2.2 exibe os vetores posição envolvidos em um sistema de coordenadas cartesiano simbólico, onde apenas a origem \mathcal{O} é mostrada. Note que o denominador em (2.21) é a distância entre uma carga Q_i e o ponto de observação \vec{r} (onde a carga teste q é colocada).

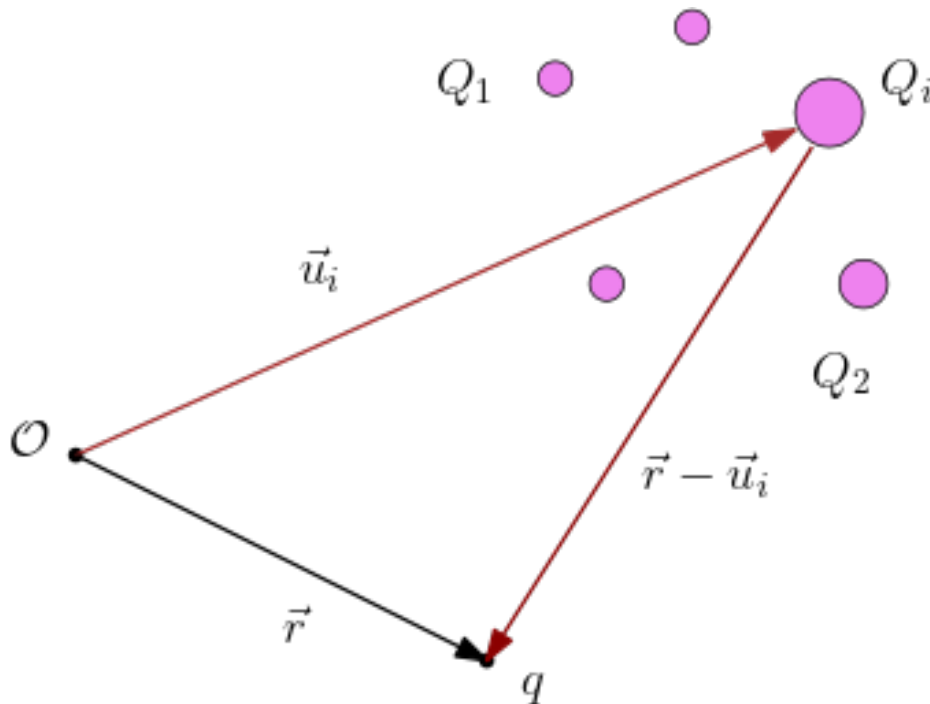


Figura 2.2: Sistema inercial de coordenadas \mathcal{O} . O vetor posição \vec{u}_i indica a posição das cargas pontuais Q_i . O vetor posição \vec{r} especifica a posição da carga teste q .

2.4 A energia potencial

Assim como a força elétrica \vec{F} produzida numa carga teste q é criada pelo campo elétrico \vec{E} , $\vec{F} = q\vec{E}$, a **energia potencial elétrica** U da carga teste é criada pelo potencial elétrico ϕ , $u = q\phi$. A Tabela 2.1 sintetiza estas relações. Os campos vetoriais na primeira coluna são derivados dos campos escalares na segunda coluna (note o sinal negativo na frente do gradiente). Por outro lado, podemos também afirmar que os campos escalares são integrados (circulação) dos campos vetoriais.

Campos vetoriais	Campos escalares
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$	$\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$
$\vec{F} = q\vec{E} = -\vec{\nabla}U$	$U = q\phi = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Tabela 2.1: Inter-relações entre os campos elétricos escalares e vetoriais.

Por razões históricas, o campo vetorial \vec{F} ficou conhecido como “força elétrica” e o campo vetorial \vec{E} por “campo elétrico”. O campo escalar U ficou conhecido por “energia potencial elétrica” e o campo escalar ϕ por “potencial elétrico”.

As dimensões de energia potencial são as mesmas de potencial elétrico vezes carga, ou de força vezes distância (energia),

$$[U] = [q\phi] = \frac{ML^2}{T^2}, \quad (\text{SI}): \text{Nm} = \text{J}. \quad (2.22)$$

O Joule (J) como unidade de energia é uma homenagem a James Joule pelos seus experimentos mostrando a equivalência entre energia térmica (calor) e energia mecânica em 1843 (outra unificação importante).

No átomo de hidrogênio, onde um elétron está a uma distância de $0,5 \text{ \AA}$ (um Angstrom \AA equivale a 10^{-10} m) do próton, o potencial elétrico na posição do elétron é $28,8 \text{ V}$ e sua energia potencial elétrica é $-4,6 \times 10^{-18} \text{ J}$. Como esse número é muito pequeno, define-se uma outra unidade de energia elétrica, o elétron-volt (eV), como sendo a energia elétrica de um elétron colocado num potencial elétrico de um Volt. Assim, a energia elétrica do elétron nesse átomo de hidrogênio clássico é de $-28,8 \text{ eV}$. Vale mencionar que a energia observada é $-13,6 \text{ eV}$, mostrando uma grande discrepância com essa versão clássica.

2.5 Gauss

Em geral se usa integrações múltiplas para obter primeiro o potencial elétrico de uma dada distribuição contínua de cargas contidas numa certa região. Em geral esse procedimento

requer muito trabalho manual. No entanto, quando tais distribuições contínuas de cargas apresentam formas simétricas, como esferas, cilindros e planos infinitos, o uso do lema de Gauss torna o cálculo do campo elétrico muito simples. Gauss não estava interessado em Eletromagnetismo. Gauss estava interessado em fluxo e simetrias. O título “lei de Gauss” é um exagero, mas pegou. Na realidade não existe uma lei de Gauss para o Eletromagnetismo. Acontece que a lei de Coulomb pode ser reescrita numa forma muito inspiradora usando um lema e um teorema, atribuídos a Gauss.

Os trabalhos de Gauss em 1813 sobre Geometria deu uma excelente contribuição ao Eletromagnetismo sintetizado pelas equações de Maxwell de 1861. A essência desta contribuição de Gauss, conhecida por “lei de Gauss”, é a relação entre o fluxo do campo elétrico com suas cargas fonte, válida somente para campos com uma dependência exata com o inverso do quadrado (exatamente) da distância. Os conceitos de ângulo sólido e fluxo são fundamentais.

2.5.1 Ângulo sólido

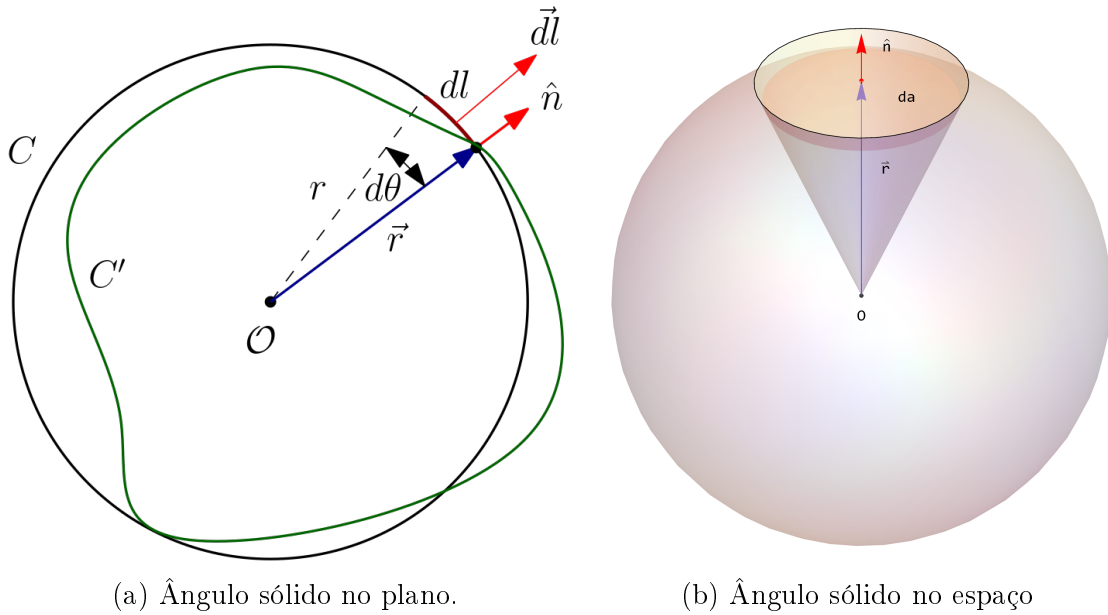


Figura 2.3: Geometria de um ângulo sólido, campo de visão propiciado pelo cone, no plano (a) e no espaço tridimensional (b).

Considere a circunferência C , de raio r , mostrada na Figura 2.3a. O arco compreendido pelo ângulo $d\theta$ tem comprimento $dl = r d\theta$. Denomina-se de ângulo sólido $d\Omega$ o ângulo subtendido pelo arco de comprimento dl , definido por

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r}, \quad d\vec{l} = dl \hat{n}, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.23)$$

onde o versor \hat{n} é **perpendicular** ao arco infinitesimal dl . Considerando o arco infinitesimal dl sobre a circunferência C , de raio r , então os versores \hat{n} e \hat{r} são paralelos e o ângulo sólido em (2.23) pode ser simplificado,

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot \vec{dl}}{r} = \frac{\hat{r} \cdot \vec{n} r d\theta}{r} = d\theta. \quad (2.24)$$

Assim, o ângulo sólido $d\Omega$ no plano coincide com o ângulo polar $d\theta$ subtendido pelo arco de comprimento infinitesimal dl . Portanto, o ângulo sólido compreendido pela circunferência C é $\Omega = 2\pi$. Meia circunferência corresponde ao ângulo sólido π . Podemos dizer que o ângulo sólido é o nosso campo de visão no plano, onde podemos enxergar apenas pontos e curvas. Se meu ângulo sólido é π , então somente posso enxergar metade de uma circunferência em minha volta. Note que o ângulo sólido não depende do raio da circunferência usada. De fato, o produto escalar na definição (2.23) garante o uso de qualquer curva, como a curva C' na Figura 2.3a, na definição do ângulo sólido. **O ângulo sólido total também não depende da posição da origem do sistema de coordenadas dentro da região delimitada pela curva fechada.** De qualquer ponto no interior de uma curva fechada qualquer, sempre veremos um ângulo sólido total de 2π .

A generalização do ângulo sólido (2.23) para o espaço tridimensional é

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot \vec{da}}{r^2}, \quad \vec{da} = da \hat{n}, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.25)$$

onde o versor \hat{n} é **perpendicular** à área infinitesimal da . O ângulo sólido é o campo de visão propiciado pelo interior do cone mostrado na Figura 2.3b, com o vértice na origem. Considerando uma casca esférica de raio r , centrada na origem, então os versores \hat{n} e \hat{r} são paralelos e o ângulo sólido em (2.25) pode ser simplificado,

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot \vec{da}}{r^2} = \frac{\hat{r} \cdot \vec{n} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.26)$$

onde θ e φ são as coordenadas esféricas angulares. Quando essas coordenadas angulares variam nos intervalos $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, elas descrevem uma casca esférica completa. Restringindo θ ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$, teremos uma meia casca esférica. Assim, o ângulo sólido total, por exemplo, pode ser calculado integrando (2.26),

$$\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 4\pi. \quad (2.27)$$

Este resultado indica que o campo de visão do espaço tridimensional é 4π . Note que o ângulo

sólido não depende do raio da casca esférica utilizada. Além disso, como no caso do ângulo sólido no plano, o produto escalar em (2.25) garante que qualquer superfície (suave) possa ser usada no lugar de uma casca esférica. Naturalmente, a casca esférica oferece a situação geométrica mais simples. O ângulo sólido total também não depende da posição da origem do sistema de coordenadas dentro da região delimitada pela superfície fechada. De qualquer posição dentro de qualquer superfície fechada, sempre veremos um ângulo sólido total de 4π .

2.5.2 O lema de Gauss

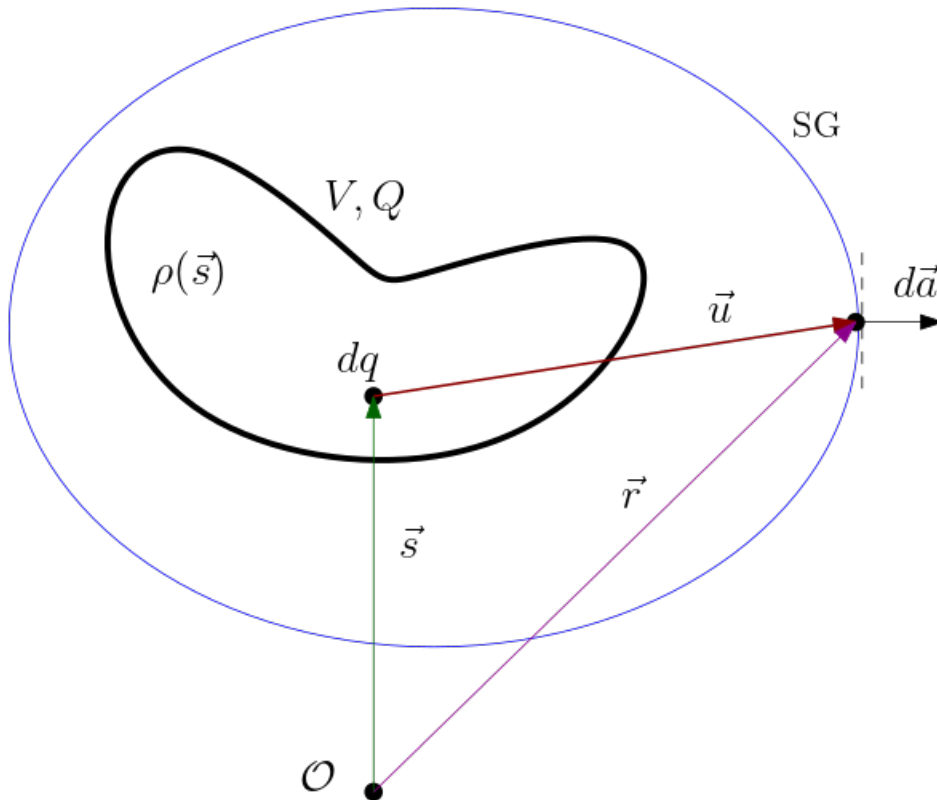


Figura 2.4: Superfície gaussiana (SG) envolvendo uma distribuição de cargas contidas num volume V .

A Figura 2.4 mostra uma carga total Q distribuída num volume V segundo a densidade $\rho(\vec{s})$. O vetor posição \vec{s} localiza um elemento de carga $dq = \rho(\vec{s})dV$, ocupando um volume infinitesimal dV , em relação ao referencial inercial (fixo) \mathcal{O} . Imagine uma superfície fechada (de área total A) envolvendo esta distribuição de cargas. Esta superfície fechada é denominada de superfície gaussiana (SG). Imagine também um elemento de área $d\vec{a}$ nesta superfície gaussiana, localizado pelo vetor posição \vec{r} em relação ao mesmo referencial inercial \mathcal{O} . Esse

elemento de área compreende o ângulo sólido

$$d\Omega = \frac{\hat{u} \cdot \vec{d}\vec{a}}{u^2}, \quad \vec{u} = \vec{r} - \vec{s}. \quad (2.28)$$

Note que o ângulo sólido compreendido pela superfície gaussiana fechada SG é sempre 4π , independentemente da posição do elemento de carga dq , desde que SG contenha a distribuição de cargas completamente. O ângulo sólido não depende da origem do sistema de coordenadas utilizado.

Uma distribuição de cargas produz um campo elétrico em todo o espaço. O fluxo desse campo elétrico através da superfície gaussiana SG é

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}. \quad (2.29)$$

Veja a Sec. D.3 para a ver a definição de fluxo e seu significado. O campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ na posição \vec{r} é a soma de todas as contribuições dos elementos de carga dq dentro da distribuição,

$$\vec{E}(\vec{r}) = C_e \int_Q dq \frac{\hat{u}}{u^2} = C_e \int_V dV \rho(\vec{s}) \frac{\hat{u}}{u^2}, \quad \vec{u} = \vec{r} - \vec{s}, \quad dq = \rho(\vec{s}) dV. \quad (2.30)$$

Substituindo esta expressão do campo elétrico resultante no fluxo (2.31), temos

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = C_e \int_V \rho(\vec{s}) dV \oint_{SG} \frac{\hat{u} \cdot d\vec{a}}{u^2}. \quad (2.31)$$

Note a presença do ângulo sólido total na integral sobre a superfície gaussiana, o qual não depende da origem do vetor \vec{u} dentro da distribuição de cargas, a qual está no interior da superfície gaussiana. Desta forma, a integral na superfície gaussiana pode ser efetuada e seu valor será sempre 4π , o ângulo sólido tridimensional total, sempre que a superfície gaussiana for fechada,

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = C_e \int_V \rho(\vec{s}) dV \oint_{SG} d\Omega = C_e Q 4\pi, \quad (2.32)$$

onde usamos também a definição (2.8) de carga total. Magnífico! O fluxo total, através de uma superfície fechada e arbitrária, contendo uma distribuição de cargas é simplesmente proporcional à carga total desta distribuição. Esse é o Lema de Gauss,

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = 4\pi C_e Q, \quad Q = \int_V \rho dV. \quad (2.33)$$

Note que se a dependência do campo vetorial com a posição não fosse exatamente o inverso do quadrado, não teríamos a presença do ângulo sólido tridimensional e não teríamos este resultado surpreendente. Ou seja, o Lema de Gauss é uma consequência da Lei de Coulomb. Como veremos em seguida, o lema de Gauss (2.33) é muito útil para calcular campos elétricos de distribuições com simetrias. A arte consiste em escolher adequadamente a superfície gaussiana.

O lema de Gauss proporciona a construção de um dispositivo de proteção a aparelhos eletrônicos. Esse lema estabelece que somente haverá um campo elétrico se houver uma carga interna à superfície gaussiana. Portanto, uma cavidade construída de metal, que possui cargas livres (elétrons), é uma distribuição de cargas concentradas apenas na superfície. Assim, não haverá campo elétrico no seu interior, uma vez que não há cargas no interior. Esse dispositivo é conhecido por “gaiola de Faraday”, presente em todo equipamento eletrônico moderno. O interior da gaiola de Faraday blindava campos elétricos externos, protegendo assim equipamentos eletrônicos sensíveis.

2.5.3 O teorema de Gauss

Ao calcular o fluxo Φ de um campo vetorial \vec{E} , um teorema atribuído a Gauss, permite passar a integral de superfície para uma integral de volume numa região contida completamente dentro da superfície gaussiana SG escolhida para calcular o fluxo,

$$\Phi = \int_{SG \supset V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.34)$$

Use o lema de Gauss (2.33) com a carga total escrita em termos de sua integral de volume,

$$\Phi = 4\pi C_e \int_V \rho dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.35)$$

Compare os dois lados na última igualdade. A conclusão é imediata: a divergência do campo elétrico é proporcional à densidade de carga elétrica,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho. \quad (2.36)$$

O divergente é um equipamento para se detectar cargas fontes num dado ponto do espaço. Recapitulando: o lema de Gauss (2.33) é uma consequência da lei de Coulomb para o campo elétrico (varia exatamente com o inverso do quadrado da distância da carga fonte); o teorema de Gauss (2.34) implica na primeira equação de Maxwell (2.36). Até parece que os personagens Coulomb, Gauss e Maxwell, mesmo separados pelo tempo e pelo espaço,

combinaram esses lances com a nossa natureza e a Matemática.

É interessante escrever o campo elétrico \vec{E} em termos do potencial elétrico ϕ , $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, como estabelecido na Sec. 2.3, e substituir na primeira equação de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi = 4\pi C_e \rho \implies \nabla^2 \phi = -4\pi C_e \rho. \quad (2.37)$$

Este resultado é conhecido por equação de Poisson. O operador $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ é conhecido por laplaciano. A equação de Poisson reduz-se à equação de Laplace na ausência de cargas fonte ($\rho = 0$). Uma vez que o campo escalar densidade ρ é dado, conhecido, a equação de Poisson (2.37) torna-se uma equação diferencial para o potencial escalar ϕ .

2.6 Casos de estudos

2.6.1 Toy model

Vamos considerar um potencial elétrico fictício dado por

$$\phi(x, y) = 4xy e^{-(x^2+y^2)}, \quad (2.38)$$

em algum sistema de unidades conveniente. Esse potencial fictício é uma superfície que pode ser vista. Vale lembrar que o potencial elétrico dá uma energia potencial elétrica, $U = q\phi$, a numa carga teste q colocada na posição (x, y) .

O campo elétrico correspondente é

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = 4e^{-(x^2+y^2)}\left(y(2x^2 - 1), x(2y^2 - 1)\right). \quad (2.39)$$

Vale lembrar que o campo elétrico é responsável pela força elétrica, $\vec{F} = q\vec{E}$, numa carga teste q colocada na posição (x, y) .

A divergência deste campo elétrico é um campo escalar suave, não-nulo,

$$\rho(x, y) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = -16xy(x^2 + y^2 - 3)e^{-(x^2+y^2)}. \quad (2.40)$$

Esse campo escalar representa a densidade de cargas (cargas por unidade de área neste caso). Vale lembrar que estas cargas criam o potencial elétrico. Note também que a divergência (2.40) é equivalente à equação de Poisson (2.37). Foi por isso que a divergência (2.40) foi batizada de ρ ; equivalente a fazermos $4\pi C_e = 1$ em (2.37).

A Figura 2.5 mostra os campos escalares $\phi(x, y)$, o potencial elétrico, e $\rho(x, y)$, a densidade de cargas obtida da divergência do campo elétrico. Note como estas superfícies são muito

parecidas (exceto pelas intensidades) e diferem de zero somente numa vizinhança pequena onde estão as cargas. As cargas negativas estão nas regiões negativas do eixo Z .

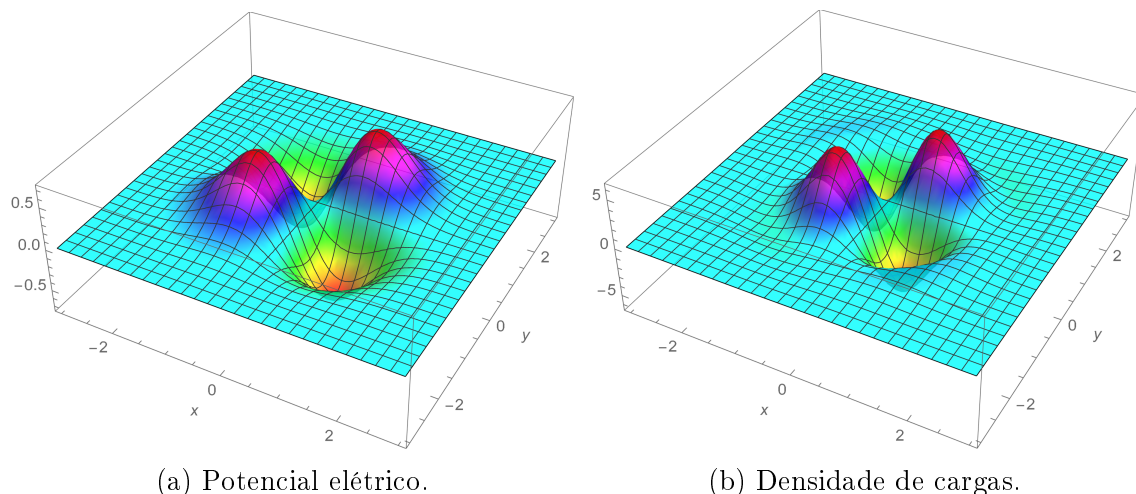


Figura 2.5: Superfícies representando o potencial elétrico (a) e a densidade de cargas (carga por área) (b) correspondente para o *toy model* (2.38).

As linhas de campo estão mostradas na Figura 2.6. O pano de fundo nestas figuras é a vista superior do potencial elétrico (a) e da densidade de cargas (b). Esta vista superior é conhecida por “mapa de densidade” de uma determinada superfície. Compare com a Figura 2.5. Os vetores do campo elétrico são tangentes a estas linhas de campo. Observe que as linhas de campos saem da região positiva (onde estão as cargas positivas) e entram na região negativa (onde estão as cargas negativas).

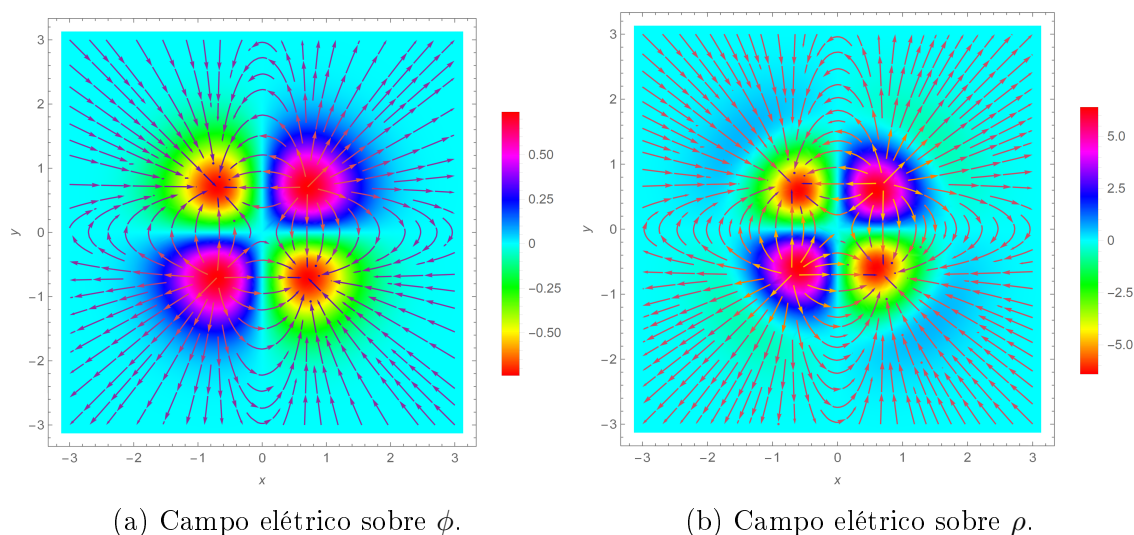


Figura 2.6: Linhas de campo do campo elétrico sobre os mapas de densidade do potencial elétrico (a) e da densidade de cargas (b) para o *toy model* (2.38).

2.6.2 Cargas pontuais

Como outro caso de estudos sobre os conhecimentos apresentados até aqui, vamos considerar um sistema formado por duas cargas, de sinais contrários. Esse é um sistema mais realista. Consideraremos os casos de cargas com a mesma intensidade e com intensidades distintas. A estratégia é calcular primeiro o potencial total (2.21) para duas cargas e, em seguida, calcular o campo elétrico via o gradiente.

Para duas cargas, Q_1 e Q_2 , o potencial elétrico resulta da soma dos potenciais individuais,

$$\phi(x, y, z) = C_e \left[\frac{Q_1}{\sqrt{(x - u_x)^2 + (y - u_y)^2 + (z - u_z)^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (z - v_z)^2}} \right], \quad (2.41)$$

onde $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ é o vetor posição da carga Q_1 e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é a posição da carga Q_2 . Note que as coordenadas cartesianas são as mais adequadas, pois este potencial resultante não apresenta a mesma simetria esférica dos potenciais individuais.

2.6.2.1 Intensidades iguais

Considerando cargas de mesma intensidade e sinais opostos, $Q_1 = -Q_2 = Q > 0$, com a carga positiva colocada na posição $\vec{v} = (-a, 0, 0)$, $a > 0$, e a carga negativa na posição $\vec{u} = (a, 0, 0)$, o potencial resultante é

$$\frac{\phi(x, y, z)}{C_e Q} = \frac{1}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (2.42)$$

cujo lado direito pode ser visualizado sem a necessidade de usar um sistema de unidades. Podemos visualizar somente as superfícies onde o potencial resultante é uma constante,

$$\frac{1}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2 + z^2}} = \mathcal{N}. \quad (2.43)$$

Tal superfície é denominada de **superfície equipotencial**. Note que a superfície equipotencial $\mathcal{N} = 0$ é o plano em $x = 0$ (verifique). As demais superfícies equipotenciais são fechadas. As superfícies equipotenciais $\pm \mathcal{N}$ são imagens espelhadas pelo plano $x = 0$. A Figura 2.7 mostra sete superfícies equipotenciais para $a = 10$ (em alguma unidade de comprimento conveniente). Note que os valores (absolutos) maiores de \mathcal{N} correspondem às menores superfícies equipotenciais. Os valores (absolutos) menores de \mathcal{N} correspondem às maiores superfícies equipotenciais, tendo o plano $x = 0$ como limite.

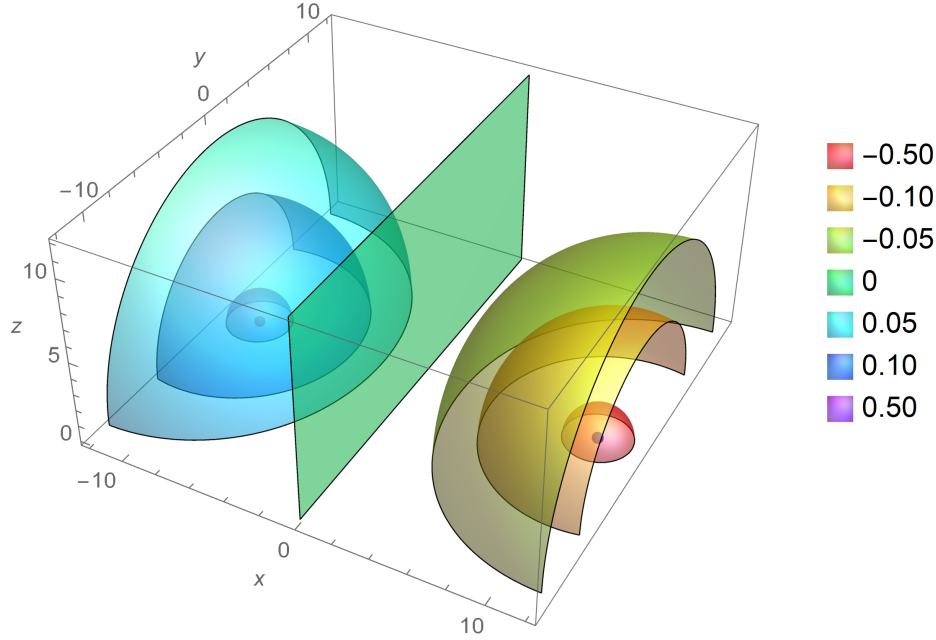


Figura 2.7: Superfícies equipotenciais do potencial elétrico de duas cargas de mesma intensidade e sinais opostos (esferas menores em $x = \pm 10$).

O campo elétrico correspondente é derivado (literalmente) do potencial elétrico (2.42),

$$\frac{\vec{E}(x, y, z)}{C_e Q} = -\vec{\nabla} \frac{\phi(x, y, z)}{C_e Q} = (f, g, h), \quad (2.44)$$

onde as três funções f , g e h são (verifique)

$$f(x, y, z) = +\frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (2.45a)$$

$$g(x, y, z) = +\frac{y}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (2.45b)$$

$$h(x, y, z) = +\frac{z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (2.45c)$$

Por definição, o campo elétrico (2.44) “prega” na posição (x, y, z) o vetor (f, g, h) , cujas componentes são dadas pelas funções em (2.45). A Figura 2.8 mostra esses vetores (alguns deles). Note que o campo elétrico, representado pelos vetores na Figura 2.8, saem da carga negativa (menor esfera vermelha em $x = -10$) e entram na carga positiva (menor esfera azul em $x = +10$). Esses vetores são perpendiculares às superfícies equipotenciais.

A divergência do campo elétrico é proporcional à densidade de cargas, um campo escalar

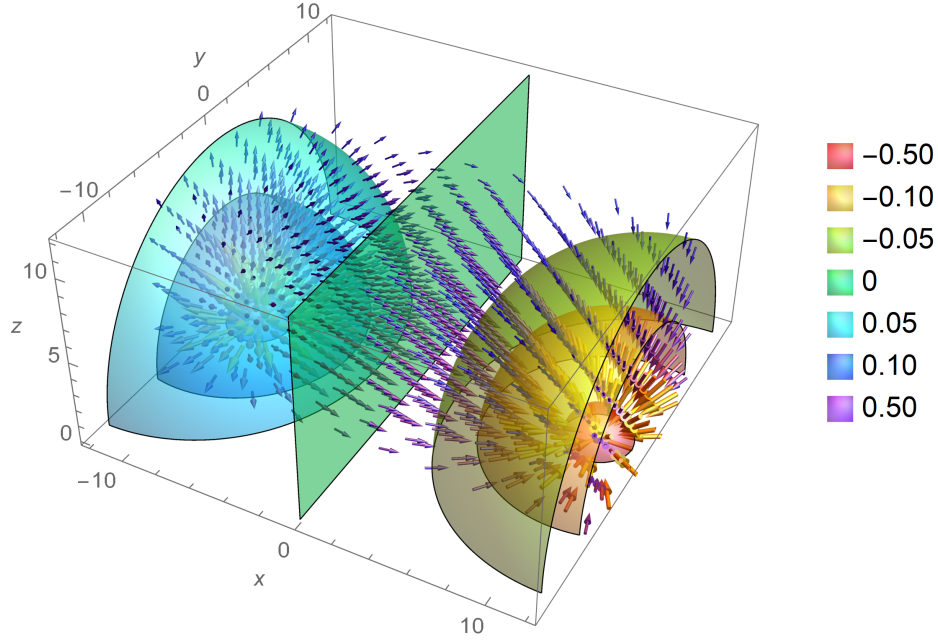


Figura 2.8: Superfícies equipotenciais do potencial elétrico de duas cargas de mesma intensidade e sinais opostos (esferas menores em $x = \pm 10$) e o respectivo campo elétrico (vetores).

tridimensional (como o potencial elétrico). Como as cargas são pontuais, a densidade de cargas deve ser nula em todo o espaço, exceto na posição de cada carga. De fato, ao tomarmos o divergente do campo elétrico (2.44), com as componentes (2.45), encontraremos o valor nulo (exceto na posição das cargas).

2.6.2.2 Intensidades distintas

Considerando as duas cargas $Q_1 = -2Q_2 = 2Q > 0$, com a carga positiva colocada na posição $\vec{v} = (-a, 0, 0)$, $a > 0$, e a carga negativa na posição $\vec{u} = (a, 0, 0)$, o potencial resultante é

$$\frac{\phi(x, y, z)}{C_e Q} = \frac{2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (2.46)$$

cujo campo elétrico correspondente é

$$\frac{\vec{E}(x, y, z)}{C_e Q} = -\vec{\nabla} \frac{\phi(x, y, z)}{C_e Q} = (f, g, h), \quad (2.47)$$

onde as três funções f , g e h são (verifique)

$$f(x, y, z) = +\frac{2(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (2.48a)$$

$$g(x, y, z) = +\frac{2y}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (2.48b)$$

$$h(x, y, z) = +\frac{2z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (2.48c)$$

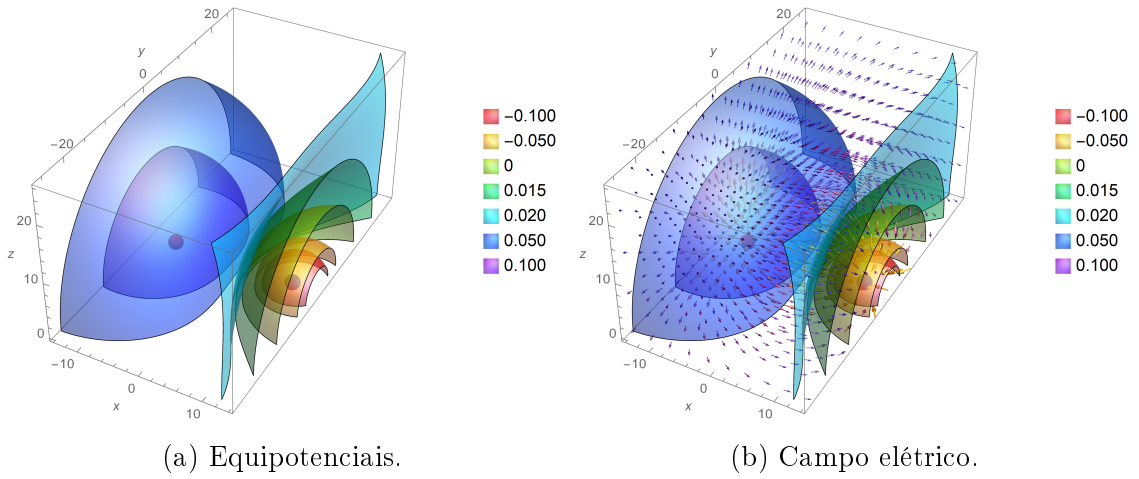


Figura 2.9: Superfícies equipotenciais (a) e campo elétrico (b) de duas cargas de sinais opostos e intensidades na razão 2 : 1.

As Figuras 2.9 e 2.10 mostram as superfícies equipotenciais (a) e o campo elétrico (b) correspondente. Estas figuras diferem apenas pelo campo de visão, ampliado na Figura 2.10. Nitidamente, as superfícies equipotenciais tendem a se fecharem sobre a carga de maior intensidade (em $x = -10$). Observando de muito longe, iremos perceber uma carga positiva de intensidade Q .

Todos os cortes vistos nas superfícies equipotenciais são devidos às limitações das variações das coordenadas (x, y, z) aos intervalos mostrados em cada eixo. Permitindo intervalos maiores, todas as superfícies se fecham.

2.6.3 Esfera

A região hachurada (de azul) na Figura 2.11 mostra uma esfera de raio R contendo uma carga total Q distribuída segundo uma densidade de cargas (carga por volume) ρ , definida

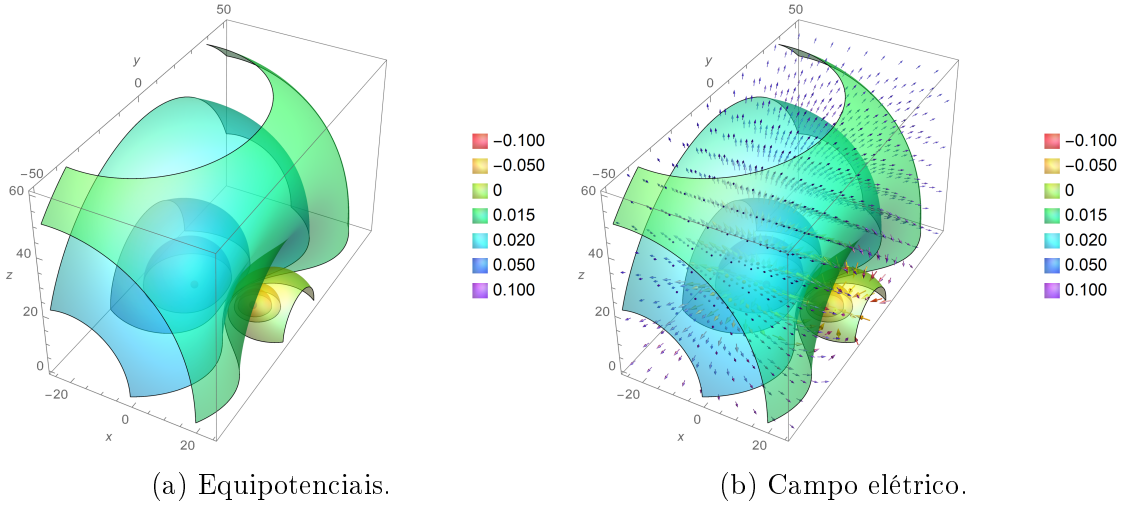


Figura 2.10: Superfícies equipotenciais (a) e campo elétrico (b) de duas cargas de sinais opostos e intensidades na razão 2 : 1. Ponto de observação mais distante.

localmente por

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad Q = \int_V \rho dV, \quad (2.49)$$

onde dV é o volume infinitesimal ocupado pela carga infinitesimal dq . Em geral a densidade de cargas (2.49) é um campo escalar, o qual é nulo fora da distribuição, isto é, $\rho = \rho(\vec{r})$ no interior da distribuição ($\|\vec{r}\| < R$).

O vetor posição \vec{r} localiza a posição do ponto onde o campo elétrico será avaliado, tanto dentro quanto fora da distribuição. Devido à simetria esférica da distribuição de cargas, a superfície gaussiana (SG) mais adequada é uma casca esférica concêntrica com a distribuição, com um raio $r = \|\vec{r}\|$, tanto no interior ($r < R$) quanto no exterior ($r > R$) da distribuição. O vetor \vec{da} é perpendicular às superfícies gaussianas esféricas,

$$\vec{da} = da \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}, \quad \vec{r} = r \hat{r}. \quad (2.50)$$

Naturalmente, as coordenadas esféricas (r, θ, φ) são as mais adequadas. As coordenadas esféricas angulares variam nos intervalos $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A coordenada esférica radial varia no intervalo $0 \leq r \leq R$ no interior da distribuição e no intervalo $R \leq r \leq \infty$ no exterior. Como precisaremos também do elemento de volume dV , em coordenadas esféricas ele é

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr. \quad (2.51)$$

Em toda distribuição com uma densidade especificada, devemos primeiro escrever a carga total em termos dos parâmetros presentes na densidade. A densidade, em geral, assim

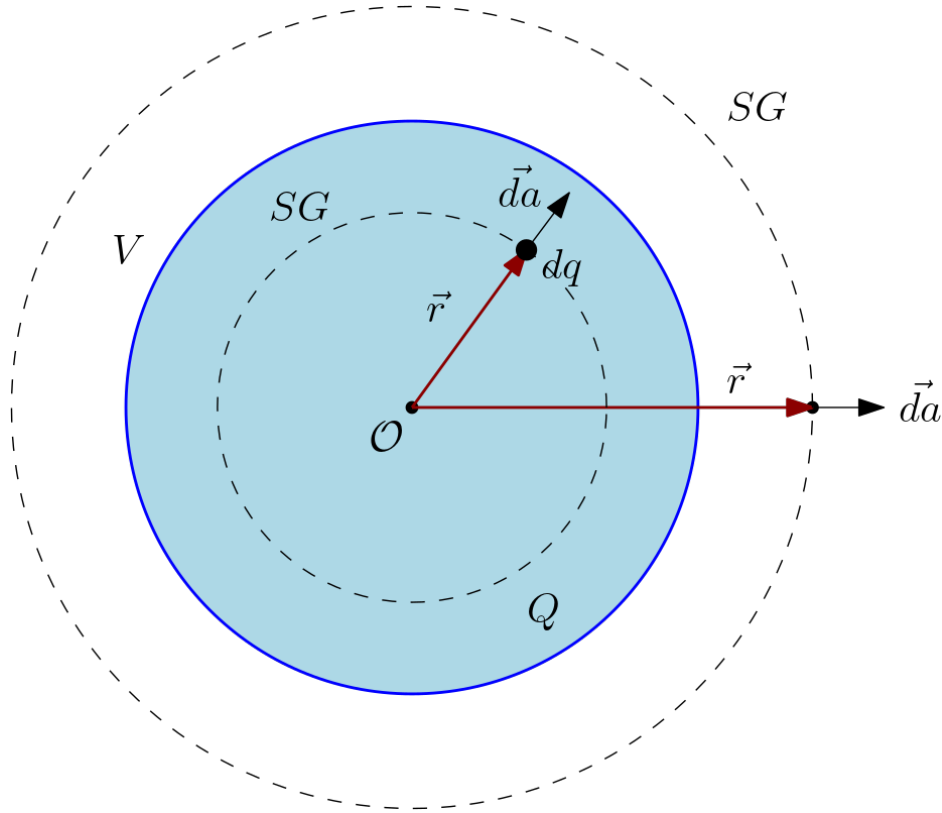


Figura 2.11: Distribuição esférica ou cilíndrica de cargas elétricas. O raio da esfera ou do cilindro é R e a carga total é Q . SG é a superfície gaussiana. O vetor \vec{da} é perpendicular à superfície gaussiana.

como os elementos de volumes, áreas e comprimentos, é função da posição. Por exemplo, a densidade pode ser uma constante, $\rho = \rho_0$, a situação mais simples onde cada região dentro da distribuição tem a mesma densidade de cargas. Neste caso, a carga total é (verifique)

$$Q = \int_V dq = \int_V \rho dV = \rho_0 V = \rho_0 \int_V dV = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3, \quad \rho = \rho_0, \quad (2.52)$$

pois (verifique)

$$V = \int_V dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (2.53)$$

O resultado (2.52) indica que uma densidade constante ρ_0 é igual à carga total dividida pelo volume da distribuição, $\rho_0 = Q/V$. No entanto, isto deixa de ser verdade para densidades não uniformes (constantes). Por exemplo, a densidade $\rho = \alpha r$, linear na distância radial, indica que há mais carga concentrada próximo à borda da esfera. Nesta caso, a carga total

é (verifique)

$$Q = \int_V dq = \int_V \rho dV = \alpha\beta = \alpha\pi R^4, \quad \rho = \alpha r \quad (2.54)$$

pois (verifique)

$$\beta = \int_V r dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^R r^3 dr = \pi R^4. \quad (2.55)$$

Note que a carga total está expressa em termos dos parâmetros α , representando a densidade de cargas, e o parâmetro R , representando o raio da esfera contendo as cargas elétricas.

Considerando uma densidade de cargas com uma simetria esférica, constante, ou no máximo com uma dependência radial, $\rho = \rho(r)$, é razoável supor que o campo elétrico correspondente também exibirá uma simetria esférica, ou seja, é razoável esperar que o campo elétrico seja da forma radial

$$\vec{E} = E_r(r)\hat{r}. \quad (2.56)$$

Essa hipótese é fundamental, pois permite calcular o fluxo desse campo elétrico através das superfícies gaussianas (SG) escolhidas e mostradas na Figura 2.11.

Para um ponto de observação no exterior da distribuição, $r \geq R$, o fluxo é

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint_{SG} E_r(r)(\hat{r} \cdot \hat{r}) da = E_r(r) \oint_{SG} da = E_r(r)4\pi r^2. \quad (2.57)$$

Note que a componente radial E_r do campo elétrico pôde sair da integral na segunda igualdade porque ela é constante sobre a superfície gaussiana SG, onde a integração está ocorrendo. **A superfície gaussiana SG precisa ser concebida para permitir que a componente do campo elétrico a ser determinada saia da integral, ou seja, a componente do campo elétrico a ser determinada precisa ser uma constante sobre esta superfície de integração.** Agora temos que usar o lema de Gauss (2.33), lembrando que a carga interna à superfície gaussiana externa é a carga total Q ,

$$\Phi = E_r(r)4\pi r^2 = 4\pi C_e Q. \quad (2.58)$$

A conclusão é imediata,

$$E_r(r) = C_e \frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R. \quad (2.59)$$

É a lei de Coulomb (para uma carga pontual). Aprendemos assim que o campo elétrico produzido por uma distribuição esférica de cargas elétricas, com uma densidade radial, é equivalente ao campo elétrico de uma carga pontual colocada no centro da distribuição. Assim, na região externa, não precisamos nos preocupar com a forma esférica da distribuição,

pois ela é equivalente a uma carga pontual. Esse resultado vale sempre em todo o espaço somente para uma distribuição esférica com simetria radial (devido à hipótese que fizemos sobre a forma radial do campo elétrico). Como o campo gravitacional é da mesma forma, Newton não precisou se preocupar (literalmente) com a forma extensa de planetas e estrelas. Infelizmente não conhecemos a forma geométrica de elétrons e prótons. Sabemos apenas que seus campos elétricos em posições distantes são idênticos aos campos produzidos por cargas pontuais.

Para um ponto de observação no interior da distribuição, $r \leq R$, o fluxo é o mesmo calculado em (2.57), com a carga total Q trocada pela carga interna Q_i à nova superfície gaussiana (verifique),

$$Q_i = \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \left(\frac{r}{R} \right)^3, \quad (2.60)$$

onde consideramos constante a densidade de cargas, $\rho = \rho_0$. Note que as cargas que estão fora da superfície gaussiana não contribuem para o campo elétrico. Portanto, a componente radial do campo elétrico no interior da distribuição é

$$E_r(r) = C_e \frac{Q_i}{r^2} = C_e Q \frac{r}{R^3}, \quad r \leq R. \quad (2.61)$$

Esse campo é linear na coordenada radial. Ele tem a mesma forma do campo correspondente em um oscilador harmônico (sistema massa-mola). A força elétrica correspondente é idêntica à força exercida numa pequena massa presa em uma mola obedecendo a lei de Hooke. Ela produz um movimento oscilatório. Note que os campos (2.59) (externo) e (2.61) (interno) possuem o mesmo valor em $r = R$, a superfície da distribuição de cargas.

Considerando uma densidade linear na distância radial, $\rho = \alpha r$, a carga interna Q_i , de acordo com (2.54), muda para

$$Q_i = \alpha \pi r^4 = Q \left(\frac{r}{R} \right)^4. \quad (2.62)$$

Neste caso, o campo elétrico é

$$E_r(r) = C_e \frac{Q_i}{r^2} = C_e Q \frac{r^2}{R^4}, \quad r \leq R. \quad (2.63)$$

Novamente, notamos que os campos (2.59) (externo) e (2.63) (interno) possuem o mesmo valor em $r = R$, a superfície da distribuição de cargas.

Dada à simetria esférica do campo elétrico, é imediato calcular o potencial elétrico correspondente usando a prescrição (2.15). Para o exterior $r \geq R$, temos

$$\phi(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -C_e Q \int \frac{dr}{r^2} = C_e Q \frac{1}{r} + c_1, \quad r \geq R \quad (2.64)$$

Note que escolhemos uma trajetória retilínea porque o campo elétrico é conservativo, portanto qualquer trajetória serve. Por comodidade, vamos escolher a constante $c_1 = 0$ para anular o potencial no infinito. No interior da distribuição, densidade constante, o potencial elétrico é

$$\phi(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -C_e Q \int \frac{r dr}{R^3} = -C_e Q \frac{r^2}{2R^3} + c_2, \quad r \leq R. \quad (2.65)$$

A constante c_2 pode ser usada para garantir que os potenciais, externo e interno, tenham o mesmo valor em $r = R$, ou seja,

$$c_2 = C_e Q \frac{3}{2R}. \quad (2.66)$$

Vale observar que a forma do potencial no interior da distribuição depende da forma da densidade de cargas. Para a densidade linear, o potencial muda,

$$\phi(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -C_e Q \int \frac{r^2 dr}{R^4} = -C_e Q \frac{r^3}{3R^4} + c_2, \quad r \leq R. \quad (2.67)$$

Impondo o mesmo valor dos potenciais em $r = R$, a constante c_2 é

$$c_2 = C_e Q \frac{4}{3R}. \quad (2.68)$$

Para finalizar, podemos verificar que a primeira equação de Maxwell é satisfeita pelos campos elétricos obtidos. Considerando campos com simetria esférica da forma $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$, o divergente em coordenadas esféricas pode ser escrito como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 4\pi C_e \rho. \quad (2.69)$$

Note a sutileza de ter a componente radial do campo elétrico E_r multiplicada por r^2 , antes que a derivada seja executada. É esta sutileza que torna possível o cumprimento da primeira equação de Maxwell fora da distribuição, com a componente radial do campo elétrico dada por (2.59),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (C_e Q) = 0, \quad r \geq R, \quad (2.70)$$

e dentro, para a densidade constante,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (C_e Q r^3) = 3C_e Q = 4\pi C_e \rho, \quad r \leq R, \quad (2.71)$$

com a componente radial do campo elétrico dada por (2.61), e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (C_e Q r^4 / R^4) = C_e Q \frac{4r}{R^4} = 4\pi C_e \rho, \quad r \leq R, \quad (2.72)$$

onde usamos a componente radial do campo elétrico dada por (2.63).

As expressões dos potenciais e das respectivas componentes radiais dos campos elétricos podem ser melhor analisadas construindo seus gráficos. A Figura 2.12 mostra os gráficos dos potenciais (2.65) e (2.67) internos à distribuição e o potencial externo (2.64). Por comodidade, fizemos $R = 1$ e $C_e Q = 1$ (em unidades convenientes). Podemos notar que as escolhas das constantes tornaram os potenciais em funções suaves em toda a região $0 \leq r < \infty$. No entanto, a superfície da distribuição esférica, $R = 1$, é um ponto de inflexão.

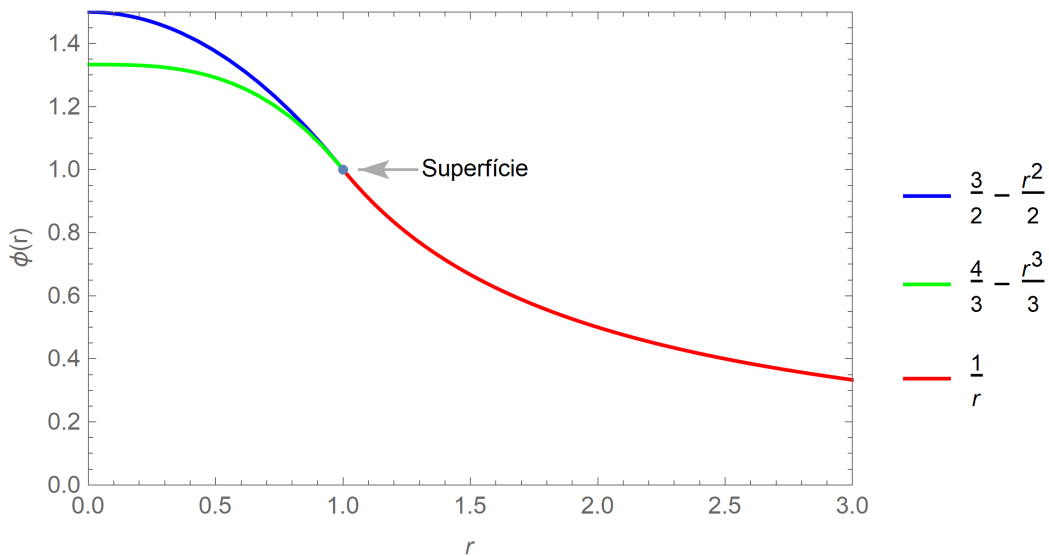


Figura 2.12: Potenciais elétricos de uma distribuição esférica de cargas elétricas, de raio $R = 1$ (em unidades convenientes).

A Figura 2.13 mostra os gráficos das componentes radiais dos campos elétricos de uma distribuição esférica de cargas elétricas, dadas em (2.59) para a região externa e em (2.61) (densidade constante) e (2.63) (densidade linear) para a região interna. Estas curvas representando os campos elétricos são as derivadas (a menos de um sinal) das curvas mostradas na Figura 2.12. Note que estas curvas representando os campos elétricos têm suas derivadas descontínuas na superfície da distribuição esférica, $R = 1$.

2.6.4 Cilindro

Considere uma distribuição de cargas na forma de uma cilindro maciço de base circular de raio R . Seja l o comprimento desse cilindro retilíneo. Podemos usar a Figura 2.11 para mostrar um corte transversal dessa distribuição cilíndrica. Vamos considerar uma densidade

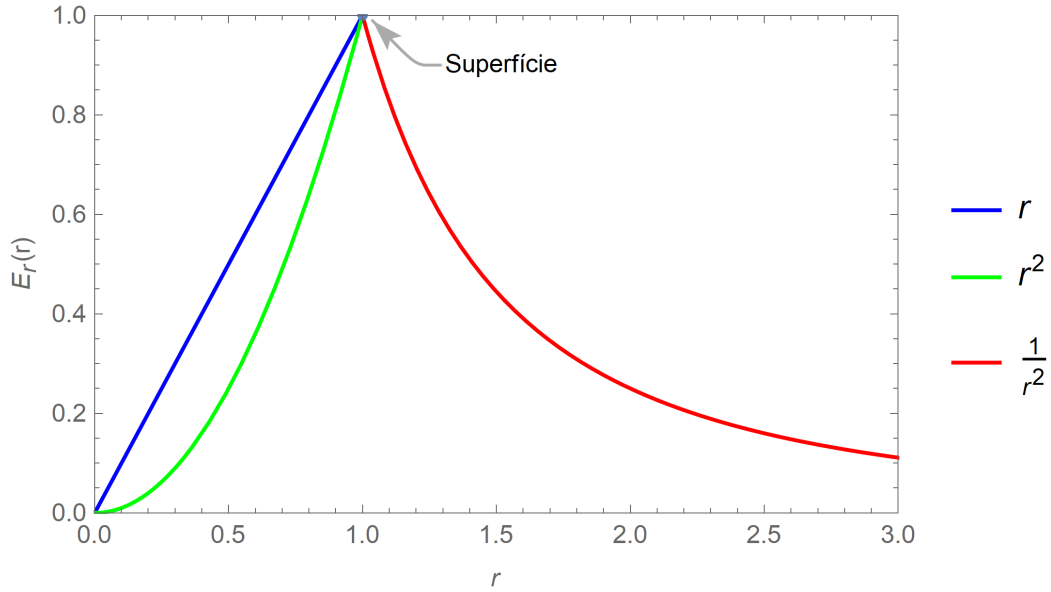


Figura 2.13: Componentes radiais dos campos elétricos de uma distribuição esférica de cargas elétricas, de raio $R = 1$ (em unidades convenientes).

constante de cargas, $\rho = \rho_0$. Assim, a carga total é (verifique)

$$Q = \int_V \rho dV = \rho_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^R r dr \int_{z=0}^l dz = \pi R^2 l \rho_0. \quad (2.73)$$

Como veremos, a densidade linear de cargas (carga por unidade de comprimento),

$$\lambda_0 = \frac{Q}{l} = \pi R^2 \rho_0, \quad (2.74)$$

será uma quantidade importante, a qual nos permitirá dispensar o comprimento desse cilindro. Isso é importante para observarmos o limite em que o comprimento do cilindro é muito maior que seu diâmetro ($l \gg R$). Essa condição corresponde a um fio infinito de cargas, com carga total Q e uma densidade linear de cargas (constante) λ_0 .

Como a densidade de cargas é constante e a distribuição tem simetria cilíndrica, esperamos que o campo elétrico também exiba essa simetria cilíndrica,

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{r}, \quad (2.75)$$

onde o versor \hat{r} é perpendicular à lateral do cilindro e r é a distância (radial) até o eixo (central) do cilindro, conforme indicado na Figura 2.11. As superfícies gaussianas (SG) apropriadas são cascas cilíndricas concêntricas de raio r , fechadas, interna e externamente à

distribuição. A altura dessas superfícies gaussianas pode ser igual à altura l da distribuição cilíndrica. Desta forma, o campo elétrico será paralelo ao vetor normal à superfície lateral destas superfícies gaussianas e perpendicular às suas bases (tampas). Nas tampas, o vetor normal da superfície gaussiana está na direção do eixo Z (perpendicular à direção radial). Assim, o fluxo não-nulo será apenas através das superfícies laterais, onde o elemento de área $\vec{d}\mathbf{a}$ é

$$\vec{d}\mathbf{a} = r \, d\varphi \, dz \, \hat{r}. \quad (2.76)$$

O fluxo total do campo elétrico fora ($r > R$) da distribuição é (verifique)

$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot \vec{d}\mathbf{a} = E_r(r)r \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^l dz = 2\pi l r E_r(r). \quad (2.77)$$

Esse mesmo fluxo, de acordo com o lema de Gauss (2.33), é proporcional à carga total interna Q_i à distribuição gaussiana usada, que nesse caso contém a carga total Q , $Q_i = Q$. Então, usando o resultado anterior, a componente radial $E_r(r)$ do campo elétrico (2.75) é

$$E_r(r) = C_e \frac{Q}{l} \frac{2}{r} = 2\lambda_0 C_e \frac{1}{r}, \quad r \geq R, \quad (2.78)$$

onde usamos também a densidade linear λ_0 dada em (2.74). Note que não há dependência direta com o diâmetro do cilindro.

O fluxo total do campo elétrico dentro ($r < R$) da distribuição é dado pela mesma expressão em (2.77). No entanto a carga interna à nova superfície gaussiana SG, interna à distribuição, muda para (verifique)

$$Q_i = \frac{r^2}{R^2} Q. \quad (2.79)$$

Desta vez, o lema de Gauss nos dá a componente radial $E_r(r)$ do campo elétrico no interior da distribuição como (verifique)

$$E_r(r) = 2\lambda_0 C_e \frac{r}{R^2}, \quad r \leq R. \quad (2.80)$$

Observe que os campos elétricos externo (2.78) e interno (2.80) possuem o mesmo valor em $r = R$ (na borda da distribuição).

Usando a prescrição (2.15), os respectivos potenciais elétricos são calculados facilmente. Dentro da distribuição temos (verifique)

$$\phi(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -2\lambda_0 C_e \int \frac{r \, dr}{R^2} = -\lambda_0 C_e \frac{r^2}{R^2} + c_1, \quad r \leq R. \quad (2.81)$$

Fora da distribuição temos (verifique)

$$\phi(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -2\lambda_0 C_e \int \frac{dr}{r} = -2\lambda_0 C_e \ln r + c_2, \quad r \geq R. \quad (2.82)$$

Desta vez, escolheremos as constantes de modo a ter o mesmo valor (nulo) dos potenciais na superfície da distribuição, (verifique)

$$C_1 = \lambda_0 C_e, \quad c_2 = 2\lambda_0 C_e \ln R. \quad (2.83)$$

A Tabela 2.2 mostra os potenciais e respectivos campos elétricos (componente radial), dentro e fora da distribuição, considerando uma densidade linear de cargas λ_0 constante num fio retilíneo e cilíndrico (de base regular de raio R). Esses campos estão mostrados na Figura 2.14, onde fizemos $R = 1$ e $\lambda_0 C_e = 1$, em unidades convenientes. Note que a superfície lateral ($r = R$) é um ponto de inflexão para o potencial elétrico.

	$r \leq R$	$r \geq R$
$\phi(r)$	$\lambda_0 C_e \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$	$2\lambda_0 C_e \ln \left(\frac{R}{r}\right)$
$E_r(r)$	$2\lambda_0 C_e \frac{r}{R^2}$	$2\lambda_0 C_e \frac{1}{r}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$	$4C_e \frac{\lambda_0}{R^2}$	0

Tabela 2.2: Campos de uma distribuição de cargas cilíndrica de base circular de raio R e densidade linear λ_0 constante.

Escrevendo o divergente em coordenadas cilíndricas (r, φ, z),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r), \quad (2.84)$$

é imediato verificar a lei de Gauss (2.36). Os valores da divergência (2.84) estão mostrados na Tabela 2.2. Use a expressão da densidade linear dada em (2.74) para expressar a divergência em termos da carga total dada em (2.73) (verifique).

2.6.5 Plano

A Figura 2.15 mostra um plano infinito contendo uma distribuição superficial constante de cargas $\sigma = \sigma_0$ (carga por unidade de área). Vamos localizar este plano em $z = 0$. Por

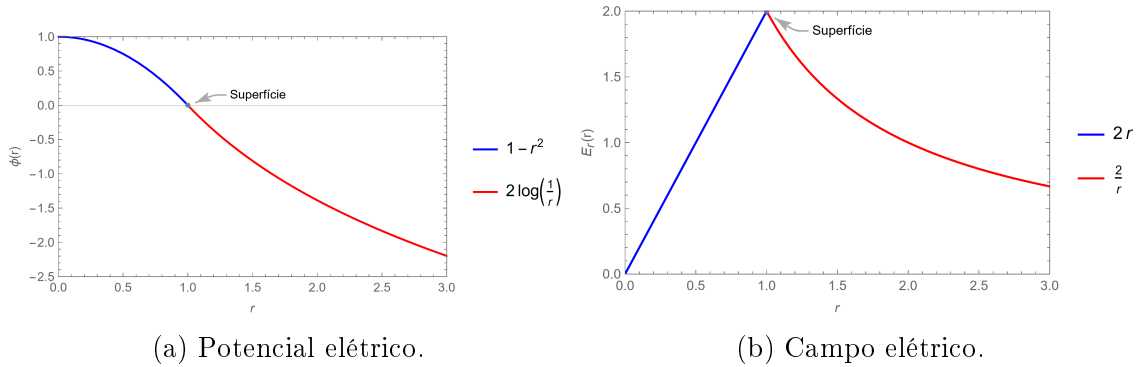


Figura 2.14: Campos ($\lambda_0 C_e = 1$) de uma distribuição de cargas cilíndrica de base circular de raio $R = 1$ (em unidades convenientes).

simetria, espera-se que o campo elétrico seja perpendicular ao plano de cargas,

$$\vec{E} = \begin{cases} +E_z(z) \hat{k} & \text{se } z > 0, \\ 0 & \text{se } z = 0, \\ -E_z(z) \hat{k} & \text{se } z < 0, \end{cases} \quad (2.85)$$

onde o vetor \hat{k} é perpendicular a esse plano. Observe a descontinuidade em $z = 0$.

A superfície gaussiana SG apropriada é uma caixa retangular ou um cubo perpendicular ao plano de cargas, como mostrado na Figura 2.15. A carga interna a essa superfície gaussiana é $Q_i = \sigma_0 a$, onde a é a área da face paralela ao plano de cargas. O fluxo do campo elétrico (2.85) é diferente de zero somente nas duas faces opostas e paralelas ao plano de cargas, onde os versores normais são $\hat{n} = +\hat{k}$ na face superior e $\hat{n} = -\hat{k}$ na face inferior. Assim, usando o lema de Gauss,

$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_z(z)a + E_z(z)a = 2aE_z(z) = 4\pi C_e Q_i = 4a\pi C_e \sigma_0. \quad (2.86)$$

Desta forma,

$$E_z(z) = 2\pi C_e \sigma_0. \quad (2.87)$$

O campo elétrico é constante e descontínuo no plano de cargas. O potencial elétrico correspondente é linear em z , a distância de um ponto ao plano de cargas,

$$\phi(z) = -2\pi C_e \sigma_0 z. \quad (2.88)$$

A constante do potencial elétrico foi escolhida para se ter um potencial nulo no plano de cargas.

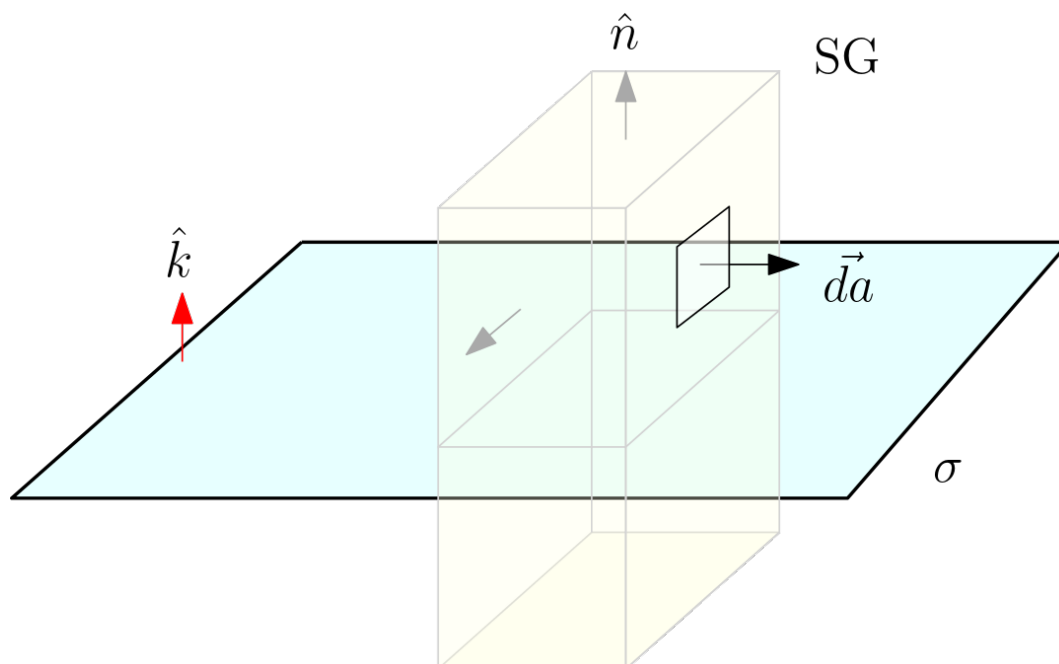


Figura 2.15: Distribuição planar de cargas com uma densidade superficial σ_0 constante e superfície gaussiana SG.

Este resultado, aparentemente singelo, tem uma aplicação prática muito importante. Arranjando dois planos de cargas com densidades superficiais de sinais opostos e mesma intensidade, colocadas de forma paralela, separadas por uma distância l , o campo elétrico resultante será não-nulo somente na região entre os planos de cargas (ou placas). Este arranjo é a base de um componente elétrico básico, denominado de “capacitor”.

Capítulo 3

Segunda equação de Maxwell

3.1 Introdução

Diferentemente do campo elétrico, o qual é oriundo de uma carga elétrica fonte, nunca se observou a existência de uma carga magnética fonte. Desta forma, temos a [segunda equação de Maxwell](#),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

pois o divergente de um campo vetorial indica a presença de uma carga fonte. Aprendemos que a divergência indica a densidade de carga fonte aplicando o teorema de Gauss à lei de Coulomb, Eq. 2.36. Como cargas magnéticas “não existem”, o divergente do campo magnético \vec{B} deve ser nulo.

E o que faz o campo magnético \vec{B} ? E se existisse carga magnética?

3.2 O campo magnético

3.2.1 Sem carga magnética

Como o campo elétrico \vec{E} , o campo magnético \vec{B} pode ser definido pela sua ação em uma carga teste q ,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.2)$$

conhecida como [força de Lorentz](#) (1895), mas identificada por Maxwell já em 1861. Esta força magnética apresenta duas características inexistentes na força elétrica ($\vec{F} = q\vec{E}$): (i) ela é um pseudo-vetor (devido ao produto vetorial) e (ii) ela é dependente da velocidade da carga teste. Um pseudo-vetor, resultante de um produto vetorial, não inverte seu sentido quando o sentido de cada vetor no produto vetorial é invertido. Da mesma forma, o número resultante de um produto escalar é um pseudo-escalar. Os produtos escalar e vetorial são operações

binárias entre vetores.

As dimensões do campo magnético \vec{B} são

$$[\vec{B}] = \left[\frac{\|\vec{F}\|}{q\|\vec{v}\|} \right] = \frac{\text{M}}{\text{QT}}. \quad (3.3)$$

No sistema internacional (SI) de unidades temos $\text{kg/C/s}=\text{T}$ (Tesla) como unidades para o campo magnético. A unidade Tesla é uma homenagem a Nikola Tesla.

E se existisse carga magnética?

3.2.2 Com carga magnética

Suponha que, além da carga elétrica Q_e , exista também a carga magnética Q_m como fonte pontual de um campo magnético obedecendo a lei de Coulomb (no vácuo),

$$\vec{B} = C_m \frac{Q_m}{r^2} \hat{r}, \quad C_m = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \frac{C_e}{C_m} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2, \quad (3.4)$$

onde C_m é a constante magnética, μ_0 é a permeabilidade e ϵ_0 é a permissividade do vácuo e c a velocidade da luz, também no vácuo.

Naturalmente, esse campo magnético é derivado de um potencial magnético (verifique),

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\chi, \quad \chi = C_m \frac{Q_m}{r}, \quad r \neq 0. \quad (3.5)$$

Até aqui, tudo similar ao campo elétrico. Como no caso elétrico, o divergente do campo magnético deve ser proporcional à densidade de carga magnética. Não fizemos isso para o campo elétrico de uma carga pontual, mas faremos aqui. Existe uma forma matemática (elegante) de definir uma densidade para uma carga pontual, apesar da carga pontual ocupar um volume nulo. O preço é usar uma distribuição conhecida por “delta de Dirac”, em homenagem a Paul Dirac. A definição de uma distribuição é apresentada no Apêndice C. A característica principal da distribuição delta de Dirac $\delta(r=0)$, ou simplesmente $\delta(r)$, é ter um valor nulo em todo o espaço, exceto na origem $r=0$. Na origem $r=0$ ela tende ao infinito. A distribuição delta de Dirac não é uma função, pelo menos do tipo ordinário. Usando esta distribuição delta de Dirac, a densidade de uma carga pontual pode ser escrita assim:

$$\rho_m = Q_m \delta(r). \quad (3.6)$$

A distribuição delta de Dirac $\delta(r)$ tem as mesmas dimensões de inverso de volume.

A divergência do campo magnético (3.5),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\nabla^2 \chi = 4\pi C_m \rho_m, \quad (3.7)$$

é proporcional à densidade de carga magnética pontual, como esperado (verifique). Vale o mesmo procedimento para o campo elétrico. O Apêndice C apresenta um exercício mostrando que o laplaciano do potencial $1/r$ é uma distribuição delta de Dirac,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r). \quad (3.8)$$

O fluxo Φ deste campo magnético produzido por uma carga pontual, com simetria radial, é calculado facilmente usando uma superfície gaussiana esférica S^1 centrada na origem e o teorema de Gauss (2.34),

$$\Phi = \int_{S^1} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{S^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 4\pi C_m Q_m, \quad (3.9)$$

onde S^2 é a esfera contendo a superfície esférica S^1 como borda e escrevemos o divergente do campo magnético em termos da delta de Dirac $\delta(r)$, como em (3.7). A integração no volume S^2 é feita usando a definição (C.1) de uma distribuição (verifique). Vale o mesmo procedimento para o campo elétrico.

Concluimos assim que uma possível existência da carga magnética seguindo a lei de Coulomb dada em (3.4), apresenta um cenário completamente similar ao campo elétrico, sugerindo uma força magnética do tipo $q_m \vec{B}$, onde q_m é uma carga magnética teste. O problema é que sabemos da existência da força de Lorentz (3.2), a qual é dependente da velocidade do corpo teste. Portanto, apesar do apelo matemático, este cenário similar ao campo elétrico está descartado.

Exercício 2. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por “verifique”.*

3.3 O potencial vetor

3.3.1 Sem carga magnética

A segunda equação de Maxwell (3.1) tem uma solução imediata (verifique),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.10)$$

O campo vetorial \vec{A} é conhecido como **potencial vetor**. Vale observar que esta solução deixa de ser válida se o potencial vetor apresentar uma singularidade em alguma região espacial. Um potencial vetor satisfazendo (3.10) é dito regular.

O potencial vetor desempenha um papel similar ao potencial escalar ϕ , tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Note que os potenciais ϕ (elétrico) e \vec{A} (magnético) dão origem aos campos vetoriais \vec{E} (elétrico) e \vec{B} (magnético), via gradiente e rotacional, respectivamente. Naturalmente, estes potenciais estão definidos a menos de uma constante arbitrária, pelo menos até o momento.

Vale ressaltar que esta solução em termos de um potencial vetor, via rotacional, é válida somente na ausência de cargas magnéticas. Na presença de cargas magnéticas, o divergente do campo magnético não será nulo.

Exercício 3. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por “verifique”.*

3.3.2 Com carga magnética

Supondo a existência da carga magnética, quem será o potencial vetor \vec{A} que dará origem ao campo magnético \vec{B} via o rotacional $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$? Não podemos mais usar um potencial vetor regular, pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ neste caso, que fornece um fluxo nulo, sempre. Uma contradição como esta é fruto típico da “árvore” de singularidades e indica que o potencial vetor desse campo magnético deve ser irregular, singular em alguma região.

Como o campo magnético possui simetria esférica (ou radial), esperamos que a forma do potencial vetor deve apresentar também algum tipo de simetria, além de uma irregularidade (singularidade) necessária. Dirac escolheu um potencial azimutal (simetria em torno do eixo Z),

$$\vec{A} = A_\phi \hat{e}_\phi. \quad (3.11)$$

Justificativas? Talvez Pauli pudesse tê-las enunciadas. Dirac não precisava delas. Com esta escolha,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left(A_\phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \hat{e}_r - \left(\frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta, \quad (3.12)$$

em coordenadas esféricas (verifique), ou

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{e}_\rho + \left(\frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \hat{e}_k, \quad (3.13)$$

em coordenadas cilíndricas (verifique).

Requerendo que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, então temos duas equações diferenciais (verifique) para resolver, cuja solução geral é

$$A_\phi = C_m Q_m \frac{f(\phi) - \cos \theta}{r \sin \theta} \quad (3.14)$$

para as coordenadas esféricas (verifique), e

$$A_\phi = \frac{C_m Q_m}{\rho} \left(f(\phi) - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (3.15)$$

para as coordenadas cilíndricas (verifique), onde $f(\phi)$ é uma função arbitrária. Que critérios (adicionais) poderíamos usar para determinar esta função arbitrária? Por exemplo, escolhendo $f = \pm 1$, o potencial vetor apresenta uma irregularidade (diverge) nos semi-eixos $\rho = 0$ ($r = |z|$), $z > 0$ ($\theta = 0$) e $z < 0$ ($\theta = \pi$), respectivamente. As coordenadas cilíndricas parecem mais adequadas para percebermos tais irregularidades (verifique).

Aqui a hipótese básica é de que o campo magnético é derivado de um potencial vetor via o rotacional, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Esta hipótese implica em um potencial vetor singular. A divergência deste campo magnético leva ao laplaciano deste potencial vetor singular, que terá o comportamento de uma distribuição. Esta situação é similar à definição da densidade de carga pontual (3.6) via a distribuição delta de Dirac, definida num ponto. Aqui, teremos de usar uma distribuição definida numa reta. Em breve...

Exercício 4. *Detalhe cuidadosamente cada uma das situações especificados por “verifique”.*

3.4 Densidade de corrente

Veremos em breve que carga em movimento (corrente elétrica) gera um campo magnético. Em geral, correntes são conduzidas em materiais que possuem extensões, além de comprimentos (como num fio). Isto significa que teremos de considerar densidades de correntes como um campo vetorial (com direção e sentido, além de intensidade). Diferentemente do campo elétrico, que é produzido por uma carga elétrica fonte, o campo magnético não tem uma carga magnética fonte. Até o momento ainda não conseguimos observar uma carga magnética, o que coloca uma grande dúvida sobre sua existência. Nossos campos magnéticos são criados por cargas elétricas em movimento. Portanto precisamos definir uma densidade de cargas em movimento (corrente elétrica), como um vetor.

Cargas em movimento formam uma corrente elétrica. Para tal, considere a Figura 3.1a. Cada portador de cargas (pontos) tem uma carga Q e uma velocidade \vec{u} (numa região muito pequena). Consideremos as cargas que atravessarão uma determinada área Δa num tempo Δt . Seja $\Delta \vec{a}$ o vetor elemento de área, perpendicular a esta área. O volume apoiado na área Δa e de altura $u\Delta t$ é $\Delta V = \Delta t \vec{u} \cdot \Delta \vec{a}$. Seja n a densidade dos portadores de cargas nesta região (a densidade de cargas é $\rho = nQ$). Então o total de portadores de cargas é $n\Delta V$.

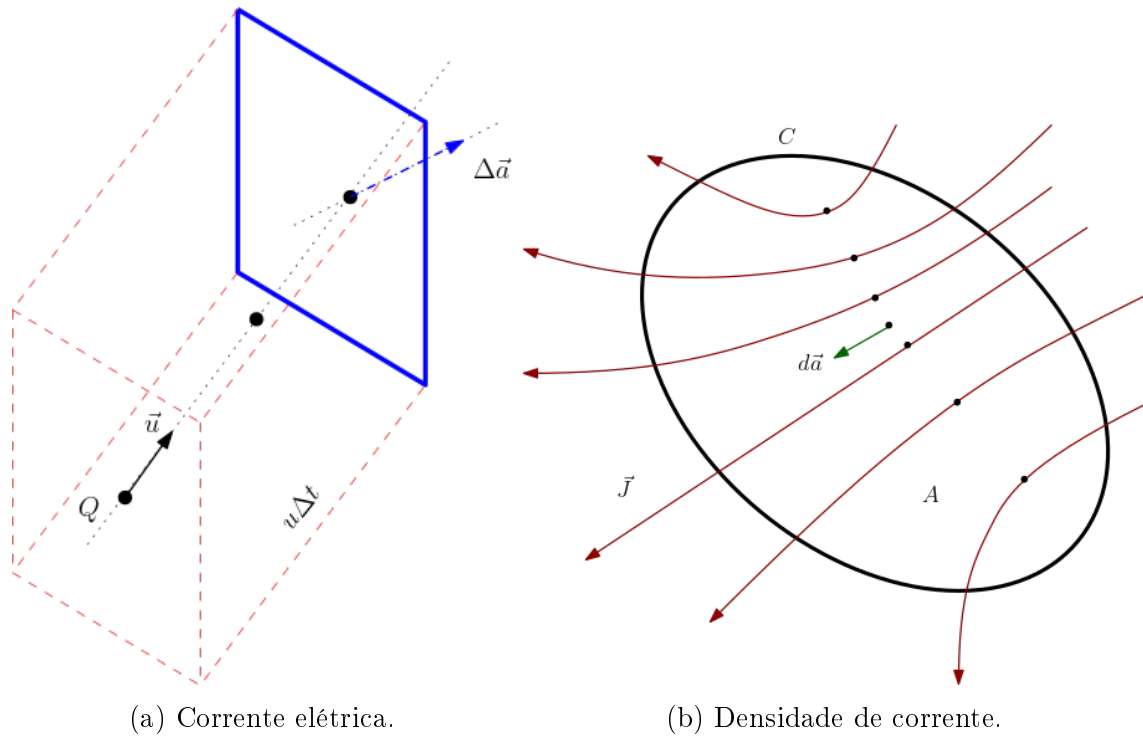


Figura 3.1: Densidade de corrente e conservação da carga elétrica.

Podemos definir (localmente) **corrente elétrica** como carga por unidade de tempo:

$$dI = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{n\Delta V Q}{\Delta t} = \rho \vec{u} \cdot d\vec{a}. \quad (3.16)$$

Melhor ainda, como veremos mais adiante, é introduzir o campo vetorial **densidade de corrente** \vec{J} de modo a obtermos a corrente total I passando por uma área A como o fluxo dessa densidade de corrente:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}, \quad \vec{J} = \rho \vec{u}. \quad (3.17)$$

A unidade de corrente elétrica no Sistema Internacional (SI) é o **Ampere** ($A=C/s$). Isto faz com que a unidade de densidade de corrente seja A/m^2 (corrente por área).

O campo vetorial densidade de corrente \vec{J} e o campo escalar densidade de cargas ρ estão intimamente relacionados. Para sabermos como, temos de introduzir um princípio (ou postulado): carga elétrica é conservada. Considere uma carga total Q saindo (ou entrando) de uma região de volume V , na forma de uma corrente $I = dQ/dt$. Considere uma superfície fechada, de área A , contendo o volume V . A carga $dQ = \rho dV$ que sai desse volume V precisa atravessar a superfície A que o contém, como mostrado na Figura 3.1b. Assim, usando a definição de corrente elétrica e o princípio da conservação da carga (ou da corrente) elétrica,

temos

$$I = \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (3.18)$$

O sinal negativa indica que a carga está saindo da região. Podemos usar o teorema de Gauss (2.34) para passar a integral na superfície A para a integral no volume V contido dentro desta superfície A :

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (3.19)$$

Esta última equação é conhecida por **equação da continuidade**. Ela relaciona a variação temporal do campo escalar densidade de carga ρ com a variação espacial (divergente) do campo vetorial densidade de corrente \vec{J} . Ela afirma (localmente) **a conservação da carga: a carga que sai de uma região, sai na forma de uma corrente**.

3.5 Casos de estudos

Consideremos aqui uma corrente elétrica em um fio retilíneo cujo comprimento é bem maior que o seu diâmetro. Como cargas elétricas em movimento percebem os campos elétricos que elas criam? Como uma carga teste, externa a um fio conduzindo uma corrente elétrica, em repouso ou em movimento vê tudo isso?

3.5.1 Corrente em um fio

Esta seção é uma tradução livre da Seção 5.9 da Ref. [1]. Considere a Figura 3.2, onde temos um fio retilíneo (infinito) conduzindo uma corrente I . Despreza a espessura do fio. Note que a corrente elétrica é no sentido inverso da velocidade \vec{u} dos elétrons, devido à carga negativa dos elétrons. O referencial inercial \mathcal{O} é solidário ao fio. Na Figura 3.2, os elétrons (livres) são representados pelo pontos azuis e os íons positivos (fixos) são representados por pontos vermelhos. Essa representação é super-simplificada, pois elétrons são entidades do mundo quântico (subatômico). O referencial inercial \mathcal{O}' é solidário aos elétrons (pontos azuis) na corrente elétrica, os quais possuem uma velocidade \vec{u} (uniforme) em relação ao referencial \mathcal{O} . Temos também uma carga teste q a uma distância r deste fio condutor. O referencial inercial (instantaneamente) \mathcal{O}'' é solidário à carga teste. Esta carga teste possui uma velocidade \vec{v} em relação ao referencial \mathcal{O} .

Estamos falando de velocidades de correntes num fio condutor. Mesmo a carga teste, colocada aqui de forma isolada, na prática é parte de outra corrente elétrica, em outro fio condutor. Mas qual é mesmo a ordem de grandeza destas velocidades? Para uma excelente

analogia exibindo o conceito de velocidade dos elétrons numa corrente elétrica, entre [aqui](#). Também [veja esta](#) divertida animação, bem como [esta outra](#). Estaremos considerando aqui a velocidade de sinais. Desta forma, u e v são próximas à velocidade da luz c .

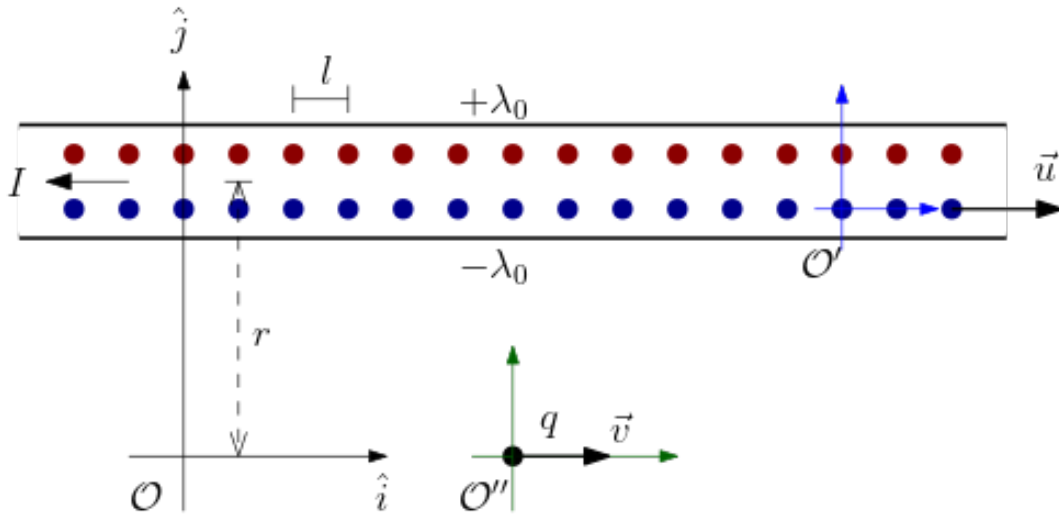


Figura 3.2: Carga teste q em movimento numa vizinhança de um fio infinito com uma corrente elétrica I . O referencial inercial \mathcal{O} é solidário ao fio. O referencial inercial \mathcal{O}' é solidário (instantaneamente) à carga teste. O referencial inercial \mathcal{O}'' é solidário aos elétrons (pontos azuis) na corrente elétrica I . Os íons (pontos vermelhos) estão fixos no fio.

Temos três referenciais inerciais na Figura 3.2 com velocidades relativas comparáveis à velocidade da luz. Em cada referencial, temos experimentalistas que realizam experimentos cuidadosos. Imagine você que a natureza possui regras para que as informações destes experimentalistas sejam traçadas entre eles. Estas regras fazem parte das previsões, totalmente inesperadas, da teoria da Relatividade Especial (RE) de Einstein.

Momento Relatividade Especial 0. *A troca de informações entre referenciais inerciais deve ser feita através das Transformações de Lorentz da Relatividade Especial.*

As Transformações de Lorentz (TL) da RE garantem que as informações anotadas num referencial sejam passadas corretamente para outro referencial inercial. As TL atuam com um decodificador de informações. No caso de um mesmo experimento sendo realizado em dois referenciais inerciais, o nosso e um outro, se pudéssemos simplesmente pegar as informações do outro referencial para comparar com as nossas informações, verificaríamos que elas são diferentes. Após transformarmos, via as TL, as informações do outro referencial é que verificaremos uma completa concordância. Em particular, como temos densidades lineares de cargas no fio, carga por comprimento, precisamos saber como as TL processa informações sobre comprimentos entre referenciais inerciais.

Momento Relatividade Especial 1. *A Relatividades Especial de Einstein estabelece que o comprimento (próprio) L medido na direção do movimento em um referencial inercial em*

movimento deve ser interpretado no outro referencial como sendo menor pelo fator $1/\gamma_v$, isto é, vemos o comprimento L em movimento como L/γ_v , onde

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_v^2}}, \quad \beta_v = \frac{v}{c}, \quad (3.20)$$

e v é a intensidade da velocidade relativa entre esses dois referenciais inerciais e c é a velocidade da luz no vácuo. Este efeito é conhecido por **contração espacial**.

Regra: o comprimento próprio, visto em movimento, é sempre o menor. Essa contração espacial afeta as densidades lineares (carga por comprimento). Menor a distância vista entre cargas, maior a densidade linear. Assim, toda densidade linear vista em movimento será maior, aumentada pelo fator γ .

A densidade linear de cargas positivas (íons, fixos, pontos vermelhos) no fio é λ_0 . Sendo o fio um condutor neutro, a densidade de cargas negativas (elétrons, em movimento, pontos azuis) precisa ser $-\lambda_0$. Portanto, no referencial inercial \mathcal{O} , solidário ao fio, não há campo elétrico (\vec{E}) na região externa ao fio, como podemos concluir aplicando a lei de Gauss, pois a carga interna à superfície gaussiana (SG), um cilindro de raio concêntrico com o fio, é nula. Isto significa que se a carga teste estiver em **repouso**, ela não sentirá qualquer força. Mas o que acontecerá com a carga teste caso ela esteja em **movimento**?

Antes, porém, vejamos como é a densidade linear de cargas eletrônicas (negativas) no referencial \mathcal{O}' , solidário aos elétrons. No nosso referencial, segundo o Momento Relatividade Especial 1, a densidade linear eletrônica medida no referencial \mathcal{O}' deve ser vista no referencial \mathcal{O} aumentada pelo fator γ_u , onde u é a intensidade da velocidade relativa $\vec{u} = u\hat{i}$ do referencial \mathcal{O}' em relação ao nosso referencial \mathcal{O} . No entanto, já denominamos esta densidade no nosso referencial por $-\lambda_0$. Assim, a densidade eletrônica no referencial \mathcal{O}' precisa ser

$$\lambda'_- = -\lambda_0/\gamma_u \quad (3.21)$$

para, ao ser multiplicada por γ_u , obtermos $-\lambda_0$. Afinal é $-\lambda_0$ que medimos no nosso referencial \mathcal{O} . O fator relativístico γ_u é dado em (3.20) substituindo v por u .

Suponha agora que a carga teste q esteja se movimentando em relação ao fio, com velocidade \vec{v} , digamos ao longo do eixo horizontal do referencial inercial \mathcal{O} (solidário ao fio), isto é, $\vec{v} = v\hat{i}$. No referencial \mathcal{O}'' (solidário à carga teste), é o fio que está em movimento no sentido oposto, com velocidade $-\vec{v}$, como podemos observar na Figura 3.2. Como um observador no referencial \mathcal{O}'' vê as densidades lineares positiva (íons) e negativa (elétrons)? Novamente, segundo o Momento Relatividade Especial 1, a contração espacial faz com que a densidade linear positiva medida no referencial \mathcal{O} seja multiplicada pelo fator γ_v ao ser

transcrita para o referencial \mathcal{O}'' ,

$$\lambda_+'' = \gamma_v \lambda_0. \quad (3.22)$$

De forma semelhante, no referencial \mathcal{O}'' , a densidade linear negativa medida no referencial \mathcal{O}' dos elétrons é multiplicada pelo fator γ_w ,

$$\lambda_-'' = \gamma_w \lambda_-' = -\lambda_0 \gamma_w / \gamma_u, \quad (3.23)$$

onde w é a intensidade da velocidade relativa \vec{w} dos elétrons em relação ao referencial \mathcal{O}'' solidário à carga teste q . O fator relativístico γ_w é dado em (3.20) substituindo v por w . Devido ao movimento do fio em relação ao referencial \mathcal{O}'' , esta velocidade relativa \vec{w} dos elétrons em relação ao referencial \mathcal{O}'' é uma composição das velocidades relativas $-\vec{v}$ (do fio) e \vec{u} (dos elétrons). Classicamente teríamos $\vec{u} - \vec{v}$, mas para intensidades comparáveis à rapidez da luz, esta regra de composição clássica é alterada pela Relatividade Especial.

Momento Relatividade Especial 2. A regra de composição de velocidades na Relatividade Especial, aplicada aos referenciais que estamos considerando, é

$$\beta_w = \frac{\beta_u - \beta_v}{1 - \beta_u \beta_v}, \quad (3.24)$$

para $-\vec{v}$ e \vec{u} em sentidos opostos, e

$$\beta_w = \frac{\beta_u + \beta_v}{1 + \beta_u \beta_v}, \quad (3.25)$$

com \vec{v} e \vec{u} no mesmo sentido (positivo), onde

$$\beta_w = \frac{w}{c}, \quad \beta_v = \frac{v}{c}, \quad \beta_u = \frac{u}{c}. \quad (3.26)$$

Vale observar que estas leis de composição de velocidades relativísticas obedece o princípio que a velocidade da luz é uma constante universal. Mesmo que v e u sejam iguais à velocidade da luz, a composição (3.25) dará $w = c$ (verifique). Nenhuma velocidade pode ultrapassar a velocidade da luz. Interessante também observar que o fator relativístico γ_w correspondente à velocidade composta w tem a seguinte propriedade (verifique):

$$\gamma_w = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_w^2}} = (1 - \beta_u \beta_v) \gamma_u \gamma_v. \quad (3.27)$$

Substituindo o fator relativístico (3.27) na densidade eletrônica (3.23), lida no referencial \mathcal{O}'' da carga teste, é (verifique)

$$\lambda_-'' = -(1 - \beta_u \beta_v) \gamma_v \lambda_0 = -\gamma_v \lambda_0 + \beta_u \beta_v \gamma_v \lambda_0. \quad (3.28)$$

Desta forma, a densidade eletrônica total vista pela carga teste, a soma das densidades (3.22) e (3.28), não é mais nula,

$$\lambda'' = \lambda''_- + \lambda''_+ = \lambda_0 \beta_u \beta_v \gamma_v. \quad (3.29)$$

Este resultado destaca duas características marcantes: (1) a carga teste vê uma densidade linear de cargas não-nula em seu referencial e (2) somente se ela (ou o fio) estiver em movimento, $v \neq 0$ e $u \neq 0$. Se a carga teste vê uma carga elétrica, então estará sujeita a uma força elétrica. **Concluimos que, devido à Relatividade Especial, a carga teste em movimento sente a presença de um campo elétrico e, conseqüentemente, uma força elétrica.**

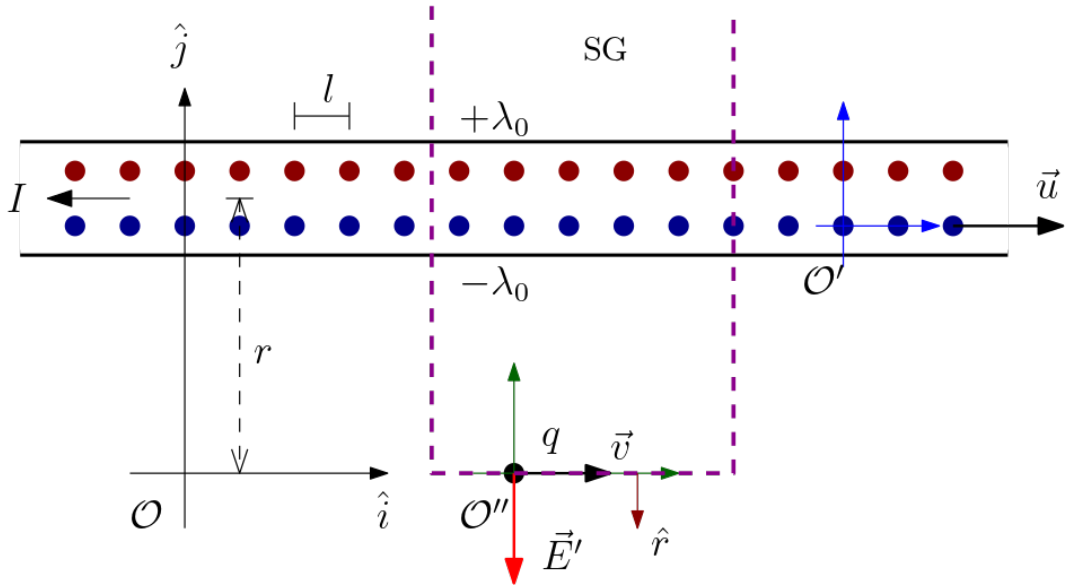


Figura 3.3: Carga teste q em movimento numa vizinhança de um fio infinito com uma corrente elétrica I . O referencial inercial \mathcal{O}'' é solidário (instantaneamente) à carga teste. A superfície gaussiana CG é uma casca cilíndrica de raio r com o versor \hat{r} normal à superfície lateral.

O campo elétrico na posição da carga teste é o mesmo de um fio infinito com a densidade linear λ'' dada em (3.29), com simetria cilíndrica. Assim, escolhendo como superfície gaussiana uma casca cilíndrica de raio r , centrada no fio, como mostrado na Figura 3.3, podemos usar o resultado encontrado em (2.78),

$$\vec{E}'' = E''_r(r) \hat{r}, \quad E''_r(r) = \frac{2\lambda'' C_e}{r}. \quad (3.30)$$

Esse é o campo elétrico sentido pela carga teste (em movimento) em seu próprio referencial. Vale sempre lembrar que este campo elétrico é diretamente proporcional à velocidade da

carga teste. Se tem campo elétrico, tem força elétrica. A força elétrica correspondente é

$$\vec{F}'' = q \vec{E}'' = F_r'' \hat{r}, \quad F_r''(r) = 2q\lambda_0 C_e \gamma_v \beta_v \beta_u / r, \quad r > 0. \quad (3.31)$$

Note que é uma força dependente da velocidade e perpendicular à velocidade da carga teste, a característica principal de uma força magnética. Melhor expressarmos esta força em coordenadas cartesianas. Na posição da carga teste temos $\hat{r} = -\hat{j}$. Assim, em coordenadas cartesianas, temos

$$\vec{F}'' = F_y'' \hat{j}, \quad F_y'' = -2q\lambda_0 C_e \gamma_v \beta_v \beta_u / r, \quad r > 0. \quad (3.32)$$

Como esta força é vista no nosso referencial \mathcal{O} ?

Momento Relatividade Especial 3. A Relatividade Especial de Einstein prevê uma contração das componentes de forças perpendiculares à direção do movimento. Apenas as componentes perpendiculares à direção do movimento relativo entre referenciais inerciais sofrem uma contração pelo fator relativístico. Como regra, forças vistas em movimento têm suas componentes perpendiculares reduzidas pelo fator γ_v , onde v é a rapidez do movimento relativo.

Como a força elétrica (3.32) na carga teste é perpendicular ao movimento relativo entre os referenciais \mathcal{O} e \mathcal{O}'' , desta forma, de acordo com o Momento Relatividade Especial 3, a força elétrica (3.32) transcrita do referencial \mathcal{O}'' para o referencial \mathcal{O} tem sua componente F_y'' diminuída pelo fator relativístico γ_v ,

$$F_y = F_y'' / \gamma = -\frac{2q\lambda_0 C_e}{r} \beta_u \beta_v = 2 \frac{C_e}{c^2} q \frac{vI}{r} = 2C_m q \frac{vI}{r}, \quad (3.33)$$

onde introduzimos a corrente elétrica

$$I = -\lambda_0 u = -c\lambda_0 \beta_u, \quad (3.34)$$

e a constante magnética via a velocidade da luz, $c^2 = C_e / C_m$ (verifique). Este resultado em (3.33) pode ser reescrito numa forma vetorial mais interessante (verifique),

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{v} = v \hat{i}, \quad \vec{B} = -2C_m \frac{I}{r} \hat{k}, \quad (3.35)$$

onde introduzimos o vetor \vec{B} , o qual é campo magnético produzido pela corrente I (como veremos mais adiante). A força em (3.35) é a parte magnética da força de Lorentz. Isto significa que cargas em movimento (correntes) são fontes de campos magnéticos. A Figura 3.4 exhibe os vetores presentes em (3.35) e suas orientações relativas ao fio conduzindo a corrente I . Observe a regra da mão direita no canto superior esquerdo amarrando as direções e

orientações do campo magnético e corrente.

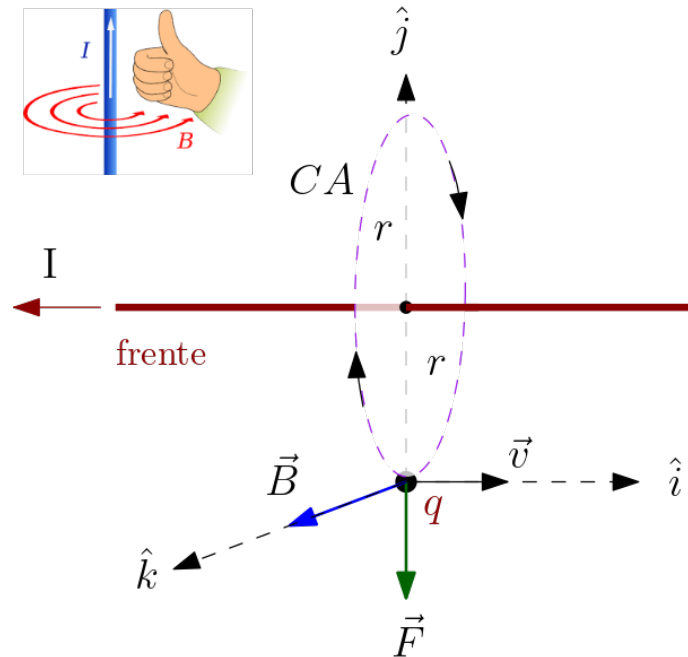


Figura 3.4: Força (Lorentz) \vec{F} na carga teste q (velocidade \vec{v}), devida ao campo magnético \vec{B} criado pela corrente elétrica I em um fio infinito (paralelo ao versor \hat{i}). CA é uma circunferência de raio r , centrada no fio e perpendicular a ele.

A Figura 3.4 mostra a corrente I no fio retilíneo (paralelo ao versor \hat{i}), a qual cria o campo magnético \vec{B} tangente à circunferência imaginária CA (curva amperiana) de raio r (contida no plano dos versores \hat{j} e \hat{k}). O sentido do vetor campo magnético é dado pela regra da mão direita: o dedão indica o sentido da corrente e o indicador indica o sentido do campo magnético, num movimento de rotação em torno do dedão. Este campo magnético atua na carga teste q , produzindo nela a força de Lorentz \vec{F} dada em (3.35).

Esse exercício mostra como uma carga elétrica em movimento produz uma força, dependente da velocidade, noutra carga elétrica também em movimento. Este resultado surpreendente resulta tomando a Relatividade Especial como correta. Este resultado tem sido confirmado experimentalmente através da observação de uma força entre duas correntes elétricas.

Note em todas as expressões anteriores que a carga teste q é sempre a mesma, ou seja, estamos escrevendo q para representar a carga teste em qualquer um destes referenciais. Podemos fazer graças à Relatividade Especial.

Momento Relatividade Especial 4. A carga elétrica não é afetada pela Relatividade Especial. A carga elétrica é um invariante relativístico.

Capítulo 4

Indução

4.1 Introdução

Vimos na Seção 3.5.1, usando a Relatividade Especial, como cargas elétricas em movimento (corrente elétrica) gera (induz) um campo magnético em sua vizinhança. Do ponto de vista prático, este campo magnético produzido por uma corrente elétrica gera uma força numa carga elétrica teste em movimento que pode ser verificada experimentalmente. Essa força é idêntica à força de Lorentz, já conhecida experimentalmente usando ímãs para gerar campos magnéticos ao invés de correntes elétricas. Do ponto de vista da Relatividade Especial, se uma carga elétrica em movimento, portanto um campo elétrico variando no tempo, gera um campo magnético, então um campo magnético variando no tempo deve gerar um campo elétrico. Em suma, **no fenômeno da indução, um campo de um tipo (elétrico ou magnético) variando induz o surgimento de um outro tipo de campo (magnético ou elétrico)**. Esse fenômeno da indução é um efeito relativístico. As relações entre campos variando e campos induzidos estão contidas nas duas últimas equações de Maxwell.

Vamos contextualizar. Maxwell apresentou suas equações em 1861. Einstein nos apresentou a Relatividade Especial somente em 1905. Portanto, o fenômeno da indução foi descoberto experimentalmente antes da Relatividade Especial. De fato, os efeitos da indução eletromagnética foram verificados experimentalmente, de forma magistral, por Ampère em 1820 e por Faraday em 1821. Embora os efeitos elétricos e magnéticos fossem conhecidos, separadamente, há milênios, coube a Ampère e Faraday mostrar suas inter-relações pela primeira vez. A Relatividade Especial reforçou estas inter-relações.

4.2 Ampère

Oersted, em sala de aula, descobriu experimentalmente em 1820 que um fio transportando uma corrente elétrica produzia um campo magnético. Ele usou uma bússola para identificar (após três anos) que este campo magnético era circular ao fio, como vimos na Seção 3.5.1. Na época, definia-se campo magnético pela interação com uma bússola. Ímãs eram conhecidos há muito tempo e interagem com bússolas (contendo também um ímã). Este experimento de Oersted mostrou pela primeira vez uma relação explícita entre os fenômenos elétricos (corrente) e magnéticos (ímãs). Uma simulação desse experimento pode ser vista [aqui](#).

Ampère nasceu em uma família rica e teve sua educação inteiramente em sua casa. Tornou-se professor de Matemática, Física e Química. Ainda em 1820 tomou conhecimento do experimento de Oersted e se dedicou a ele com tanto afinco ao ponto de traduzi-lo matematicamente no que chamamos hoje de “lei de Ampère”, corretíssima para correntes estáticas. Infelizmente ele não registrou seus passos nesta empreitada, publicou apenas seus resultados (de forma completa em 1826, um ano antes de sua morte). Ampère chegou a conjecturar cargas elétricas em movimento como a origem de campos magnéticos, quase um século antes do advento da Teoria da Relatividade Especial. Mais detalhes sobre Ampère podem ser obtidos [aqui](#).

4.2.1 A lei de Ampère

Ampère foi capaz de mostrar que a circulação do campo magnético \vec{B} de uma corrente elétrica I (estática; que não varia no tempo) em um fio retilíneo, circulação em torno desse fio, é proporcional à corrente elétrica que ele transporta:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi C_m I, \quad C_m = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (4.1)$$

Este resultado é válido sempre e é conhecido por lei de Ampère, o análogo à lei de Gauss para o campo elétrico. A curva fechada sobre a qual a circulação é calculada é a “curva amperiana” (CA), ilustrada na Figura 3.4. Note também nesta mesma figura o uso da regra da mão direita para identificar o sentido da corrente com o dedão e o sentido do campo magnético com o indicador (e demais). Na Figura 3.4, o campo magnético de uma corrente (estática) em um fio retilíneo é tangente à curva amperiana CA. Como a lei de Gauss, a lei de Ampère é muito útil em situações onde há simetrias.

Exercício 5. *Como ao usar a lei de Gauss, use argumentos de simetria e a lei de Ampère para obter o campo magnético produzido por uma corrente I (estática) em um fio retilíneo.*

4.2.2 Terceira equação de Maxwell

Usando o Teorema 2, podemos estabelecer uma versão local para a lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = 4\pi C_m I = 4\pi C_m \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a} \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi C_m \vec{J}, \quad (4.2)$$

onde o campo vetorial densidade de corrente \vec{J} foi introduzido na Seção 3.4. Maxwell em 1861 notou que este resultado é compatível com a equação da continuidade (3.19) somente para campos estáticos (independentes do tempo), pois (verifique)

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi C_m \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -4\pi C_m \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.3)$$

onde ρ é a densidade de cargas elétricas (dependente da posição e do tempo). A primeira igualdade é válida sempre, pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ para qualquer campo vetorial \vec{F} . Desta forma, Maxwell “corrigiu” a lei de Ampère (local) para

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi C_m \vec{J} + \frac{C_m}{C_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

ou, usando $c^2 = C_e/C_m$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi C_m \vec{J}, \quad (4.5)$$

obtendo assim a **terceira equação de Maxwell**. Note que a variação espacial do campo magnético está relacionada com a variação temporal do campo elétrico. É um campo induzindo outro.

Maxwell fez uma descoberta ainda maior: **a conservação da carga expressa na equação da continuidade (3.19) é uma consequência das leis do Eletromagnetismo**. De fato, basta aplicar o divergente na lei de Ampère (4.5) e usar as demais equações de Maxwell para reobtermos a equação da continuidade (3.19), como feito em (4.3).

Exercício 6. Aplique o divergente na terceira equação de Maxwell e mostre que ela é consistente com a primeira equação de Maxwell e com a equação da continuidade (3.19).

4.3 Faraday

4.3.1 Introdução

Logo após a descoberta de Oersted de 1820 (relatada na seção anterior), Faraday também se dedicou ao assunto. Ao contrário de seu contemporâneo Ampère, Faraday nunca teve

educação formal, substituída pela necessidade de trabalhar desde muito cedo. No entanto isso não o impediu de obter conhecimentos por si mesmo, iniciando em Química e terminando no Eletromagnetismo, proporcionando-lhe títulos honorários e várias premiações, além de uma posição como Professor. Iniciando em 1821, Faraday meticulosamente realizou uma série de experimentos sobre eletricidade e magnetismo (inspirado por Oersted e, principalmente, por Ampère) que resultou na indução eletromagnética, base para a geração de energia elétrica a partir de movimento mecânico (usina hidrelétrica). Recomendo a leitura da Seção 7.1 de Purcell-Morin [1] para perceber a genialidade de Faraday na realização de seus experimentos e conclusões estabelecidas. A grandeza de Faraday aumenta ainda mais se levarmos em conta que suas conclusões foram obtidas apenas com base experimental, sem o embasamento matemático familiar a Ampère.

4.3.2 Experimentos

A simulação mostrada [aqui](#) ilustra as conclusões de Faraday. Segure e arraste o ímã (aquele com as quatro setas indicadoras de movimento) e introduza-o dentro da bobina (fio enrolado na forma circular; espiras) para induzir uma corrente elétrica no fio (que acenderá uma lâmpada). O sentido e a intensidade da corrente elétrica induzida são indicados pelo medidor de tensão (volts). Note que é necessário haver movimento do ímã (fonte de campo magnético) para induzir uma corrente elétrica no fio. Quanto mais rápido, maior a corrente. Note que invertendo o sentido do movimento do ímã, inverte-se também o sentido da corrente. Experimente.

Experimente também com o item “Linhas de campo” ligado, para visualizar as linhas de campo (do campo magnético criado pelo ímã). Essas linhas de campo foram inventadas por Faraday, mesmo sem ter os devidos conhecimentos matemáticos sobre campos vetoriais. Experimente também com uma bobina com menos espiras: quanto mais espiras, maior a intensidade da corrente.

Lei de Faraday: a corrente induzida no fio depende diretamente da variação do fluxo do campo magnético. Faraday que não tinha conhecimentos de campos vetoriais, inventou suas “linhas de campo” para chegar a esta conclusão.

4.3.3 Quarta equação de Maxwell

Maxwell (1861) usou os experimentos de Faraday e deu a eles uma interpretação matemática. Para criar a corrente no fio é necessário uma força agindo nos portadores de carga. Seja uma carga q submetida a uma força \vec{F} , movimentando-se ao longo de uma curva C . Então podemos introduzir um campo elétrico: $\vec{E} = \vec{F}/q$. Denominemos de “força eletromotriz”,

por razões históricas, o trabalho por unidade de carga,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (4.6)$$

onde $d\vec{r}$ é o deslocamento infinitesimal tangente à trajetória C da carga q . Note que \mathcal{E} é um escalar e não um vetor (necessário para ser uma força) com dimensões de energia por unidade de carga, portanto as mesmas dimensões de potencial elétrico. A “força eletromotriz” é um potencial elétrico (tensão). Segundo Maxwell, a lei de Faraday pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (4.7)$$

onde Φ é o fluxo do campo magnético \vec{B} através da superfície de área A , apoiada em um contorno C por onde movimentam os portadores de carga. Em geral a curva C , representando a trajetória da carga q , é uma curva praticamente fechada, moldada por um fio condutor, como os anéis de uma bobina, como mostrado na Figura 4.1a. Verbalizando a Eq. (4.7), a lei de Faraday estabelece que a variação do fluxo de um campo magnético induz uma corrente elétrica em uma bobina.

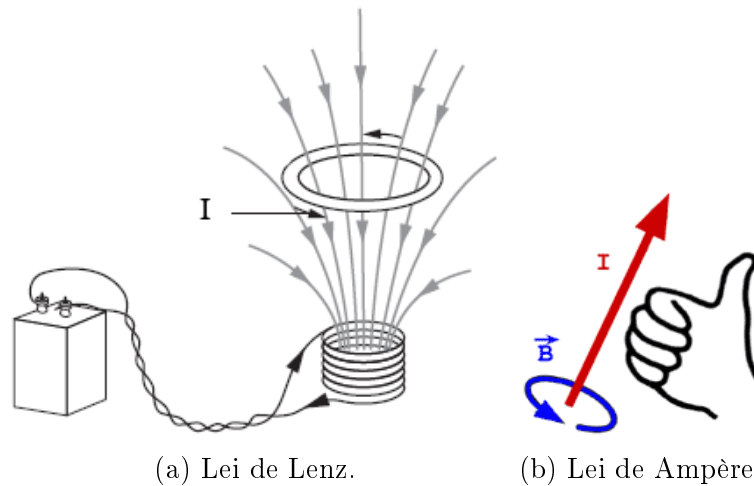


Figura 4.1: Anel condutor caindo num campo magnético (fixo). Uma corrente I é estabelecida para compensar a variação do fluxo pelo anel.

Desta vez o sinal negativo na lei de Faraday (4.7) não é uma simples escolha, mas uma exigência experimental. Usando a lei de Ampère, esta corrente induzida cria um campo magnético (de simetria circular) em torno do fio sempre no sentido de compensar (graças ao sinal negativo) a variação do fluxo do campo magnético externo. A Figura 4.1a ilustra essa interpretação, conhecida por lei de Lenz. Nesta figura, um campo magnético (não uniforme

especialmente) é criado pelas bobinas ligadas a um gerador de corrente, de acordo com a lei de Ampère. Uma outra bobina circular (anel) é permitida se movimentar (na direção vertical) na presença deste campo magnético, variando o fluxo no seu interior. Quanto mais densa a região em termos de linhas de campo, mais intenso é o campo. Assim, esse campo magnético é mais intenso na região próximas às bobinas que o criaram. Quando o anel se aproxima da região onde o campo é mais intenso, o fluxo através dele aumenta. Segundo a lei de Lenz, uma corrente será induzida nesse anel no sentido de criar outro campo magnético que irá compensar esse aumento do fluxo do campo magnético original. Por isso o sentido da corrente induzida I indicado nessa figura. Veja na Figura 4.1b a “regra da mão-direita” para determinar o sentido do campo criado pela lei de Ampère.

Usando o Teorema 2, podemos estabelecer uma versão local para a lei de Faraday,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}, \quad (4.8)$$

onde a superfície de área A está inteiramente apoiada no contorno C . Esta condição produz a [quarta equação de Maxwell](#),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (4.9)$$

Vale lembrar que um campo elétrico dependente do tempo não produz um trabalho nulo numa trajetória fechada (ou seja, se for dependente do tempo, não será conservativo). Note que a variação temporal de um campo magnético induz a variação espacial de um campo elétrico. É um campo induzindo o surgimento de outro.

Exercício 7. Aplique o divergente na quarta equação de Maxwell e obtenha a segunda equação de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

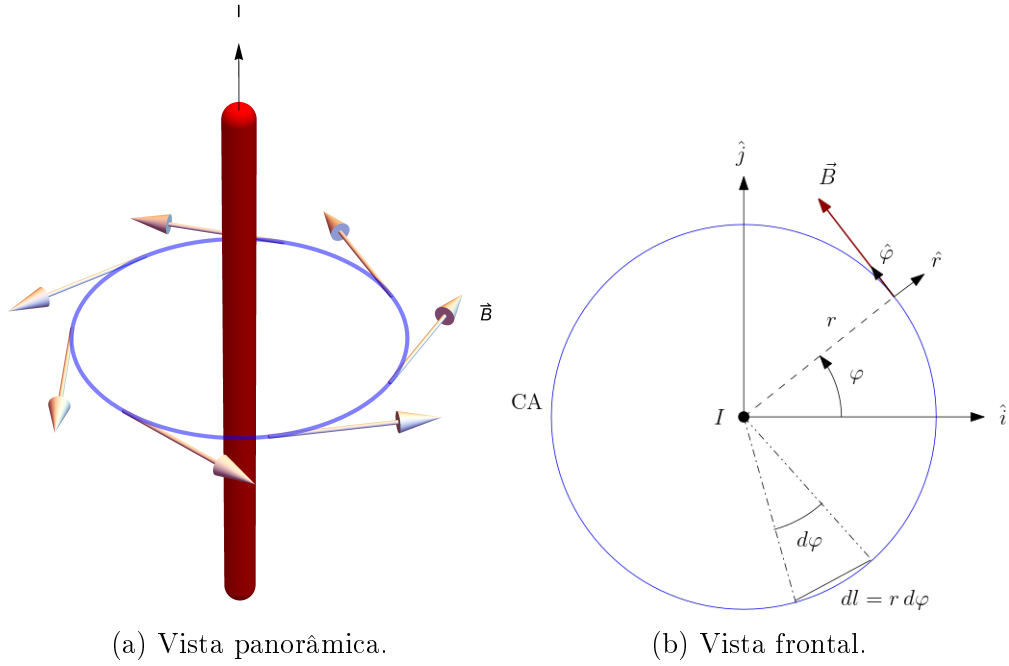
Exercício 8. Reobtenha a lei de Faraday a partir da variação do fluxo do campo magnético. Use também a quarta equação de Maxwell.

4.4 Casos de estudos

4.4.1 Fio

A Figura 4.2a mostra um fio (parte dele) conduzindo uma corrente I (estática). O campo magnético \vec{B} criado por esta corrente é perpendicular ao fio e tangente à curva amperiana CA, uma circunferência de raio r . O campo magnético é tangente à curva amperiana CA,

$$\vec{B} = B_\varphi \hat{\varphi}. \quad (4.10)$$



(a) Vista panorâmica.

(b) Vista frontal.

Figura 4.2: Fio conduzindo uma corrente I . O campo magnético \vec{B} é tangente a uma circunferência perpendicularmente centrada no fio. A curva amperiana é uma circunferência de raio r .

Por simetria espera-se que a componente tangencial $B_\varphi(r)$ dependa apenas da distância radial r . O sistema de coordenadas cilíndricas é o mais adequado, com o eixo Z ao longo do fio (retilíneo), como mostrado na Figura 4.2b.

De acordo com a lei de Ampère (4.1), a circuitação do campo magnético ao longo da curva amperiana CA, para a qual

$$\vec{dl} = dl \hat{\varphi}, \quad dl = r d\varphi, \quad (4.11)$$

fornece,

$$\int_{CA} \vec{B} \cdot \vec{dl} = B_\varphi r \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi r B_\varphi = 4\pi C_m I \implies B_\varphi(r) = \frac{2C_m I}{r}. \quad (4.12)$$

Esse é o mesmo valor do campo magnético obtido na Sec. 3.5.1 com o auxílio da Relatividade Especial.

O potencial vetor do campo magnético foi introduzido na Sec. 3.3.1. Queremos encontrar o potencial vetor \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Devida à simetria cilíndrica do fio (retilíneo), melhor usar coordenadas cilíndricas,

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}. \quad (4.13)$$

Também devido à esta simetria, esperamos que este potencial vetor não dependa da coor-

denada z (ao longo do fio) e nem da coordenada angular φ ; cada componente do potencial vetor deve ser função somente da coordenada radial r , $A_{r,\varphi,z} = A_{r,\varphi,z}(r)$. Sabemos que o campo magnético está inteiramente na direção tangencial (direção de $\hat{\varphi}$). Assim,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\varphi} = \vec{B} = 2C_m \frac{I}{r} \hat{\varphi}. \quad (4.14)$$

Desta forma, temos

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = 2C_m \frac{I}{r} \implies A_z(r) = -2C_m I \ln r + cte. \quad (4.15)$$

O potencial vetor está ao longo do fio, $\vec{A} = A_z \hat{k}$, no sentido contrário à corrente I .

Vale ressaltar que não podemos fazer $r = 0$, nem para o campo magnético, nem para o potencial vetor, pois o fio tem um diâmetro, pequeno, mas tem. Dentro do fio, o cenário é outro.

Note que a condição $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ não determina completamente o potencial vetor (4.13). Determinamos apenas a componente A_z . Até aqui temos a liberdade de escolher as demais componentes como sendo nulas.

4.4.2 Placas

4.4.2.1 Uma placa estática

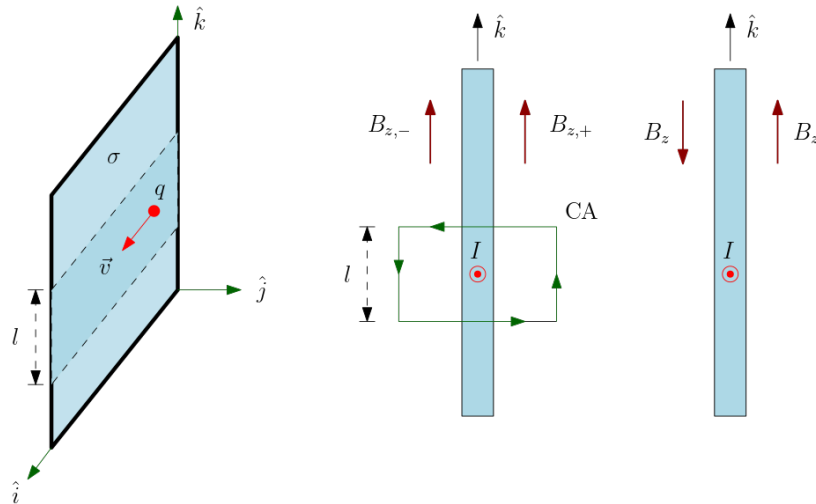


Figura 4.3: Corrente fluindo em uma placa infinita. A curva amperiana (CA) é um retângulo perpendicular à placa.

A Figura 4.3 mostra uma placa conduzindo uma corrente elétrica estática ao longo do eixo X . Apenas uma parte desta placa é mostrada, mas a placa é infinita. Seja $J > 0$ a

intensidade do vetor densidade de corrente, $\vec{J} = J\hat{i}$. A corrente é o fluxo desta densidade de corrente, como definido em (3.17). Esta densidade de corrente é constante na seção reta de área $l\delta$, onde δ é a espessura da placa e l a largura da região destacada na Figura 4.3. Desta forma, a corrente nesta faixa destacada é

$$I = l\delta J = \mathcal{J}l, \quad \mathcal{J} = \delta J, \quad (4.16)$$

onde \mathcal{J} é denominada de densidade superficial de corrente. O fragmento de reta de comprimento l é a “área” pela qual a densidade superficial de corrente \mathcal{J} atravessa, da mesma forma que a área $l\delta$ é área pela qual a densidade (volumétrica) de corrente J atravessa. A densidade (volumétrica) de corrente \vec{J} vive em 3D. A densidade (superficial) de corrente $\vec{\mathcal{J}}$ vive em 2D.

Como são placas infinitas, espera-se que os campos magnéticos, de um lado e do outro, sejam paralelos à placa e perpendicular à corrente. Podemos imaginar a placa formada por infinitos fios paralelos. O campo magnético de cada fio é perpendicular ao fio. Assim, o campo magnético dessa placa será perpendicular à corrente. **Informação extra: a componente do campo magnético perpendicular a uma superfície transportando uma corrente estática é contínua, enquanto a componente tangencial é descontínua e proporcional à densidade (superficial) de corrente.** Isto obriga o campo magnético a mudar de sentido ao passarmos de um lado da placa para o outro. Como a componente perpendicular é contínua, ela não pode mudar o seu sentido. Portanto a componente perpendicular desse campo magnético deve ser nula.

Usando a curva amperiana CA mostrada no centro da Figura 4.3, a lei de Ampère (4.1) fornece (verifique)

$$B_{z+}l - B_{z-}l = 4\pi C_m I = 4\pi C_m \mathcal{J}l \implies B_{z+} - B_{z-} = 4\pi C_m \mathcal{J}. \quad (4.17)$$

Por simetria, como o espaço dos dois lados da placa é o mesmo e não existem outros campos magnéticos, as intensidades destes dois campos devem ser idênticas. Assim,

$$B_z = B_{z+} = -B_{z-} = 2\pi C_m \mathcal{J}, \quad B_z > 0. \quad (4.18)$$

Note no lado direito da Figura 4.3 que vale uma regra da mão direita se “perfurarmos” a placa para movimentar a mão. Este resultado mostra que a componente do campo magnético paralela a uma superfície condutora e perpendicular à densidade de corrente fluindo nesta superfície é descontínua e proporcional a esta densidade de corrente. No caso do campo elétrico, é a componente perpendicular à superfície condutora que é descontínua (e proporcional à densidade superficial de cargas).

4.4.2.2 Duas placas estáticas

A Figura 4.4 mostra duas placas infinitas transportando correntes opostas de mesma intensidade. De acordo com a seção anterior, os campos magnéticos de cada placa têm as mesmas intensidades e sentidos opostos. As cores (traços) especificam os campos de cada placa. Note que o campo de uma placa está presente em todo o espaço de cada lado. O campo magnético resultante é a soma desses dos campos magnéticos de cada placa. Podemos ver que estes campos somam-se no interior entre elas e cancelam-se nas regiões externas. Assim, no interior das placas, de acordo com (4.18), a intensidade do campo magnético é

$$B_{ze} = 2B_z = 4\pi C_m \mathcal{J}. \quad (4.19)$$

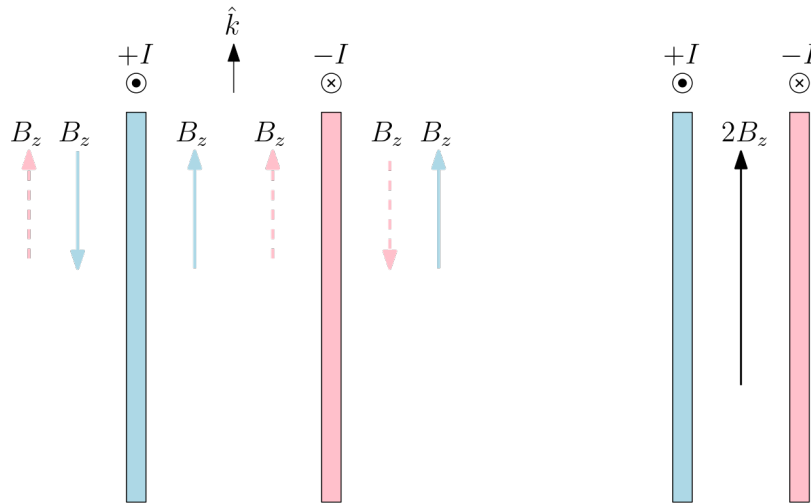


Figura 4.4: Correntes fluindo, em sentidos opostos, em duas placas paralelas infinitas e respectivos campos magnéticos no lado esquerdo e o campo resultante no lado direito.

Sim, esse sistema é também um capacitor de placas paralelas, apresentado no Apêndice B.2. Então há também um campo elétrico entre as placas. No entanto, campos elétricos são de natureza distinta dos campos magnéticos. Não podemos somar campos elétricos e magnéticos. Eles têm dimensões diferentes. Seria como somar posição e tempo. Por outro lado, campos elétricos e magnéticos estáticos não interagem entre si.

4.4.2.3 Duas placas em movimento

Imagine agora duas placas infinitas, próximas, carregadas com cargas opostas, com densidades superficiais $\pm\sigma$, em movimento ao longo do eixo X com velocidade $\vec{v} = v_x \hat{i}$ medida no referencial inercial \mathcal{O} . Este sistema forma um capacitor (ideal) de placas paralelas, um dispositivo eletrônico apresentado no Apêndice B.2. Desta forma, no referencial inercial \mathcal{O} ,

temos um campo elétrico

$$\vec{E} = E_y \hat{j}, \quad E_y = 4\pi C_e \sigma, \quad (4.20)$$

constante, perpendicular às placas, no sentido da placa positiva para a placa negativa. Com as placas em movimento, temos uma densidade superficial de corrente $\mathcal{J} = \sigma v_x$ em cada placa (em sentidos opostos) e, naturalmente, um campo magnético

$$\vec{B} = B_z \hat{k}, \quad B_z = 4\pi C_m \mathcal{J} = 4\pi C_m \sigma v_x, \quad (4.21)$$

constante, somente no interior das placas, paralelo às placas, no sentido positivo do eixo Z , perpendicular às correntes elétricas $\pm I$. Note que ambos os campos são perpendiculares à direção do movimento das placas.

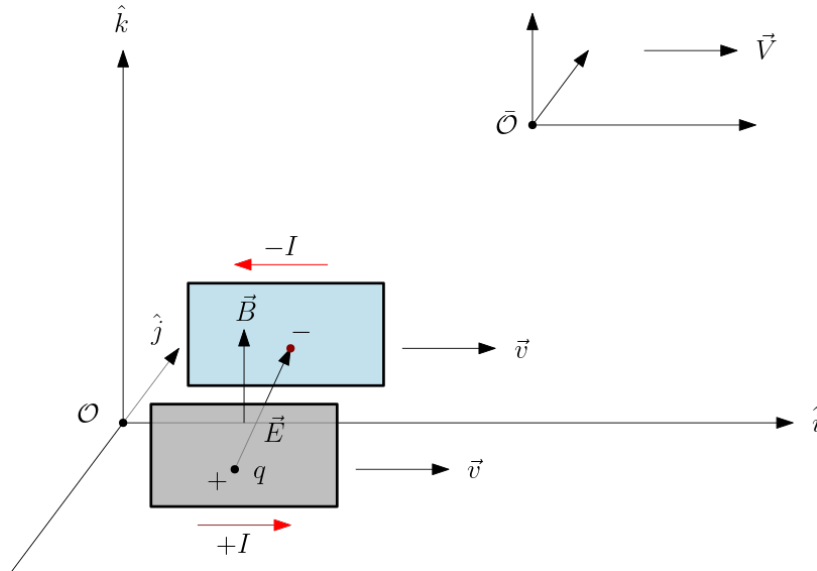


Figura 4.5: Duas placas paralelas infinitas, com cargas opostas, em movimento (\vec{v}) em relação ao referencial inercial \mathcal{O} . O referencial inercial $\bar{\mathcal{O}}$ também se movimenta (\vec{V}) em relação a \mathcal{O} .

Como serão os campos vistos por um observador solidário ao referencial inercial $\bar{\mathcal{O}}$, em movimento uniforme com velocidade \vec{V} em relação ao referencial \mathcal{O} . Esses campos serão produzidos pelas fontes vistas nesse referencial $\bar{\mathcal{O}}$. A velocidade $\bar{v} = \bar{v}_x \hat{i}$ das cargas no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ é a composição da velocidade $\vec{v} = v_x \hat{i}$ das cargas no referencial \mathcal{O} com a velocidade $\vec{V} = V \hat{i}$ do referencial $\bar{\mathcal{O}}$,

$$\bar{v}_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \quad (4.22)$$

Devido à contração espacial na direção do movimento das cargas, mesma direção do movi-

mento relativo das cargas em relação ao referencial \mathcal{O} , a densidade de cargas no referencial \mathcal{O} é σ/γ_{v_x} . No referencial $\bar{\mathcal{O}}$ essa mesma densidade de cargas é vista como

$$\bar{\sigma} = (\sigma/\gamma_{v_x})\gamma_{\bar{v}_x} = \sigma \frac{\gamma_{\bar{v}_x}}{\gamma_{v_x}}, \quad (4.23)$$

onde o fator γ_u é uma função da rapidez relativa u entre quaisquer dois referenciais inerciais,

$$\gamma_u \equiv \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}}, \quad \beta_u \equiv \beta(u) = \frac{u}{c}. \quad (4.24)$$

Acontece que a quarta componente do quadrivetor velocidade é justamente o fator gama γ_{v_x} , visto no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ como

$$\gamma_{\bar{v}_x} = \gamma_V \gamma_{v_x} \left(1 - \frac{V v_x}{c^2} \right). \quad (4.25)$$

Esta relação nos permite reescrever (4.23) como (verifique)

$$\bar{\sigma} = \sigma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2} \right) \gamma_V. \quad (4.26)$$

As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Assim, a densidade superficial de corrente $\bar{\mathcal{J}}$ no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ é (verifique)

$$\bar{\mathcal{J}} = \bar{\sigma} \bar{v}_x = \sigma (v_x - V) \gamma_V. \quad (4.27)$$

Ainda usando o princípio que “as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais”, os campos vistos no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ são similares àqueles vistos no referencial \mathcal{O} , mesma direção e sentido, mas com intensidades diferentes,

$$\bar{E}_{\bar{y}} = 4\pi C_e \bar{\sigma}, \quad \bar{B}_{\bar{z}} = 4\pi C_m \bar{\mathcal{J}}. \quad (4.28)$$

As constantes elétrica C_e e magnética são universais, pois $C_e/C_m = c^2$ e a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais. Usando (4.26) e (4.27), os campos (4.28) podem ser reescritos como (verifique)

$$\bar{E}_{\bar{y}} = \gamma_V \left(4\pi C_e \sigma - \frac{V}{c} \frac{4\pi C_e \sigma v_x}{c} \right), \quad (4.29a)$$

$$\bar{B}_{\bar{z}} = \gamma_V (4\pi C_m \sigma v_x - V 4\pi C_m \sigma), \quad (4.29b)$$

os quais podem também ser reescritos em termos dos campos (4.20)–(4.21) (verifique),

$$\bar{E}_y = \gamma_V (E_y - \beta_V c B_z), \quad (4.30a)$$

$$c\bar{B}_z = \gamma_V (-\beta_V E_y + c B_z). \quad (4.30b)$$

Note que estas são as componentes perpendiculares ao movimento relativo entre os referenciais inerciais \mathcal{O} e $\bar{\mathcal{O}}$. Este resultado mostra que as componentes perpendiculares dos campos elétrico e magnético transformam como as coordenadas $ct-x$ (ou x^0-x^1) mediante uma transformação de Lorentz. A componente longitudinal não muda, embora isso pareça trivial aqui.

Observe que as componentes E_y e cB_z , em ambos referenciais, podem ser intercambiadas, implicando que os campos elétrico e magnético desempenham papéis simétricos: um pode ser trocado pelo outro. Curioso que sentimos uma diferença marcante entre estes dois campos. No entanto, no espaço de Minkowski, eles são simétricos.

As leis de transformação (4.30) entre as componentes dos campos elétrico e magnético completam a prova que o campo magnético é um efeito relativístico, apresentada na Sec. 3.5.1.

Exercício 9. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta “verifique”.*

Capítulo 5

Potenciais

5.1 Maxwell

As equações de Maxwell podem ser divididas em dois grupos. O grupo ligado à carga (divergente),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.1)$$

e o grupo ligado à indução (rotacional),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = +\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi C_m \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.2)$$

As constantes elétrica e magnética são

$$C_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad C_m = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \frac{C_e}{C_m} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2, \quad (5.3)$$

onde os valores da permissividade ϵ_0 e da permeabilidade μ_0 do vácuo são dados na Sec. 1.5 e a relação com a velocidade da luz c é deduzida abaixo.

O grupo ligado à indução pode ser reescrito numa forma mais simétrica se multiplicarmos o campo magnético \vec{B} pela velocidade da luz c (verifique),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (c\vec{B}) = -4\pi C_e (\vec{J}/c), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial (c\vec{B})}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (5.4)$$

onde usamos também $cC_m = C_e/c$. Assim, os campos elétrico \vec{E} e magnético (rebatizado) $c\vec{B}$ têm as mesmas dimensões (verifique). Note que, na ausência de uma densidade de corrente, as substituições

$$\vec{E} \rightarrow c\vec{B}, \quad c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}, \quad (5.5)$$

leva uma das equações de Maxwell em (5.4) na outra. Note também a “quebra de simetria” nos papéis desempenhados pelos campos elétrico e magnético em (5.5), evidenciada pelo sinal negativo. Isto é um indício que estes dois campos têm características distintas.

Exercício 10. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta “verifique”.*

5.2 Ondas

Maxwell mostrou que luz é uma onda eletromagnética e que pode se propagar no vácuo (algo inaceitável para a época, pois acreditava-se que toda onda precisava de um meio para se propagar). Para tal, Maxwell considerou suas equações no vácuo (ausência de cargas elétricas, $\rho = 0$, e de correntes, $\vec{J} = 0$):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = +\frac{C_m}{C_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.6)$$

Maxwell, inicialmente, prestou atenção nas constantes C_e (elétrica) e C_m (magnética). Tomemos o rotacional das duas últimas equações (verifique),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{C_m}{C_e} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{C_m}{C_e} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (5.7a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (5.7b)$$

onde pressupomos que os campos sejam suáveis, e as simplifiquemos usando $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, bem como as duas primeiras equações de Maxwell com divergência nula (verifique),

$$-\nabla^2 \vec{B} = \frac{C_m}{C_e} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (5.8)$$

Agora usemos novamente as duas últimas equações de Maxwell para substituir os rotacionais por derivadas temporais e desacoplar as equações (verifique),

$$\left(\nabla^2 - \frac{C_m}{C_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{C_m}{C_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0. \quad (5.9)$$

Esta equação diferencial parcial satisfeita pelos campos \vec{E} e \vec{B} é conhecida por equação de onda (no vácuo),

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0, \quad (5.10)$$

onde v é a velocidade de propagação da onda ψ . Assim, Maxwell imediatamente identificou que os campos eletromagnéticos \vec{E} e \vec{B} satisfazem a mesma equação de onda, com a velocidade

$$v^2 = \frac{C_e}{C_m} = c^2, \quad (5.11)$$

cujo valor coincidia com o valor da velocidade c da luz na época. Maxwell não teve dúvidas: luz é uma onda eletromagnética e, pasmem, propaga-se no vácuo! Mais ainda, propaga-se com uma velocidade finita dada pelas constante elétrica e magnética, as quais são universais. Portanto a velocidade da luz deve ser também uma constante universal. As implicações conceituais e tecnológicas foram dantescas. Primeiro acreditava-se que a luz fosse um fenômeno instantâneo. Coube a Maxwell dar uma explicação teórica para a finitude da velocidade da luz. Segundo, de acordo com a Relatividade Especial de Einstein, a velocidade da luz é um limite para velocidades de objetos com massa (que possa ser medida numa balança). A Ref. [2] apresenta uma excelente visão histórica desse empreendimento humano.

Exercício 11. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta “verifique”.*

5.3 Potenciais

É muito interessante utilizar aqui o potencial escalar ϕ , introduzido na Seção 2.3, e o potencial vetorial \vec{A} , introduzido na Seção 3.3.1. No entanto, como os campos considerados aqui são dependentes do tempo, temos de verificar se alguma correção precisa ser feita nas relações já estabelecidas envolvendo estes potenciais.

Para o campo magnético satisfazendo a segunda equação de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, continuamos com $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Para o campo elétrico, devido às equações de Maxwell ligadas à indução, precisamos corrigir a relação $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, válida somente para campos estáticos. Para tal, vamos usar a quarta equação de Maxwell (lei de Faraday),

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} \right) = 0 \implies \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (5.12)$$

a qual nos obriga a acrescentar a variação temporal da densidade de corrente em $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Desta forma, em termos dos potenciais, os campos são

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial(c\vec{A})}{\partial t}, \quad c\vec{B} = \vec{\nabla} \times (c\vec{A}). \quad (5.13)$$

Note a contribuição do potencial vetor \vec{A} ao campo elétrico. Naturalmente, essa contribuição somente é relevante para potenciais variando no tempo. Sabíamos que os potenciais

criam seus campos através de variações espaciais. As equações anteriores estão sugerindo ct como uma quarta coordenada. Note também $c\vec{A}$ tem as mesmas dimensões do potencial escalar ϕ (verifique). Veremos que os campos \vec{E} e $c\vec{B}$ formam um ente único, o campo eletromagnético, um tensor de segunda ordem (uma matriz antissimétrica). Assim como posição e tempo (ct) formam um vetor quadridimensional no espaço-tempo, unificando tempo e espaço, os potenciais ϕ e $c\vec{A}$ formarão o vetor quadridimensional quadripotencial. Estas unificações são feitas pela Relatividade Especial de Einstein.

O campo magnético escrito em termos de seu potencial vetor, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, nos permite calcular o fluxo magnético via a circulação do potencial vetor,

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}, \quad (5.14)$$

onde A é uma superfície apoiada na curva fechada C . Este resultado é possível graças ao Teorema 2.

Exercício 12. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta “verifique”.*

5.4 Calibre

Uma vez que os campos elétrico \vec{E} e magnético $c\vec{B}$ satisfazem, individualmente, uma equação de onda no vácuo, Eqs. (5.9), os respectivos potenciais também devem satisfazê-la. Para verificarmos, vamos trocar nas equações de Maxwell os campos pelos seus potenciais dados em (5.13). Como já usamos a segunda e a quarta das equações de Maxwell, resta para usarmos a terceira equação (verifique),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 4\pi C_m \vec{J}, \quad (5.15)$$

onde usamos $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. Este resultado pode ser reescrito numa forma mais elegante (verifique),

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi C_m \vec{J} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (5.16)$$

Da primeira equação de Maxwell, temos (verifique)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 4\pi C_e \rho, \quad (5.17)$$

ou, numa forma mais elegante (verifique),

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi C_e \rho - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (5.18)$$

onde somamos e subtraímos o termo contendo a derivada temporal do potencial escalar, para atingir a mesma estrutura de (5.16), fornecido pela quarta equação de Maxwell. As Eqs. (5.16) e (5.18) são as equações de onda para os potenciais, na presença de cargas e correntes.

E agora a justificativa do título desta seção. As equações de onda (5.16) e (5.18) são invariantes perante as seguintes trocas de potenciais (verifique):

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \xi. \quad (5.19)$$

Esse fato é conhecido por **simetria de calibre**. O campo escalar ξ é o “calibre”. Esse fato deu origem a um feito ainda maior: teorias de calibre (*gauge*), as quais apresentam um apelo matemático substancial.

Quer mais? Quem acha que o termo entre parêntese nas equações (5.16) e (5.18) oferece dificuldades certamente perdeu a fé na Matemática e também nas equações de Maxwell. Como os potenciais podem ser “calibrados”, isto é, permitem uma escolha, então podemos fazer uma escolha,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (5.20)$$

conhecida por **calibre de Lorentz**. Com esta escolha, as equações de onda (5.16) e (5.18) para os potenciais simplificam,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi C_m \vec{J}, \quad (5.21a)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi C_e \rho. \quad (5.21b)$$

Naturalmente, esta simetria de calibre também deixa invariante as relações entre os campos vetoriais e seus potenciais em (5.13) (verifique).

Exercício 13. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta “verifique”.*

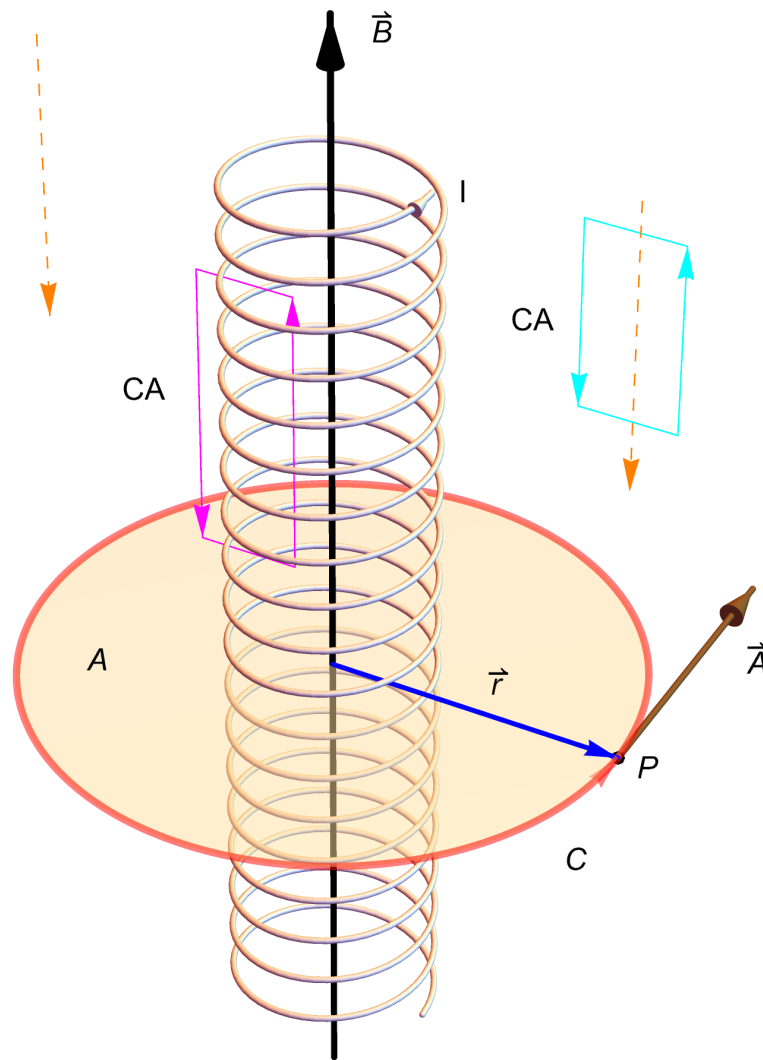


Figura 5.1: Solenoide transportando uma corrente constante I .

5.5 Casos de estudos

5.5.1 Solenoide

A Figura 5.1 mostra parte de um solenoide infinito (ideal). Trata-se de uma bobina cilíndrica de base circular de raio R com uma densidade (constante) \mathcal{N} de espiras por unidade de comprimento. Uma corrente I (constante) passa pelas espiras. Por simetria o campo magnético produzido pela corrente nas espiras é não-nulo somente no interior do solenoide. Além disso, esse campo magnético é constante e dirigido ao longo do eixo central do solenoide (eixo Z),

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \hat{k} & \text{se } r < R, \quad B_0 = 4\pi C_m \mathcal{N} I \\ 0 & \text{se } r > R, \end{cases} \quad (5.22)$$

onde r é a distância de um ponto P até o eixo do solenoide (eixo Z).

Campo magnético ao longo do eixo do cilindro. Sempre haverá um número suficiente de espiras, posicionadas no lugar correto, para cancelar qualquer componente do campo magnético resultante que não estiver ao longo do eixo do cilindro (eixo Z) e dentro do solenoide. Dentro, de acordo com a lei de Ampère, o campo magnético aponta no sentido positivo do eixo Z . Fora do solenoide, o campo magnético se não fosse nulo deveria apontar no sentido negativo do eixo Z , como os vetores tracejados na Figura 5.1.

Campo magnético constante. A lei de Ampère (4.1) mostra que a intensidade do campo magnético deve ser constante, tanto dentro quanto fora do solenoide. Basta tomarmos retângulos paralelos ao eixo do solenoide como curvas amperianas (CA). Uma dessas curvas amperianas é mostrada no lado direito da Figura 5.1. Dentro e fora do solenoide nenhuma corrente atravessa essas curvas amperianas. Como a circuitação do campo magnético na curva amperiana CA tem duas contribuições não-nulas e de sinais opostos, ao longo das arestas paralelas ao campo magnético e de mesmos comprimentos, concluímos que a intensidade do campo magnético deve ser a mesma em dois locais arbitrariamente diferentes. Portanto o campo magnético deve ser constante.

Intensidade do campo magnético. A intensidade do campo magnético pode ser determinada usando a curva amperiana CA enlaçando parte do solenoide, como mostrado no lado esquerdo da Figura 5.1. Usando a lei de Ampère (4.1), temos

$$B_z l + 0l = 4\pi C_m l \mathcal{N} I \implies B_z = 4\pi C_m \mathcal{N} I = B_0. \quad (5.23)$$

Note a descontinuidade da componente do campo magnético tangencial à superfície do solenoide.

Solenoide real. Um solenoide real possui um comprimento finito, porém muito maior que seu diâmetro. O campo magnético é praticamente constante no centro do solenoide e praticamente nulo na região externa ao solenoide. O solenoide ideal (comprimento infinito) é uma boa aproximação para o solenoide real (comprimento finito).

Potencial vetor dentro do solenoide. Queremos determinar o potencial vetor \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Neste caso é melhor usar coordenadas cilíndricas,

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}. \quad (5.24)$$

Também devido à esta simetria, esperamos que este potencial vetor não dependa da coordenada z (ao longo do fio) e nem da coordenada angular φ ; cada componente do potencial vetor dever ser função somente da coordenada radial r , $A_{r,\varphi,z} = A_{r,\varphi,z}(r)$. Sabemos que o

campo magnético está inteiramente na direção do eixo do solenoide (direção de \hat{k}). Assim,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{k} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \hat{k} = \vec{B} = B_0 \hat{k}. \quad (5.25)$$

Desta forma, temos (verifique)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = B_0 \implies A_\varphi(r) = \frac{B_0 r}{2} + \frac{C_1}{r}, \quad (5.26)$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Como não há imposições sobre as componentes A_r e A_z , podemos assumi-las nulas. Assim, o potencial vetor está circulando o eixo do solenoide, no mesmo sentido da corrente I ,

$$\vec{A} = A_\varphi(r) \hat{\varphi}, \quad A_\varphi(r) = \frac{B_0 r}{2} + \frac{C_1}{r}. \quad (5.27)$$

Como determinar a constante arbitrária C_1 em (5.27)? Usando o fluxo magnético. Vamos calcular o fluxo magnético através da área A do disco perpendicular ao solenoide. Como mostrado na Figura 5.1, esse disco tem a circunferência C como contorno. Dentro do solenoide ($r < R$) temos (verifique),

$$d\vec{r} = r d\varphi \hat{\varphi} = dl \hat{\varphi}, \quad C = \oint dl = r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r, \quad (5.28)$$

e

$$d\vec{a} = r dr d\varphi \hat{k} = da \hat{k}, \quad A = \int da = \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi r^2. \quad (5.29)$$

O fluxo magnético, por definição, é (verifique)

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = B_0 A = \pi r^2 B_0. \quad (5.30)$$

Por outro lado, de acordo com (5.14), o fluxo magnético também pode ser calculado pela circulação do potencial vetor (verifique),

$$\Phi_B = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = A_\varphi C = 2\pi r A_\varphi. \quad (5.31)$$

Portanto,

$$A_\varphi(r) = \frac{B_0 r}{2}, \quad r < R. \quad (5.32)$$

Desta forma a constante C_1 em (5.27) tem de ser nula, $C_1 = 0$. Note que o fluxo magnético também diz nada sobre as componentes A_z e A_r , perpendiculares ao disco A e seu contorno C , respectivamente.

Note que podemos escrever (verifique)

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}, \quad (5.33)$$

onde \vec{r} é o vetor radial, perpendicular ao eixo do solenoide, como mostrado na Figura 5.1. Seu módulo r , a distância do ponto P ao eixo do solenoide, é a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas.

Potencial vetor fora do solenoide. Vamos usar o fluxo magnético para calcular a componente tangencial A_φ do potencial vetor fora do solenoide. Fora ($r > R$), o fluxo magnético calculado usando diretamente o campo magnético é (verifique)

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = B_0 A = \pi R^2 B_0. \quad (5.34)$$

Note que o fluxo é restrito à área da seção reta do solenoide. Usando o potencial vetor, o fluxo magnético é o mesmo calculado em (5.31), porém com a condição $r > R$. Assim,

$$A_\varphi(r) = \frac{B_0 R^2}{2r}, \quad r > R. \quad (5.35)$$

Note que as funções (5.32) e (5.35) são contínuas na lateral do solenoide, $r = R$.

Impressiona ter um potencial vetor não-nulo, não-constante, fora do solenoide onde o campo magnético é nulo. Vimos que o potencial elétrico é uma grandeza mensurável e bem conhecida em eletrônica: uma tensão. Ninguém questiona se o potencial elétrico é apenas um artifício matemático para calcular o campo elétrico. O potencial elétrico é real, existe, é uma tensão, facilmente mensurável. Então o potencial vetor deve ser também uma quantidade real, que existe, passível de ser medida.

Exercício 14. *Elabore cuidadosamente as provas omitidas sob a etiqueta “verifique”.*

Capítulo 6

Energia-momentum

6.1 Densidade de força

Considere um elemento de carga dq em uma distribuição (contínua) de carga total Q contida num volume V . Esse elemento de carga dq movimenta-se com velocidade \vec{v} sujeito à força de Lorentz (1.1). Assim, a força total \vec{F} nesta distribuição é

$$\vec{F} = \int_Q dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \int_V dV(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}) = \int_V dV(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}), \quad (6.1)$$

onde ρ é o vetor densidade de carga e $\vec{J} = \rho\vec{v}$ a densidade de corrente. Da última igualdade em (6.1), temos a densidade de força (força por unidade de volume),

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (6.2)$$

Podemos usar as equações de Maxwell (1.2)–(1.5) para eliminar a presença das fontes (ρ e \vec{J}) da densidade de força (6.2),

$$\rho\vec{E} = \frac{1}{4\pi C_e}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} \quad (6.3)$$

e (verifique)

$$\begin{aligned} \vec{J} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi C_m} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \\ &= -\frac{c^2}{4\pi C_e} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi C_e} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right], \quad (6.4) \end{aligned}$$

onde usamos a relação (5.11). Massageando mais um pouco o último termo, temos (verifique)

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi C_e} \left[\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right]. \quad (6.5)$$

Desta forma, a densidade de força (6.2) torna-se em

$$\vec{f} = -\frac{1}{4\pi C_e} \left[\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right]. \quad (6.6)$$

Usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, a densidade de força (6.6) também pode ser reescrita como

$$\vec{f} = -\frac{1}{4\pi C_e} \left[\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right]. \quad (6.7)$$

Também podemos usar a relação geral

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} A^2 - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}, \quad (6.8)$$

onde $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$, para reescrever a densidade de força (6.7) numa forma mais aberta (verifique)

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi C_e} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right]. \quad (6.9)$$

Cada um desses três termos tem uma interpretação física, como veremos adiante.

No entanto, o termo contendo o gradiente em (6.9) tem uma interpretação imediata. Força é derivada (literalmente) de energia. Então a quantidade

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{4\pi C_e} \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2), \quad (6.10)$$

é a densidade de energia eletromagnética (por unidade de volume). O gradiente dessa densidade de energia eletromagnética é uma contribuição eletromagnética à densidade de força total,

$$\vec{f}_{em} = -\vec{\nabla} (-\varepsilon_{em}) = \vec{\nabla} \varepsilon_{em}. \quad (6.11)$$

Note que a energia eletromagnética (6.10) estava “escondida” na densidade de força (6.2).

Para uso futuro (imediato), os dois primeiros termos em (6.9),

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{4\pi C_e} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right], \quad (6.12)$$

podem ser reescritos numa forma mais adequada usando suas coordenadas (verifique),

$$\lambda_i = \frac{1}{4\pi C_e} \vec{\nabla} \cdot (E_i \vec{E} + c^2 B_i \vec{B}). \quad (6.13)$$

O ponto importante aqui é a possibilidade de escrever as coordenadas do vetor $\vec{\lambda}$ como o divergente de uma expressão. Isto nos permitirá usar o Teorema 3 ao escrevermos as quantidades totais.

6.2 Densidade de energia

A projeção da força de Lorentz ao longo da trajetória do elemento de carga dq nos dá o trabalho realizado. Considerando que a trajetória desse elemento de carga dq seja parametrizada pelo vetor posição \vec{r} , então $d\vec{r} = \vec{v} dt$. Assim, a taxa de variação temporal do trabalho total (potência total) dessa região de cargas é

$$\frac{dW}{dt} = \int_Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dq = \int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV. \quad (6.14)$$

Este resultado pode induzir a pensarmos que apenas o campo elétrico trabalha. No entanto, as equações de Maxwell vinculam os campos elétrico e magnético. Procedendo como anteriormente, podemos usar as equações de Maxwell (1.2)–(1.5) para eliminar a densidade de corrente \vec{J} da densidade de potência (potência por unidade de volume) $\vec{J} \cdot \vec{E}$,

$$4\pi C_m \vec{J} \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}. \quad (6.15)$$

Cada um desses dois termos é uma parte de uma derivada de um produto:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}, \quad (6.16a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (6.16b)$$

Assim, a densidade de potência (6.15) pode ser reescrita como

$$4\pi C_m \vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t}. \quad (6.17)$$

Podemos usar as equações de Maxwell (1.2)–(1.5) para eliminar o rotacional do campo elétrico e usar (6.16a) novamente (verifique),

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \varepsilon_{em}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}, \quad (6.18)$$

onde definimos

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{4\pi C_e} \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2), \quad (6.19)$$

a densidade de energia eletromagnética, e

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi C_e} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (6.20)$$

denominada de “vetor de Poynting” (por razões históricas). Naturalmente temos usado (5.11) para intercambiar o uso das constantes elétrica (C_e) e magnética (C_m). Note que a energia eletromagnética (6.19) estava “escondida” na densidade de força (6.2) e na densidade de potência (6.15).

A interpretação de (6.19) como uma densidade de energia eletromagnética é imediata, pois densidade de potência é a taxa de variação temporal de uma densidade de energia. Como a taxa de variação temporal da expressão (6.19) aparece na densidade de potência (6.18), então (6.19) é uma densidade de energia. O campo eletromagnético possui energia. Se tem energia, tem momentum, como veremos mais adiante.

Para interpretarmos o vetor de Poynting (6.20), vamos voltar à potência total (6.14),

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = - \int_V \frac{\partial \varepsilon_{em}}{\partial t} dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV = \int_V \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t} dV, \quad (6.21)$$

onde ε_m é a densidade de energia mecânica (ou de origem não-eletromagnética). Esta última igualdade vem da Mecânica: a taxa temporal do trabalho é igual à taxa temporal da energia mecânica. Desta forma, temos

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{em} + \varepsilon_m) dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV = - \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{a}, \quad (6.22)$$

onde usamos o Teorema 3 para passar para a integração para a superfície A envolvendo o volume V contendo as cargas e densidades de corrente. Temos aqui duas interpretações importantes. Primeiro, a energia total que entra ou sai do volume V atravessa a sua superfície (fechada) A . Portanto o vetor de Poynting \vec{S} representa o fluxo de energia (total, mecânica e eletromagnética) através da superfície contendo a região dos campos elétrico e magnético.

Segundo, a energia total é conservada, pois de (6.22) temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{em} + \varepsilon_m) = 0, \quad (6.23)$$

o mesmo formato da equação da continuidade (da carga elétrica) em (3.19), a qual representa a conservação da carga elétrica. Como \vec{J} é o vetor densidade de corrente elétrica, o vetor de Poynting \vec{S} é o vetor densidade de potência. A equação da continuidade (6.23) representa a conservação da energia total.

Note que a densidade de energia eletromagnética (6.19) e o vetor de Poynting (6.20), o vetor densidade de potência, aparecem explicitamente na densidade de força dada em (6.9). Os dois primeiros termos em (6.9) serão interpretados mais adiante.

6.3 Densidade de momentum linear

Aprendemos com a segunda lei de Newton que um movimento é regido pela equação eurística “força igual à taxa de variação de momentum linear”. Seja $\vec{\varrho}_m$ a densidade de momentum linear mecânico (por unidade de volume), ou de origem não-eletromagnética. Então a segunda lei (por unidade de volume) é

$$\vec{f} = \frac{\partial \vec{\varrho}_m}{\partial t}, \quad \vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \frac{d}{dt} \int_V \vec{\varrho}_m dV. \quad (6.24)$$

Dito isto, a densidade de força (6.9) pode ser interpretada completamente,

$$\vec{f} + \vec{\nabla} \varepsilon_{em} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{\nabla} \varepsilon_{em} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varrho}_m + \vec{S}/c^2) = \vec{\lambda}, \quad (6.25)$$

onde o vetor $\vec{\lambda}$ está definido em (6.12), cujas componentes (6.13) podem ser escritas na forma de um divergente. A expressão (6.25) nos permite interpretar

$$\vec{\varrho}_{em} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (6.26)$$

como uma densidade de momentum linear eletromagnético,

$$\vec{\nabla} \varepsilon_{em} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varrho}_m + \vec{\varrho}_{em}) = \vec{\lambda}. \quad (6.27)$$

Interessante observar que o vetor de Poynting \vec{S} , definido em (6.20), apareceu inicialmente como um vetor densidade de potência. Aqui, a quantidade \vec{S}/c^2 é uma densidade de momentum linear eletromagnético. Note também que o momentum linear eletromagnético (6.26)

estava “escondido” na densidade de força (6.2).

Podemos reescrever (6.27) numa outra forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varrho}_m + \vec{\varrho}_{em}) = \vec{\lambda} - \vec{\nabla} \varepsilon_{em}, \quad (6.28)$$

mais adequada a enxergarmos a conservação do momentum linear total $\vec{\varrho}_m + \vec{\varrho}_{em}$. Vamos inspecionar cada uma das componentes no lado direito da Eq. (6.28), verifique,

$$(\vec{\lambda} - \vec{\nabla} \varepsilon_{em})_i = \frac{1}{4\pi C_e} \left[\vec{\nabla} \cdot (E_i \vec{E} + c^2 B_i \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \right] = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}, \quad (6.29)$$

onde introduzimos

$$T_{ij} = - \frac{1}{4\pi C_e} \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \delta_{ij} \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \right], \quad (6.30)$$

denominado de “tensor dos esforços (estresses) de Maxwell”. Note o sinal negativo em destaque, pois ele não aparece em alguns textos. A matriz (tensor de ordem dois) T_{ij} é simétrica. Desta forma, a conservação da densidade de momentum linear total (6.28) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varrho}_m + \vec{\varrho}_{em})_i = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}. \quad (6.31)$$

O lado direito é o divergente do vetor formado por cada linha (ou coluna) do tensor de Maxwell. Assim, a Eq. (6.31) tem o mesmo formato das outras duas leis de conservação, da carga elétrica em (3.19) e da energia em (6.23), além de ser a segunda lei de Newton com o tensor de Maxwell fazendo o papel de um potencial generalizado. Compare com a força elétrica dada em termos do gradiente de um potencial escalar.

Integrando (6.31) e usando o Teorema 3, pois a soma em j no lado direito de (6.31) é um divergente, temos

$$\frac{d}{dt} \int_V (\vec{\varrho}_m + \vec{\varrho}_{em})_i dV = - \int_V \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} dV = - \oint_A \sum_j T_{ij} da_j. \quad (6.32)$$

Este resultado mostra que as linhas (ou colunas) do tensor de Maxwell (6.30) comportam-se como vetores densidades de momentum linear. Como o lado esquerdo é a força total, então o tensor de Maxwell tem dimensões de pressão, força por unidade de área. O tensor de Maxwell (6.30) é responsável pelo fluxo de momentum linear através de uma superfície contendo a região dos campos elétrico e magnético.

O campo eletromagnético tem energia e momentum linear. Se tem momentum linear,

tem momentum angular.

6.4 Densidade de momentum angular

A densidade de momentum angular $\vec{\ell}$ em relação ao ponto (O) é definido pelo produto vetorial

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{\varrho}_m, \quad (6.33)$$

entre o vetor posição \vec{r} e a densidade de momentum linear $\vec{\varrho}_m$. De forma similar, a densidade volumétrica de torque é dada por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \vec{\varrho}_m) = \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial t}, \quad (6.34)$$

onde a densidade de força, graças aos resultados anteriores, por exemplo (6.31), pode ser escrita como

$$f_i = \frac{\partial \varrho_{m,i}}{\partial t} = - \sum_j \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varrho_{em,i}}{\partial t}. \quad (6.35)$$

Desta forma, a densidade de torque (6.34) pode ser reescrita como uma lei de conservação, para a densidade de momentum angular total (verifique),

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} \right) + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{r} \times (\vec{\varrho}_m + \vec{\varrho}_{em})]_i = 0. \quad (6.36)$$

Note a presença de uma densidade de momentum angular de origem eletromagnética, $\vec{r} \times \vec{\varrho}_{em}$, associada ao momentum linear eletromagnético $\vec{\varrho}_{em}$, dado em (6.26).

Capítulo 7

Matéria

7.1 Introito

Para comparação futura, listamos aqui as equações de Maxwell sem a presença direta das fontes (densidades de carga e de corrente),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial(c\vec{B})}{\partial t} = 0, \quad (7.1b)$$

e aquelas que mencionam explicitamente as fontes,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho, \quad (7.2a)$$

$$\vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi C_e (\vec{J}/c). \quad (7.2b)$$

Estas equações de Maxwell são para densidades de carga ρ e de corrente \vec{J} no vácuo ou num meio material. As duas equações de Maxwell (7.2) no grupo das fontes implicam na conservação da carga elétrica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (7.3)$$

A presença de meios materiais pode contribuir para as densidades de carga e de corrente. Como veremos, é conveniente reescrever as equações de Maxwell (7.2) contendo as fontes de forma a envolver apenas quantidades macroscopicamente mensuráveis.[3]

7.2 Polarização

O meio material, ou simplesmente matéria, contribui com cargas livres, representadas pela densidade (volumétrica) de cargas livres ρ_f , e cargas ligadas (pouca mobilidade), representadas pela densidade (volumétrica) de cargas ligadas ρ_b . Os subíndices são as iniciais das palavras em inglês *free* e *bound*, respectivamente. Pouca mobilidade em cargas ligadas caracteriza os materiais dielétricos, entre condutores (com cargas livres) e isolantes. Campos elétricos em dielétricos separam (muito pouco) cargas elétricas positivas e negativas, criando dipolos elétricos. A densidade macroscópica dipolo por unidade de volume, denominada de **polarização elétrica**, denotada por \vec{P} , a qual pode ser medida macroscopicamente como um efeito coletivo, está relacionada à densidade de cargas ligadas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_b. \quad (7.4)$$

Meios materiais também podem possuir dipolos magnéticos, cujo efeito macroscópico pode ser medido pela densidade de dipolos magnéticos por unidade de volume, denominada de **magnetização** ou **polarização magnética**, denotada por \vec{M} . A polarização magnética está relacionada com uma “como se fosse” densidade de corrente ligada \vec{J}_b ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_b. \quad (7.5)$$

Naturalmente, podemos ter também correntes livres, representadas pela densidade de corrente \vec{J}_f . Além dessas correntes livres e ligadas, há também as correntes de polarização,

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (7.6)$$

decorrentes do movimento de cargas devido à polarização.

Desta forma, na presença de um meio material, as densidades totais de carga e de corrente elétricas são

$$\rho = \rho_f + \rho_b, \quad (7.7a)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_P, \quad (7.7b)$$

respectivamente. A primeira providência é checar a conservação da carga elétrica,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_b + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} - \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.8)$$

A necessidade da existência da densidade da corrente de polarização (7.6) é uma consequência da densidade de corrente ligada (7.5) ter divergência nula, por definição, e da conservação

da carga elétrica.

Observe em (7.4) que a polarização elétrica tem dimensões de unidade de carga por unidade de área (densidade superficial de cargas). Similarmente, de (7.5) que a polarização magnética tem dimensões de unidade de carga por unidade de tempo (corrente) por unidade de comprimento (densidade linear de corrente).

7.3 Maxwell

É conveniente reescrever as equações de Maxwell (7.2) em termos das polarizações elétrica, dada em (7.4), e magnética, dada em (7.5). Para tal, basta inserir as densidades totais (7.7) nas equações de Maxwell (7.2), iniciando pela lei de Coulomb,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi C_e \rho = 4\pi C_e \rho_f + 4\pi C_e \rho_b = 4\pi C_e \rho_f - 4\pi C_e \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad (7.9)$$

ou, agrupando os divergentes,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi C_e \vec{P}) = 4\pi C_e \rho_f. \quad (7.10)$$

Este resultado sugere a introdução de um novo campo elétrico,

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi C_e \vec{P}, \quad (7.11)$$

para obter uma equação similar à lei de Coulomb para a densidade de carga livre,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi C_e \rho_f. \quad (7.12)$$

Similarmente, introduzindo a corrente total na lei de Ampère, temos

$$\vec{\nabla} \times (c\vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi C_e (\vec{J}/c) = 4\pi C_e (\vec{J}_f/c) + 4\pi C_e \vec{\nabla} \times \vec{M}/c + 4\pi C_e \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (7.13)$$

a qual, após agrupar rotacionais e derivadas temporais, pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \times (c\vec{B} - 4\pi C_e \vec{M}/c) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi C_e \vec{P}) = 4\pi C_e (\vec{J}_f/c). \quad (7.14)$$

Este resultado sugere um novo campo magnético,

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi C_m \vec{M}, \quad (7.15)$$

onde usamos $C_m/c^2 = C_e$, para obter uma equação similar à lei de Ampère para a densidade

de corrente livre,

$$\vec{\nabla} \times (c\vec{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 4\pi C_e (\vec{J}_f/c). \quad (7.16)$$

Naturalmente, um modelo deve ser criado para estabelecer relações adicionais entre os novos campos e os antigos ou, equivalentemente, relações adicionais entre as polarizações e os campos elétrico e magnético. Note que as relações

$$\vec{E} = \vec{D} - 4\pi C_e \vec{P}, \quad (7.17a)$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi C_m \vec{M}, \quad (7.17b)$$

precisam de relações suplementares, fornecidas por modelos. A situação mais simples corresponde aos chamados **meios lineares**, onde as relações suplementares são lineares,

$$\vec{D} = \kappa_e \vec{E}, \quad (7.18a)$$

$$\vec{H} = \kappa_m \vec{B}, \quad (7.18b)$$

ou

$$4\pi C_e \vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad (7.19a)$$

$$4\pi C_m \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (7.19b)$$

onde

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e), \quad \kappa_e = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \chi_e, \quad (7.20a)$$

$$\mu = \mu_0/(1 + \chi_m), \quad \kappa_m = \mu/\mu_0 = 1/(1 + \chi_m). \quad (7.20b)$$

Na ausência de matéria (vácuo), os parâmetros χ_e e χ_m são nulos, bem como as polarizações em (7.19). No vácuo a permissividade e a permeabilidade são $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$, respectivamente, possibilitando a igualdade entre os campos em (7.18).

7.4 Nomes

Abaixo, uma relação de nomes, por razões históricas e de normalização (ISO, mais detalhes aqui <https://www.iso.org>), para os campos elétricos e magnéticos. Continuaremos usando

campo elétrico e campo magnético.

	Histórico	ISO	aqui	
\vec{E}	campo elétrico	campo elétrico	campo elétrico	
\vec{B}	indução magnética	densidade de fluxo magnético	campo magnético	(7.21)
\vec{D}	deslocamento elétrico	densidade de fluxo elétrico	campo elétrico	
\vec{H}	campo magnético	campo magnético	campo magnético	

Appendices

Apêndice A

Análise dimensional

A.1 Introdução

Unidades de medida são importantes e indispensáveis. De forma geral, procuraremos expressar todas as nossas quantidades em unidades derivadas de quatro grandezas fundamentais: comprimento (L), tempo (T), massa (M) e carga elétrica (Q). Em processos de medidas, estas grandezas são conhecidas também por dimensões. Em geral, falaremos da análise dimensional de uma determinada quantidade. Existe um procedimento padrão para analisarmos as dimensões de uma determinada quantidade de interesse: uma equação com o lado esquerdo expressando a quantidade B a ser analisada, via a notação $[B]$, e um lado direito contendo apenas as operações de multiplicação e potenciação envolvendo as dimensões L, T, M e Q, ou seja,

$$[B] = L^i T^j M^k Q^l. \quad (\text{A.1})$$

Não se pode confundir dimensões com algum sistema particular de medidas. Vários sistemas de medidas foram criados para expressar a intensidade de cada uma destas quatro dimensões fundamentais. Usaremos com mais frequência o Sistema Internacional (SI ou MKS), onde comprimento é medido em metros (m), tempo em segundos (s), massa em kilogramas (kg) e carga elétrica em Coulombs (C).

A.2 Exemplos

A.2.1 Cinemática

O vetor posição \vec{r} tem dimensão de comprimento (L). Escrevemos matematicamente esta informação como

$$[\vec{r}] = L. \quad (\text{A.2})$$

Consequentemente, vetor velocidade tem dimensões de comprimento por tempo,

$$[\vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}, \quad (\text{A.3})$$

e o vetor aceleração tem dimensões de comprimento por tempo ao quadrado,

$$[\vec{a}] = \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}. \quad (\text{A.4})$$

A.2.2 Dinâmica

As dimensões do momentum linear são

$$[\vec{p}] = [m\vec{v}] = \frac{ML}{T} = MLT^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

Seguindo estes exemplos, a análise dimensional do vetor força na segunda lei de Newton (massa constante) nos fornece

$$[\vec{F}] = [m\vec{a}] = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2} \text{ (Newton)}. \quad (\text{A.6})$$

Newton é a unidade de força no sistema internacional (SI).

As dimensões de energia são as mesmas de energia cinética (ou de força vezes distância),

$$[E_c] = [mv^2/2] = \frac{ML^2}{T^2} = ML^2T^{-2} \text{ (Joule)}. \quad (\text{A.7})$$

Joule é a unidade de energia no sistema internacional (SI).

A.2.3 Eletromagnetismo

Como corrente elétrica (I) é a taxa de variação de carga no tempo, então as dimensões de corrente elétrica são

$$[I] = \left[\frac{dQ}{dt} \right] = \frac{Q}{T} = QT^{-1} \text{ (Ampere)}. \quad (\text{A.8})$$

Ampere é a unidade de corrente elétrica no sistema internacional (SI).

Quais são as dimensões da constante C_e aparecendo na expressão para a força elétrica (lei de Coulomb)

$$\vec{F}_e = C_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (\text{A.9})$$

entre duas cargas elétricas Q e q separadas pela distância r ? Usando as dimensões de carga,

comprimento (versor é adimensional) e força, as dimensões da constante elétrica C_e são

$$[C_e] = \text{NL}^2\text{Q}^{-2} = \text{ML}^3\text{T}^{-2}\text{Q}^{-2}. \quad (\text{A.10})$$

Por completeza, devemos mencionar que cargas magnéticas nunca foram observadas. No entanto quando dois fios conduzindo correntes elétricas I_1 e I_2 estão a uma distância ρ , podemos medir uma força por unidade de comprimento entre eles,

$$\vec{f}_m = 2C_m \frac{I_1 I_2}{\rho} \hat{\rho}. \quad (\text{A.11})$$

Esta força é conhecida como lei de Biot-Savat. Usando as dimensões de corrente elétrica e força, as dimensões da constante magnética C_m são

$$[C_m] = \text{NT}^2\text{Q}^{-2} = \text{MLQ}^{-2}. \quad (\text{A.12})$$

Podemos notar então que a razão C_e/C_m tem a mesma dimensão de velocidade ao quadrado.

Na ausência de um campo elétrico, a força de Maxwell-Lorentz,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (\text{A.13})$$

produzida por uma carga q em movimento com uma velocidade \vec{v} em um campo magnético \vec{B} , é responsável por trajetórias helicoidais. As dimensões do campo magnético \vec{B} são

$$[\vec{B}] = \left[\frac{||\vec{F}||}{q||\vec{v}||} \right] = \text{MQ}^{-1}\text{T}^{-1}(\text{Tesla}). \quad (\text{A.14})$$

Tesla é a unidade de campo magnético no sistema internacional (SI).

Apêndice B

Dispositivos eletrônicos

A equações de Maxwell permitem a construção de uma quantidade enorme de dispositivos eletrônicos, os quais constituem todos os equipamentos eletrônicos. Metais propiciam cargas livres (elétrons) que podem ser armazenadas e movimentadas via força elétrica. Campos elétricos são criados pela variação de potenciais elétricos.

B.1 Resistores

Um resistor é formado por materiais que oferecem dificuldade à passagem de cargas elétricas. Geralmente são feitos de materiais não metálicos. Eles são usados para regular correntes elétricas. Há muitos *sites* especializados em informações detalhadas sobre resistores (por exemplo, [Wikipedia](#) e [Electronics Tutorials](#)). Veja o Cap. 4 da Ref. [1] para mais detalhes.

Um resistor de resistência elétrica R é construído de tal forma a ter uma diferença de potencial elétrico entre seus terminais a a b (veja a Figura B.1), também denominada de tensão $V = \phi_b - \phi_a$. Esta tensão é proporcional à corrente elétrica I que passa por ele:

$$\Delta\phi = \phi_b - \phi_a \equiv V = RI. \quad (\text{B.1})$$

As dimensões de resistência elétrica podem ser determinadas usando as dimensões de potencial elétrico dadas em (2.16) e de corrente elétrica (carga por tempo),

$$[R] = [V/I] = \frac{\text{ML}^2 \text{T}}{\text{QT}^2 \text{Q}} = \frac{\text{ML}^2}{\text{Q}^2 \text{T}}. \quad (\text{B.2})$$

A resistência é medida em Ohms (Ω) no Sistema Internacional (SI), tensão em Volts (V) e corrente em Amperes (A).

Um resistor típico é ilustrado [nesta simulação](#). Em geral a diferença de potencial é fornecida por uma bateria (ou gerador). Esta [próxima simulação](#) mostra o movimento de

cargas nas diversas partes de um circuito contendo um resistor e uma gerador de tensão (bateria).

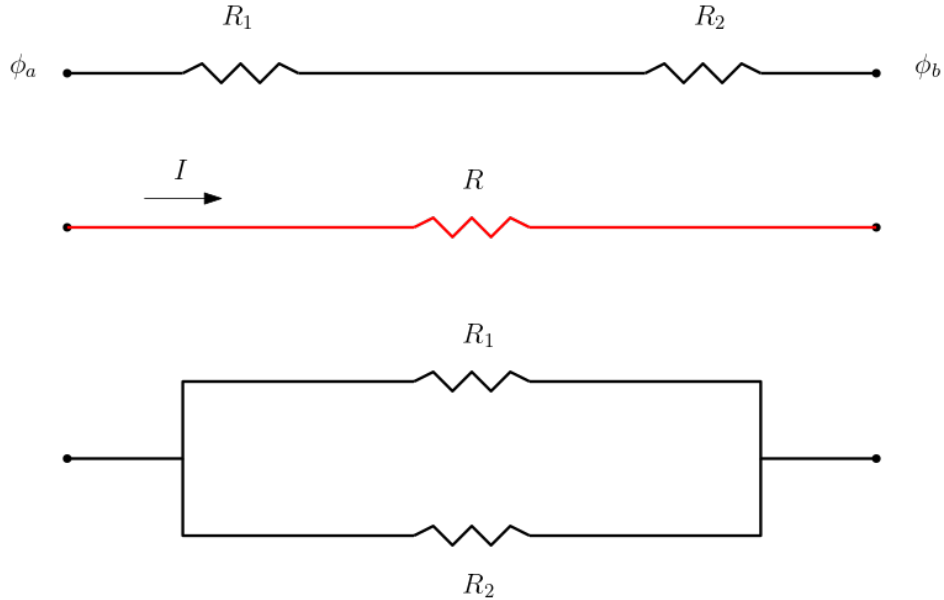


Figura B.1: Duas resistências em série (acima) e em paralelo (abaixo), ligadas a diferentes potenciais elétricos ϕ_a e ϕ_b . O resistor equivalente é mostrado na região central.

Num mesmo circuito, resistores em série são equivalentes a um resistor com uma resistência R dada pela soma das resistências individuais,

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n. \quad (\text{B.3})$$

Resistores em paralelo são equivalentes a um resistor com uma resistência inversa ($1/R$) dada pela soma das resistências inversas individuais,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}. \quad (\text{B.4})$$

A Figura B.1 mostra duas resistências em série e também em paralelo. O resistor equivalente é mostrado na região central. Para os dois resistores em série, a soma das tensões em cada resistor tem de ser a tensão $V = \phi_b - \phi_a$ entre os terminais,

$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = R I \implies R = R_1 + R_2. \quad (\text{B.5})$$

Vale lembrar que a corrente I fluindo pelo circuito precisa ser conservada, isto é, a mesma corrente que entra em um terminal deve sair no outro terminal. Para os dois resistores em paralelo, a corrente se divide e é conservada, $I = I_1 + I_2$. Desta vez, a tensão em cada resistor é a mesma tensão entre os terminais, $V = R_1 I_1 = R_2 I_2$. Portanto, considerando também o

resistor equivalente, temos

$$V = RI = R(I_1 + I_2) = R \left(\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \right) \implies \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Capacitores

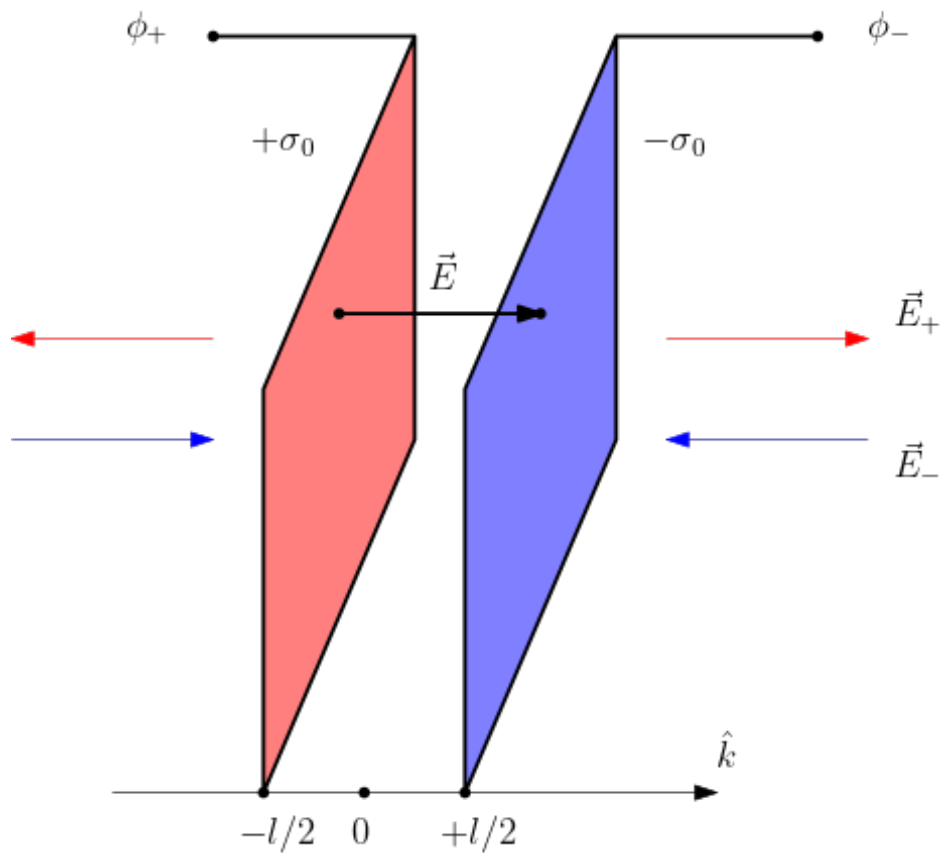


Figura B.2: Capacitor de placas paralelas. Cada placa é ligada a diferentes potenciais elétricos, ϕ_+ e ϕ_- .

A Figura B.2 mostra duas placas metálicas paralelas, carregadas com a mesma quantidade de carga elétrica mas de sinais opostos, separadas pela distância l . Apesar de, na prática, tais placas serem finitas, vamos considerá-las aqui como infinitas. Como mostrado na Seção 2.6.5, o campo elétrico de um plano (infinito) de cargas é constante em todo o espaço. Assim, teremos um campo não-nulo somente na região entre as placas, pois fora os campos cancelam (considerando que as linhas de campo saem da placa com carga positiva e entram na placa com cargas negativas), conforme ilustrado na Figura B.2. Esse campo resultante no interior

das placas é a soma dos campos elétricos de cada placa,

$$\vec{E} = E \hat{k}, \quad E = 4\pi C_e \sigma_0. \quad (\text{B.7})$$

Também de acordo com a Seção 2.6.5, os potenciais elétricos em cada placa são

$$\phi_+ = +2\pi C_e \sigma_0 \frac{l}{2}, \quad \phi_- = -2\pi C_e \sigma_0 \frac{l}{2}. \quad (\text{B.8})$$

Portanto, a diferença de potencial entre as placas é

$$V \equiv \phi_+ - \phi_- = 4\pi C_e \sigma_0 l = El. \quad (\text{B.9})$$

Agora vamos considerar as placas mostradas na Figura B.2 como finitas, cada uma de área A . Neste caso, a carga total Q em cada placa é $Q = \sigma_0 A$. Apesar da finitude desse sistema, as expressões anteriores são excelentes aproximações, principalmente longe das bordas. Quanto menor a distância entre as placas, em relação ao tamanho das placas, melhor a aproximação. É interessante observar que a diferença de potencial (tensão) em (B.9) é proporcional à carga total,

$$V = 4\pi C_e \sigma_0 l = 4\pi C_e \frac{Ql}{A} = \frac{4\pi C_e l}{A} Q. \quad (\text{B.10})$$

Em um capacitor, a razão carga por tensão, Q/V , é denominada de capacitância,

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (\text{B.11})$$

Para o presente caso, a capacitância do capacitor de placas paralelas mostrado na Figura B.2 é

$$C = \frac{A}{4\pi C_e l} = \epsilon_0 \frac{A}{l}. \quad (\text{B.12})$$

Quanto menor a distância de separação entre as placas, maior a capacitância. A capacitância é uma propriedade que sempre depende da geometria do capacitor. Note que as cargas elétricas acumulam nas placas, mas não podem passar diretamente de uma placa para a outra. Em geral, se usa um material isolante entre as placas. Veja o Cap. 3 da Ref. [1] para mais detalhes.

Como mostrado na Seção 1.4, as dimensões da permissividade elétrica ϵ_0 são as mesmas de carga ao quadrado por distância ao quadrado por força,

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{Q}^2 \text{T}^2}{\text{ML}^3}, \quad (\text{B.13})$$

que nos dá as dimensões de capacitância como sendo as mesmas de carga por energia, tudo

ao quadrado,

$$[C] = \left[\epsilon_0 \frac{A}{l} \right] = \frac{Q^2 T^2}{ML^2}. \quad (\text{B.14})$$

No Sistema Internacional de unidades, as unidades de capacitância são as mesmas de carga (Coulomb) por tensão (Volt), denominada de farad (F) em homenagem a Faraday,

$$F = \frac{C}{V}. \quad (\text{B.15})$$

Interessante observar que a introdução do farad como unidade da capacitância em (B.12) nos permite expressar as unidades SI da permissividade ϵ_0 como farad por metro. Esta **excelente simulação** mostra as propriedades básicas de um capacitor (se preciso, clique na figura do capacitor; é necessário ajustar a tensão da bateria, movendo o botão, para carregar o capacitor).

Se tem potencial elétrico, $V = \phi_+ - \phi_-$ neste exemplo, então tem energia potencial. De acordo com a Sec. 2.4, uma carga infinitesimal dQ na presença deste potencial V terá a energia potencial $V dQ$. Somando tudo,

$$U = \int_{Q=0}^Q V dQ = \frac{1}{C} Q dQ = \frac{Q^2}{2C}, \quad (\text{B.16})$$

é a energia potencial armazenada num capacitor. A similaridade com a energia potencial elástica, $kx^2/2$, é marcante; a carga Q faz o papel da deformação x da mola, $Q \sim x$, e o inverso da capacitância faz o papel da constante de mola k , $1/C \sim k$.

A Figura B.3 mostra dois capacitores em duas configurações: em série e em paralelo. Seja $V = \phi_b - \phi_a$ a tensão entre os terminais. A tensão em cada capacitor é Q_i/C_i . Quando os capacitores estão em série, $Q_1 = Q_2$. Então,

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \implies \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad (\text{B.17})$$

onde C é a capacitância equivalente. Capacitores em série se comportam como resistores em paralelo. Quando os capacitores estão em paralelo, $Q = Q_1 + Q_2$ é a carga total (conservada). Assim,

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C}. \quad (\text{B.18})$$

Da conservação da carga temos

$$Q = Q_1 + Q_2 = VC_1 + VC_2 = VC \implies C = C_1 + C_2. \quad (\text{B.19})$$

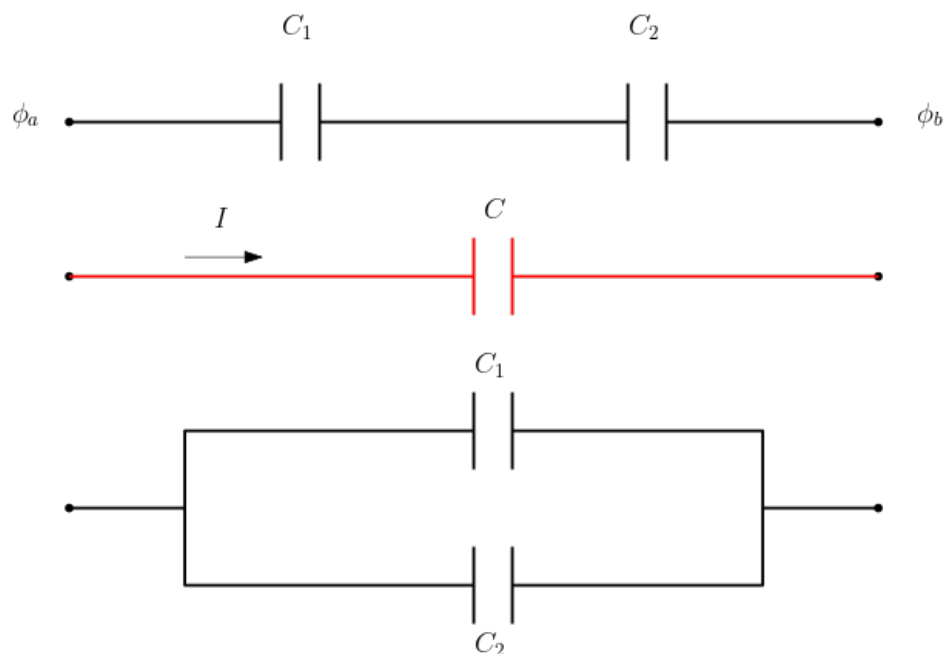


Figura B.3: Capacitores em série (acima) e em paralelo (abaixo). O capacitor equivalente é exibido na região central.

Portanto, capacitores em paralelo se comportam como resistores em série.

B.3 Indutor

A lei de Faraday (4.7) estabelece que uma corrente elétrica (variando no tempo) passando por uma bobina cria um campo magnético de forma a aniquilar esta corrente. Em muitos materiais condutores, o fluxo magnético Φ criado é diretamente proporcional à corrente I ,

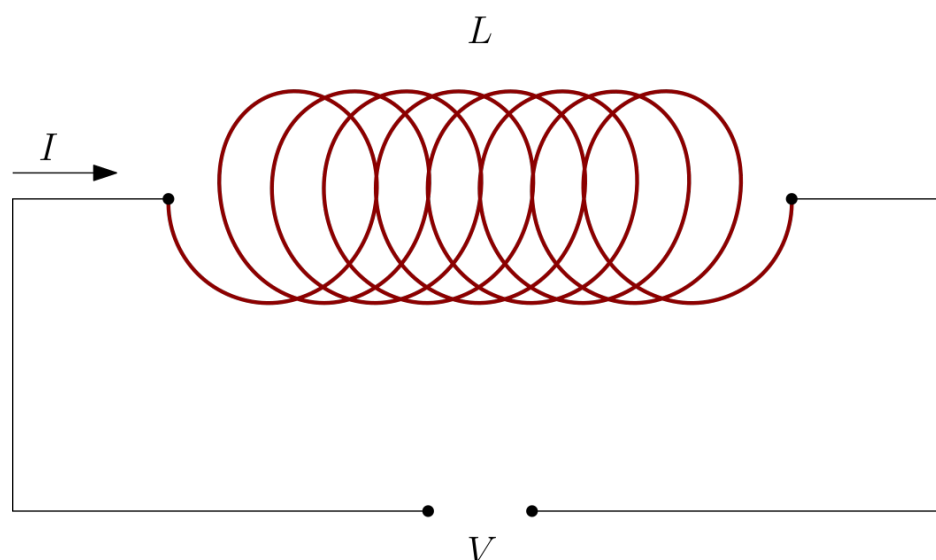
$$\Phi = -L I. \quad (\text{B.20})$$

A quantidade L é denominada de indutância. O dispositivo mostrado na Figura B.4 é um indutor. Ele tem a função de controlar a rapidez da corrente elétrica. As dimensões de indutância são (verifique)

$$[L] = \left[\frac{\Phi}{I} \right] = \frac{\text{ML}^2}{\text{Q}^2}. \quad (\text{B.21})$$

A tensão V entre os terminais do indutor de indutância L mostrado na Figura B.4 é proporcional à variação do fluxo magnético, de acordo com a lei de Faraday (4.7),

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}. \quad (\text{B.22})$$

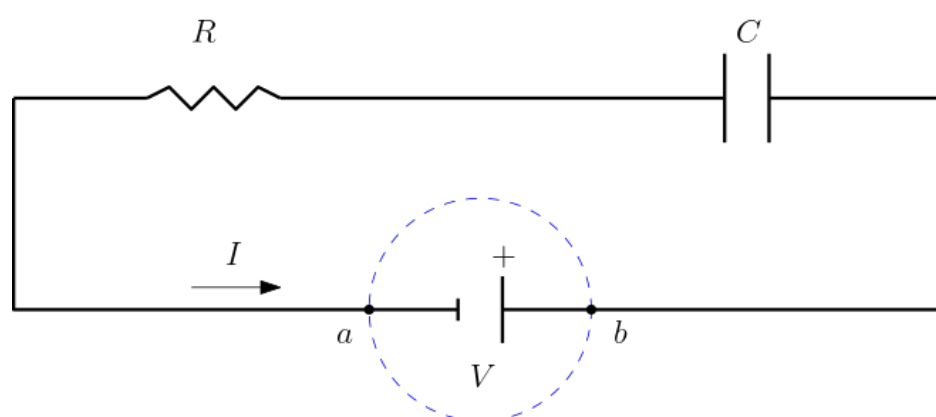
Figura B.4: Indutor de capacitância L .

As unidades de indutância no Sistema Internacional (SI) é volts vezes segundo por ampere, denominada de Henry (H):

$$H \equiv \frac{V \cdot s}{A}. \quad (B.23)$$

A indutância equivalente se comporta com a resistência equivalente: soma das indutâncias em série e a soma dos inversos das indutâncias em paralelo (verifique).

B.4 Circuito RC

Figura B.5: Circuito formado por um resistor R , um capacitor C e um gerador de tensão V .

A Figura B.5 mostra um circuito RC formado por um resistor de resistência R , um capacitor de capacidade C e um gerador de tensão (bateria) V . O elemento dentro do

círculo tracejado representa uma fonte de tensão (uma bateria ou um gerador). No entanto, desconsidere essa fonte no momento e preste atenção na tensão V entre os terminais a e b desse circuito. Pela conservação da carga elétrica, a tensão V deve ser a soma das tensões no resistor (RI) e no capacitor (Q/C),

$$V = RI + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad (\text{B.24})$$

onde substituímos corrente pela variação temporal de carga. A tensão $V = 0$ é o equivalente a ligar diretamente os terminais a e b . Como varia a carga elétrica nesta condição (circuito fechado)? A EDO em (B.24),

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = 0, \quad \tau = RC, \quad (\text{B.25})$$

é a EDO da exponencial, a única função cuja derivada é proporcional a ela mesmo. Portanto, a carga decai exponencialmente no tempo (verifique),

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC. \quad (\text{B.26})$$

Observe que o parâmetro $\tau = RC$ tem dimensões de tempo (verifique),

$$[\tau] = [RC] = \text{T}, \quad (\text{B.27})$$

onde usamos as dimensões de resistência dadas em (B.2) e de capacitância dadas em (B.14). O parâmetro $\tau = RC$ é o tempo característico de um circuito RC, quando a carga diminui para cerca de 37% de seu valor original.

B.5 Circuito RLC

A Figura B.6 mostra um circuito RLC formado por um resistor de resistência R , um indutor de indutância L e um capacitor de capacidade C . O elemento dentro do círculo tracejado representa uma fonte de tensão (uma bateria ou um gerador), fornecendo uma tensão V , a qual pode variar no tempo. Pela conservação da carga elétrica, a tensão V deve ser a soma das tensões no resistor (RI), no indutor ($L\dot{I} = L\ddot{Q}$) e no capacitor (Q/C),

$$V = RI + \frac{Q}{C} + L\dot{I} = L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad (\text{B.28})$$

onde substituímos corrente pela variação temporal de carga. Conhecendo como a tensão externa $V(t)$ varia no tempo, esta equação diferencial ordinário (EDO) de segunda ordem

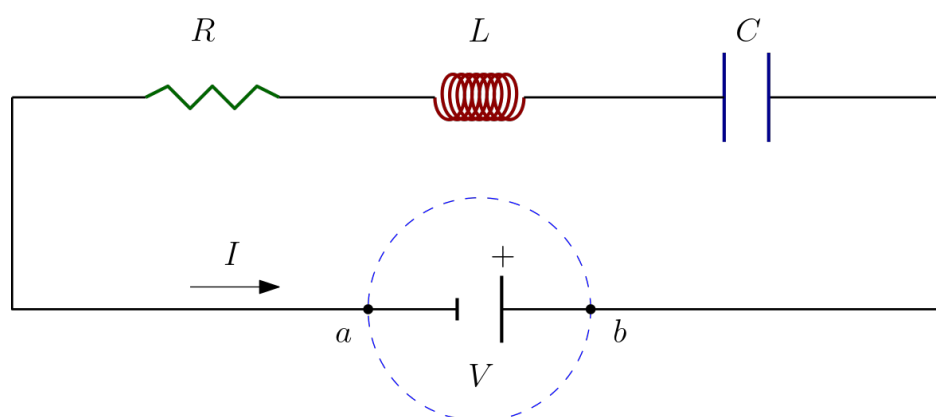


Figura B.6: Circuito formado por um resistor R , um indutor L e um capacitor C .

determina o comportamento da carga elétrica $Q(t)$.

A EDO (B.28) é idêntica à EDO que descreve o movimento de uma massa m presa a uma mola de constante k imersa num fluido de constante b , sob a ação de uma força externa. A carga elétrica faz o papel da deformação da mola $x(t)$ (e posição do objeto preso à mola); a indutância L faz o papel da massa (inercial) m ; a capacitância C faz o papel da constante de mola k e a resistência R faz o papel do fluido b . Assim, o resistor tem a função de amortecimento da carga elétrica. O circuito LC é análogo ao sistema massa mola no vácuo (sem amortecimento).

Apêndice C

Delta de Dirac

O que, comumente, chamamos de “função” $\delta(x)$, introduzida por Dirac em 1930, é algo além, uma “função generalizada” ou, mais precisamente, uma **distribuição**, definida por

$$\delta(x - a)[\phi] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x - a) dx = \phi(a). \quad (\text{C.1})$$

Note que precisamos de uma função auxiliar (ϕ) para revelar a ação da distribuição. A função arbitrária $\phi(x)$, conhecida como **função suporte**, precisa possuir duas propriedades:

1. ser suave e possuir todas as suas derivadas (ser analítica de classe infinita);
2. ter um suporte compacto, ou seja, ser igual a zero fora de um intervalo limitado.

A distribuição definida acima tem algumas propriedades gerais, independentes de ser a delta de Dirac:

1. ela é um funcional linear (transforma funções em números),

$$\delta[\alpha \phi + \beta \psi] = \alpha \delta[\phi] + \beta \delta[\psi], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad (\text{C.2})$$

2. a derivada dela é outra distribuição,

$$\delta'[\phi] = -\delta[\phi']; \quad (\text{C.3})$$

3. ela é homogênea de grau um (negativo) e uma função par,

$$\delta(\alpha x)[\phi] = \frac{\delta(x)[\phi]}{|\alpha|}; \quad (\text{C.4})$$

4. a composição dela com uma função $g(x)$ é

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad g(x_i) = 0, \quad g'(x_i) \neq 0, \quad (\text{C.5})$$

onde as raízes x_i de $g(x)$ devem ser simples;

5. a sua versão tridimensional é o produto de distribuições,

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (\text{C.6})$$

Exercício 15. *Mostre que o laplaciano de $1/r$ ($r \geq 0$) é uma distribuição (delta de Dirac).*

O laplaciano, $\Delta = \nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, da função $1/r$, onde r é a norma do vetor radial, $r = \|\vec{r}\|$, tem uma conexão direta com a distribuição δ de Dirac, a qual é muito útil em Eletromagnetismo. Primeiro é necessário notar que a ação do laplaciano em $1/r$ não está definida somente na origem ($r = 0$),

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \frac{1}{r} = 0, \quad r \neq 0. \quad (\text{C.7})$$

Segundo, como a função suporte ϕ é regular, ela admite uma série de Taylor em torno de $r = 0$,

$$\phi(x, y, z) = \phi(0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(0) x_i + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + \dots \quad (\text{C.8})$$

a qual pode ser reescrita em termos das coordenadas esféricas na forma

$$\phi(r, \Omega) = \phi(0) + f_1(\Omega) r + f_2(\Omega) r^2 + \dots \quad (\text{C.9})$$

onde Ω representa as coordenadas angulares. Terceiro, precisamos de um processo de regularização,

$$r_\eta = \sqrt{r^2 + \eta^2}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} r_\eta = r. \quad (\text{C.10})$$

Assim,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \nabla^2 \frac{1}{r_\eta} = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{3\eta^2}{r_\eta^5}. \quad (\text{C.11})$$

a qual está definida em $r = 0$. Desta forma verificaremos que a ação do laplaciano em $1/r$

se comporta como uma distribuição,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} [\phi] &= \int_{\mathbb{R}^3} dV \phi \nabla^2 \frac{1}{r} = \int_{\mathbb{R}^3/S^2} dV \phi \nabla^2 \frac{1}{r} + \int_{S^2} dV \phi \nabla^2 \frac{1}{r} = \\ & \int_{S^2} dV \phi \nabla^2 \frac{1}{r} = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{S^2} dV \phi(r, \Omega) \frac{3\eta^2}{r^5}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Uma pausa para alguns esclarecimentos sobre os procedimentos de integração utilizados até aqui. O espaço de integração \mathbb{R}^3 foi dividido em duas regiões: uma limitada por uma esfera unitária S^2 centrada na origem $r = 0$ e o complemento \mathbb{R}^3/S^2 , onde a ação do laplaciano é nula. Para continuarmos, trocaremos na última equação a função suporte ϕ pela sua série de Taylor em torno de $r = 0$ e o elemento de volume por $dV = dr da$, com o elemento de área $da = r^2 d\Omega$, onde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ é o ângulo sólido compreendido pela área da (veja a Sec. 2.5.1),

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} [\phi] &= -\phi(0) \int_{\partial S^2} d\Omega \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^1 dr \frac{3\eta^2 r^2}{(r^2 + \eta^2)^{5/2}} - \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\partial S^2} d\Omega f_k(\Omega) \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^1 dr \frac{3\eta^2 r^{2+k}}{(r^2 + \eta^2)^{5/2}} = -4\pi \phi(0). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Note que os limites devem ser executados após as integrações (uma integral cria funções novas). A primeira integral radial tem uma forma simples,

$$\int_0^1 dr \frac{3\eta^2 r^2}{(r^2 + \eta^2)^{5/2}} = \frac{1}{(1 + \eta^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.14})$$

Os termos de potências ímpares na segunda integral radial são proporcionais a η^{k+1} e aqueles de potências pares são proporcionais a η^2 , o que anula completamente a contribuição desta segunda integral, após a passagem do limite $\eta \rightarrow 0$. Desta forma, interpretamos a ação do laplaciano em $1/r$: se comporta como uma distribuição (tridimensional), conhecida como delta de Dirac,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r) = -4\pi \delta(\vec{r}), \quad r \geq 0. \quad (\text{C.15})$$

Apêndice D

Campos e Operadores

D.1 Campos

Um campo é uma regra (matemática) para colocar um objeto em um lugar. Quando esse objeto é um número, o campo é escalar. Por exemplo, a função $\phi = \phi(x, y, z)$ definida em todo o espaço tridimensional (exceto na origem), dada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (\text{D.1})$$

onde C é uma constante, é um campo escalar, pois dada uma posição (x, y, z) a função $\phi(x, y, z)$ sempre retorna um número (um escalar). Esse exemplo é interessante por ter o mesmo valor sobre uma superfície esférica de raio $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Por isso, ele é denominado de um campo escalar com simetria esférica. Essa simetria esférica pode ser melhor visualizada introduzindo a coordenada radial r ,

$$r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (\text{D.2})$$

onde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é o vetor posição e introduzimos subíndices para indicar uma de suas coordenadas, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Usando esta coordenada radial, o campo escalar (D.1) torna-se (**verifique**)

$$\phi(r) = \frac{C}{r}. \quad (\text{D.3})$$

Nesta forma, a simetria esférica é imediata.

Quando o objeto é um vetor, o campo é vetorial. Por exemplo, a função vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = -C \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (\text{D.4})$$

onde C é uma constante, é um campo vetorial, pois dada uma posição (x, y, z) a função vetorial $\vec{F}(x, y, z)$ sempre retorna um vetor, o qual é pregado naquela posição. Esse campo vetorial também possui a simetria esférica, a qual é evidenciada reescrevendo o campo vetorial (D.4) em termos da coordenada radial (D.2), (**verifique**)

$$\vec{F}(r) = -C \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (\text{D.5})$$

onde $\hat{r} = \vec{r}/r$ é o versor radial. Nesta forma a simetria esférica é imediata.

D.2 Circulação

Dado um campo vetorial \vec{F} e uma curva fechada γ , a integral de caminho

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (\text{D.6})$$

onde $d\vec{r}$ é o vetor tangente à curva γ , é denominada de circulação (ou circuitação). A circulação “soma” todas as projeções do campo vetorial na direção tangente ($d\vec{r}$) a uma curva. A circulação numa curva aberta é denominada de trabalho mecânico quando o campo vetorial é a força resultante num determinado sistema mecânico. Caso a circulação numa curva fechada for nula, o sistema será conservativo (a energia mecânica se conservará).

Por definição, um campo vetorial conservativo \vec{F} tem sua circulação nula, $\Gamma = 0$, numa curva fechada γ . Esta condição nos permite afirmar que um campo vetorial conservativo \vec{F} é literalmente derivado de um campo escalar ϕ , isto é,

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi \implies \Gamma = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} d\phi = 0. \quad (\text{D.7})$$

A última igualdade (igual a zero) é consequência do ponto inicial da curva fechada γ ser idêntico ao ponto final. Esse teorema é muito útil em Mecânica e Eletromagnetismo. O campo escalar ϕ é denominado de “potencial” do campo vetorial conservativo $\vec{\nabla}\phi$.

Em geral, o vetor tangente $d\vec{r}$ é um campo vetorial na região da curva γ . A forma funcional desse campo vetorial $d\vec{r}$, dependente da geometria da curva, deve ser explicitada para que a circulação possa ser calculada.

D.3 Fluxo

A integral de superfície

$$\Phi = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{a} \quad (\text{D.8})$$

é denominada de fluxo do campo vetorial \vec{F} através da superfície A (aberta ou fechada). O fluxo soma as projeções do campo vetorial \vec{F} na direção do versor $d\vec{a}$, perpendicular a uma dada superfície. Caso a superfície seja plana, o fluxo será máximo na direção perpendicular a esta superfície. Faça uma analogia com um jato de água direcionado a uma janela aberta. Caso esse jato seja paralelo à janela, nenhuma água passará por ela. Nessa analogia, o campo vetorial representa o jato de água.

Em geral, o versor perpendicular $d\vec{a}$ é um campo vetorial na região da superfície A . Sua forma funcional, dependente da geometria da superfície, deve ser explicitada para que o fluxo possa ser calculado (via uma integral múltipla).

D.4 Operadores

D.4.1 Gradiente

Considerando um campo escalar qualquer $\phi = \phi(x, y, z)$, a sua diferencial (total) é (por definição)

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}, \quad (\text{D.9})$$

onde $\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$ representa o produto escalar (base ortonormal) entre os vetores

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}, \quad \vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{D.10})$$

Esse último vetor $\vec{\nabla}$ é um operador denominado de gradiente (em coordenadas cartesianas). O gradiente atua em um campo escalar e produz um campo vetorial.

Note que o valor absoluto da diferencial $d\phi$ em (D.9) será máximo quando o gradiente $\vec{\nabla}\phi$ estiver alinhado com o deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$. O significado geométrico é imediato: o gradiente aponta a direção de maior crescimento.

Considere o exemplo de campo escalar (D.1). O gradiente daquele campo escalar é o campo vetorial (D.4), como podemos verificar imediatamente (**verifique**). Para tal, basta usar as derivadas

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -C \frac{x_i}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -C \frac{x_i}{r^3}. \quad (\text{D.11})$$

Existem campos escalares com simetrias altas. A mais alta é a simetria esférica, seguida

da simetria cilíndrica, ambas muito importantes no Eletromagnetismo. Na simetria esférica, o campo escalar depende apenas da coordenada radial r , a qual é o raio de uma casca esférica centrada na origem. O campo escalar (D.3) é um exemplo típico de simetria esférica. Na simetria cilíndrica, o campo escalar depende apenas da coordenada radial ρ , a qual é o raio de uma casca cilíndrica centrada na origem. Esta coordenada radial ρ fica no plano perpendicular ao eixo do cilindro (geralmente o eixo Z). Em geral o gradiente tem sempre três componentes em qualquer sistema de coordenadas tridimensional. No entanto, quando há simetrias nos campos em que o gradiente atua, nem sempre todas as componentes do gradiente são usadas. Nos casos de campos escalares com simetrias esférica e cilíndrica, o gradiente pode ser reescrito usando apenas uma componente (a radial),

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (\text{D.12})$$

em coordenadas esféricas e cilíndricas, respectivamente. Note que usando um sistema de coordenadas adequado à simetria do campo escalar, a operação de tomar o gradiente desse campo torna-se muito mais simples. Por exemplo, o gradiente do campo escalar (D.3), escrito em coordenadas esféricas, é imediata,

$$\vec{\nabla} \phi(r) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C}{r} \right) = -C \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (\text{D.13})$$

D.4.2 Divergente

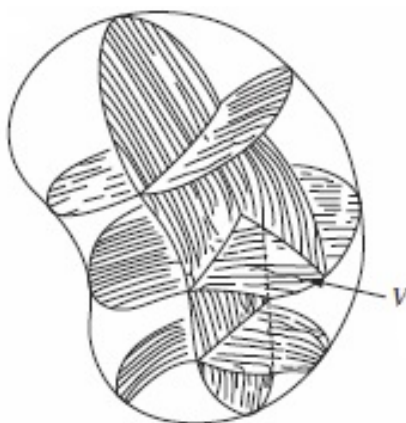


Figura D.1: Um volume finito subdividido em muitos volumes menores.

A Figura D.1 mostra um volume finito subdividido em um número infinito de volumes infinitesimais V (envolto pela área A). A soma de todos os fluxos nestes volumes infinitesimais, por unidade de volume, é a divergência $\text{div } \vec{E}$ do campo vetorial \vec{E} . Ou seja, o

divergente é o limite de fluxo por unidade de volume,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{A \supset V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (\text{D.14})$$

Veja a definição de fluxo na Sec. D.3. Note que o divergente resulta em um campo escalar.

Desta forma, podemos associar uma divergência nula numa posição com a ausência de fluxo, ou seja, com a ausência de uma fonte, pois para se ter um fluxo de qualquer coisa é preciso ter uma fonte (que cria tais coisas). Igualmente, uma divergência não nula numa posição indica a presença de uma fonte naquela posição. Portanto a interpretação geométrica (ou física) do divergente é: ele permite verificarmos localmente a presença (ou não) de uma fonte.

A última igualdade na definição (D.14) do divergente estabelece a sua forma operacional, ou seja, o divergente é calculado através do produto escalar entre o gradiente e o campo vetorial, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Como exemplo, o divergente do campo vetorial dado em (D.4) é nulo em todo o espaço, exceto na origem (**verifique**),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\frac{C}{r^3} + C \frac{3x_i^2}{r^5}. \quad (\text{D.15})$$

Este resultado indica que a fonte deste campo vetorial só pode estar na origem.

Igualmente à observação feita na seção anterior sobre usar o sistema de coordenadas adaptado à simetria dos campos, o divergente de campos dependentes apenas da coordenada radial (esférica ou cilíndrica) pode ser escrito usando somente uma componente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r}, \quad \vec{F} = F_r(r) \hat{r}, \quad (\text{D.16})$$

em coordenadas esféricas, e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho}, \quad \vec{F} = F_\rho(\rho) \hat{\rho}, \quad (\text{D.17})$$

em coordenadas cilíndricas. Por exemplo, o campo vetorial (D.5) tem simetria esférica. Então seu divergente é calculado facilmente em coordenadas esféricas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r^2 \frac{C}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-C) = 0, \quad (\text{D.18})$$

pois C é uma constante.

D.4.3 Rotacional

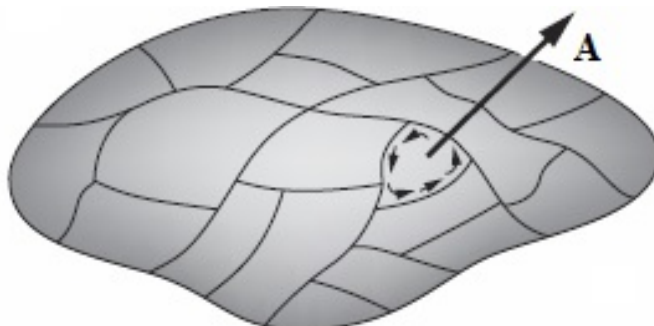


Figura D.2: Uma área finita subdividida em muitas áreas menores.

A Figura D.2 mostra uma área finita subdividida em um número infinito de áreas infinitesimais A (envolta pela curva C , indicada pelas setas). A soma de todas as circulações nestas curvas infinitesimais, por unidade de área, é o rotacional $\text{rot } \vec{E}$ do campo vetorial \vec{E} . Ou seja, o rotacional é circulação por unidade de área,

$$\text{rot } \vec{E} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{C \supset A} \vec{E} \cdot d\vec{r} \hat{n} = \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (\text{D.19})$$

Veja a definição de circulação na Sec. D.2. Note que o rotacional resulta em um campo vetorial. O versor \hat{n} está numa direção unicamente determinada pelo processo limite.

A última igualdade na definição (D.19) do rotacional estabelece a sua forma operacional, ou seja, o rotacional é calculado através do produto vetorial entre o gradiente e o campo vetorial, $\vec{\nabla} \times \vec{E}$. Como exemplo, podemos verificar que o rotacional do campo vetorial dado em (D.4) é nulo (**verifique**),

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{D.20})$$

Sugestões: desenvolva o determinante e depois substitua as derivadas parciais e simplifique; para simplificar a notação das derivadas, introduza o comprimento r do vetor posição, como feito no exemplo do cálculo do divergente.

Considerando campos vetoriais com simetrias esférica, da forma $\vec{F} = F_r(r) \hat{r}$, ou cilíndrica, da forma $\vec{F} = F_\rho(\rho) \hat{\rho}$, o rotacional é simplesmente nulo. Campos vetoriais puramente radiais têm rotacional nulo. O campo vetorial dado em (D.5) é radial e, portanto, tem rotacional nulo.

Um campo que tem pelo menos uma das componentes do rotacional não nula é capaz de produzir “redemoinhos” (movimentos circulares). Essa é a sua interpretação geométrica (ou física). Veja [esse vídeo](#) do grupo 3Blue1Brown para literalmente enxergar estas propriedades geométricas do divergente e do rotacional, bem como as noções de fluxo e circulação. Pela metade do vídeo há uma ótima apresentação das propriedades geométricas das equações de Maxwell. No final há exemplos numéricos, igualmente interessantes.

D.5 Teoremas

Campos escalares e vetoriais estão sujeitos a teoremas envolvendo os operadores gradiente, rotacional e divergente. Embora diferentes na aparência, os teoremas seguintes possuem uma propriedade em comum: permitem passarmos uma integração no interior para a borda de uma dada região.

A Figura D.3 mostra uma região 1D dada por uma curva aberta C delimitada pelos pontos terminais A e B . Neste caso esses pontos A e B formam a borda da curva aberta C , expresso matematicamente por $\{A, B\} = \partial C$. Na Figura D.4, a região é uma superfície A (2D) delimitada pelo contorno (borda) C , uma curva fechada, $C = \partial A$. Podemos dizer que a superfície A está apoiada na curva C . Esta superfície A não é necessariamente plana. A Figura D.5 mostra o volume V , uma região 3D, delimitada pela superfície A , a borda $A = \partial V$.

Teorema 1 (Gradiente).
$$\int_{\{A,B\}=\partial C} d\phi = \int_C \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$$

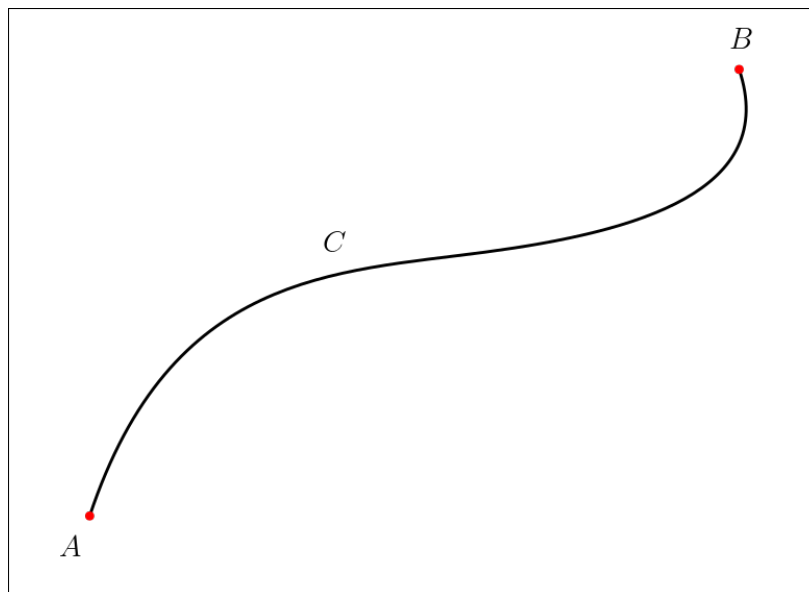


Figura D.3: Curva C e borda, pontos A e B .

Teorema 2 (Rotacional).
$$\int_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

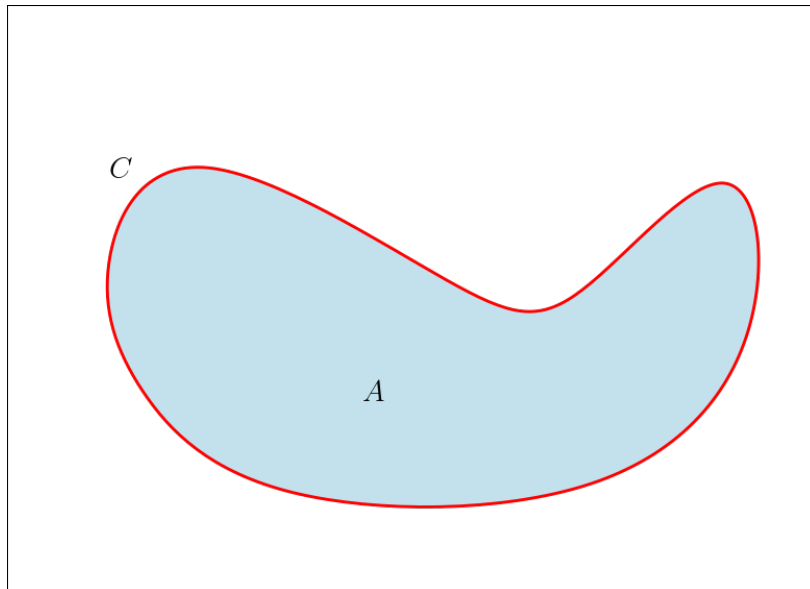


Figura D.4: Superfície A e borda, curva C .

Teorema 3 (Divergente).
$$\int_{A=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

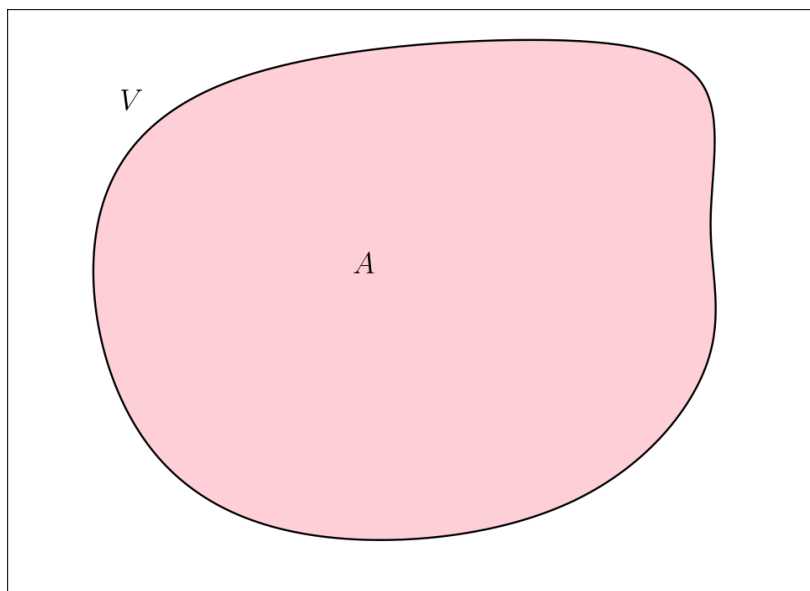


Figura D.5: Volume V e borda, superfície A .

Note o papel dos operadores gradiente, rotacional e divergente em cada um destes três teoremas permitindo a passagem de uma integração no interior para a borda de cada região.

Referências Bibliográficas

- [1] E. M. Purcell and D. J. Morin. *Electricity and Magnetism*. Cambridge, 2013.
- [2] J. C. H. Spence. *Lightspeed*. Oxford, 2020.
- [3] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 1999.