PGF5312 – 1 FUNDAMENTOS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS MÉDICAS

Aula 6 – Domínio de frequências
Parte 3

Paulo R. Costa
Grupo de Dosimetria das Radiações
e Física Médica
Instituto de Física - USP

O que veremos hoje

- A TF DISCRETA (bem simplificado...)
- O ESPECTRO DE FOURIER
- APLICAÇÕES DA TF EM IMAGENS

O que veremos hoje

- A TF DISCRETA (bem simplificado...)
- O ESPECTRO DE FOURIER
- APLICAÇÕES DA TF EM IMAGENS

GRUPO DE DOSIMETRIA DAS RADIAÇÕES e FÍSICA MÉDICA
IFUSP - Instituto de Física da USP

- **O conceito de frequência espacial**

Princípio importante do processamento de imagens:
Independentemente da complexidade do perfil de intensidades de uma imagem ela sempre pode ser decomposta por uma coleção de ondas senoidais e/ou cossenoidais de diferentes amplitudes e frequências

- **Transformada de Fourier e espectro de Fourier**

→Transformada de Fourier 1D

→ são descrições exatas, sem aproximações

→ não há perda de informações

Imagens nos domínios espacial e de frequências

- **Transformada de Fourier e espectro de Fourier**

→Transformada de Fourier 2D

IMAGEM
2D
m x n

→ TF1D de cada linha

↓

Matriz complexa dos coeficientes reais e imaginários

↓

TF1D de cada coluna desta matriz

←

Matriz
complexa (R e I)
de amplitudes associadas
às frequências espaciais

TF discreta

GRUPO DE DOSIMETRIA DAS RADIAÇÕES e FÍSICA MÉDICA
IFUSP - Instituto de Física da USP

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA 2-D E INVERSA

A transformada discreta de Fourier 2-D (DFT) é dada por

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

onde f(x,y) é uma imagem digital de tamanho MxN.

Dada a transformada F(u,v), podemos obter f(x,y) usando a transformada inversa discreta de Fourier (IDFT):

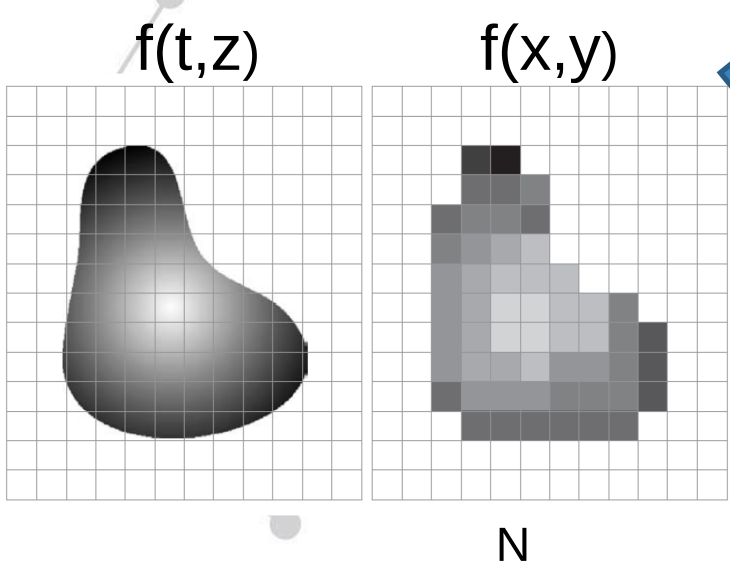
$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

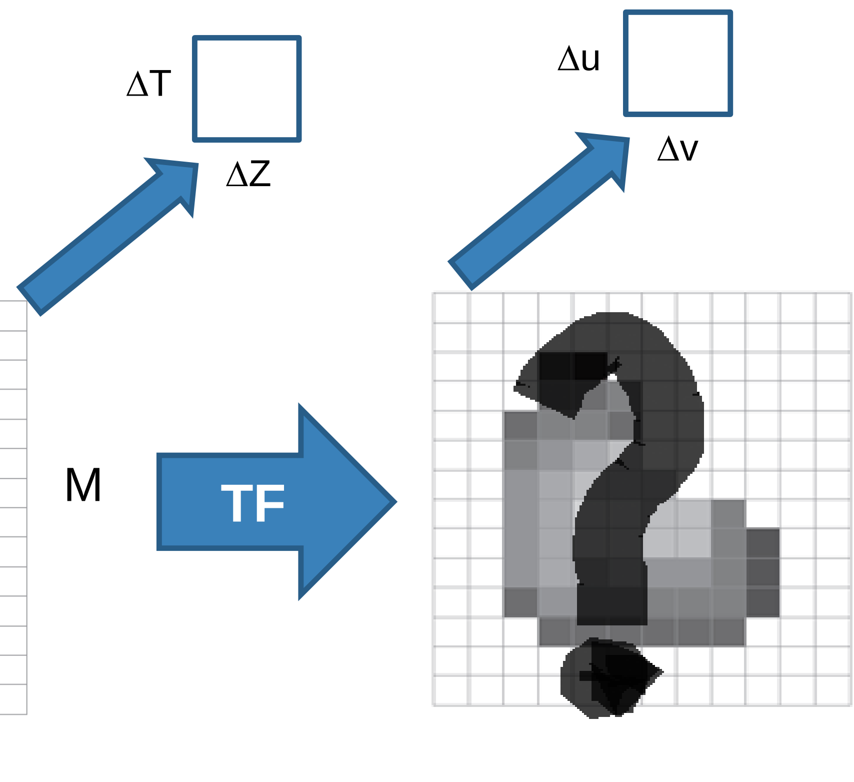
TF discreta

A correspondência entre a amostragem espacial e o intervalo no domínio espectral:

- supondo que uma função contínua f(t,z) é amostrada para formar a imagem digital f(x,y), consistindo de MxN amostras tomadas nas direções t e z
- Sejam ΔT e ΔZ as separações entre as amostras no domínio espacial
- A separação entre as correspondentes amostras no domínio espectral:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} \quad \text{e} \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta Z}$$





Problemas associados à DFT

- *Aliasing*
- Aparecimento de lóbulos laterais
- Truncamento e janelamento
- Posicionamento do zero e erros de fase
- Envoltória da variável frequência
- Unidades e fatores de escala no domínio de frequências

FFT

GRUPO DE DOSIMETRIA DAS RADIAÇÕES e FÍSICA MÉDICA

IFUSP - Instituto de Física da USP

Chapter 7

Fast Fourier Transforms

DOUGLAS F. ELLIOTT
Rockwell International Corporation
Anaheim, California 92803

CHAPTER 12

The Fast Fourier Transform

There are several ways to calculate the discrete Fourier transform (DFT), such as solving simultaneous linear equations or the *correlation* method described in Chapter 8. The Fast Fourier Transform (FFT) is another method for calculating the DFT. While it produces the same result as the other approaches, it is incredibly more efficient, often reducing the computation time by *hundreds*. This is the same improvement as flying in a jet aircraft versus walking! If the FFT were not available, many of the techniques described in this book would not be practical. While the FFT only requires a few dozen lines of code, it is one of the most complicated algorithms in DSP. But don't despair! You can easily use published FFT routines without fully understanding the internal workings.

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)\, e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v)\, e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = \lvert F(u, v) \rvert e^{j\phi(u,v)}$
4) Spectrum	$\lvert F(u, v) \rvert = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = \lvert F(u, v) \rvert^2$
7) Average value	$\overline{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

(Continued)

Fonte: Gonzalez&Woods – 3ª. Ed

Name	Expression(s)
8) Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N)$ $= F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N)$ $= f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \bigstar h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ This equation indicates that inputting $F^*(u, v)$ into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields $MNf^*(x, y)$. Taking the complex conjugate and dividing by MN gives the desired inverse. See Section 4.11.2.

Fonte: Gonzalez&Woolds – 3ª. Ed

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad u = \omega\cos\varphi \quad v = \omega\sin\varphi$
6) Convolution theorem†	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(*Continued*)

Fonte: Gonzalez&Woolds – 3ª. Ed

Name	DFT Pairs
7) Correlation theorem[†]	$f(x,y) \star h(x,y) \Leftrightarrow F^*(u,v)\,H(u,v)$ $f^*(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \star H(u,v)$
8) Discrete unit impulse	$\delta(x,y) \Leftrightarrow 1$
9) Rectangle	$\text{rect}[a,b] \Leftrightarrow ab\dfrac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)}\dfrac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)}e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) Sine	$\sin(2\pi u_0x + 2\pi v_0y) \Leftrightarrow$ $j\dfrac{1}{2}\left[\delta(u+Mu_0, v+Nv_0) - \delta(u-Mu_0, v-Nv_0)\right]$
11) Cosine	$\cos(2\pi u_0x + 2\pi v_0y) \Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{2}\left[\delta(u+Mu_0, v+Nv_0) + \delta(u-Mu_0, v-Nv_0)\right]$
The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by t and z for spatial variables and by μ and ν for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.	
12) *Differentiation* (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty,\pm\infty)=0$.)	$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^m\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t,z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m(j2\pi\nu)^n F(\mu,\nu)$ $\dfrac{\partial^m f(t,z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu,\nu);\ \dfrac{\partial^n f(t,z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu,\nu)$
13) *Gaussian*	$A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow Ae^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$ (A is a constant)

[†] Assumes that the functions have been extended by zero padding. Convolution and correlation are associative, commutative, and distributive.

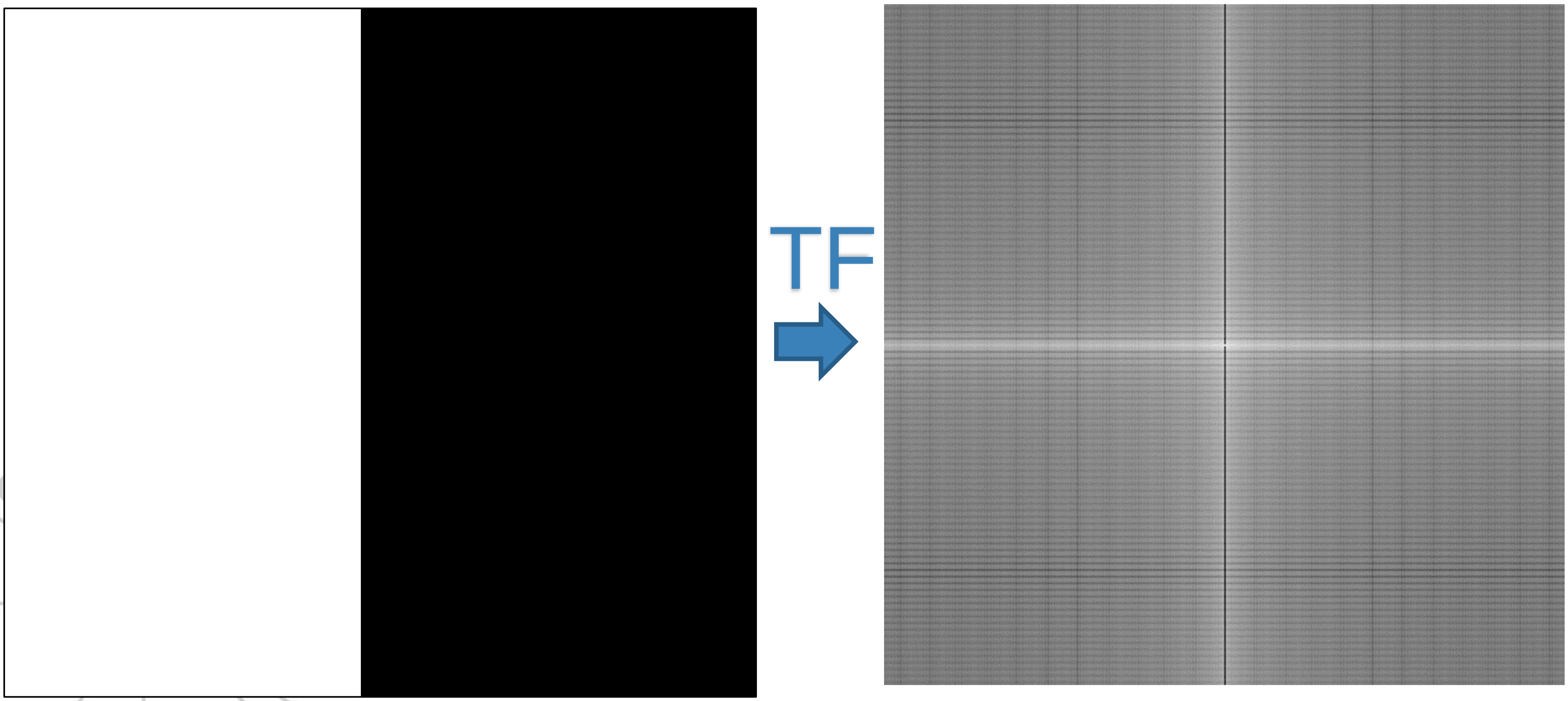
Fonte: Gonzalez&Woolds – 3ª. Ed

O que veremos hoje

- A TF DISCRETA (bem simplificado...)
- O ESPECTRO DE FOURIER
- APLICAÇÕES DA TF EM IMAGENS

Imagens nos domínios espacial e de frequências

- **A transformada de Fourier**

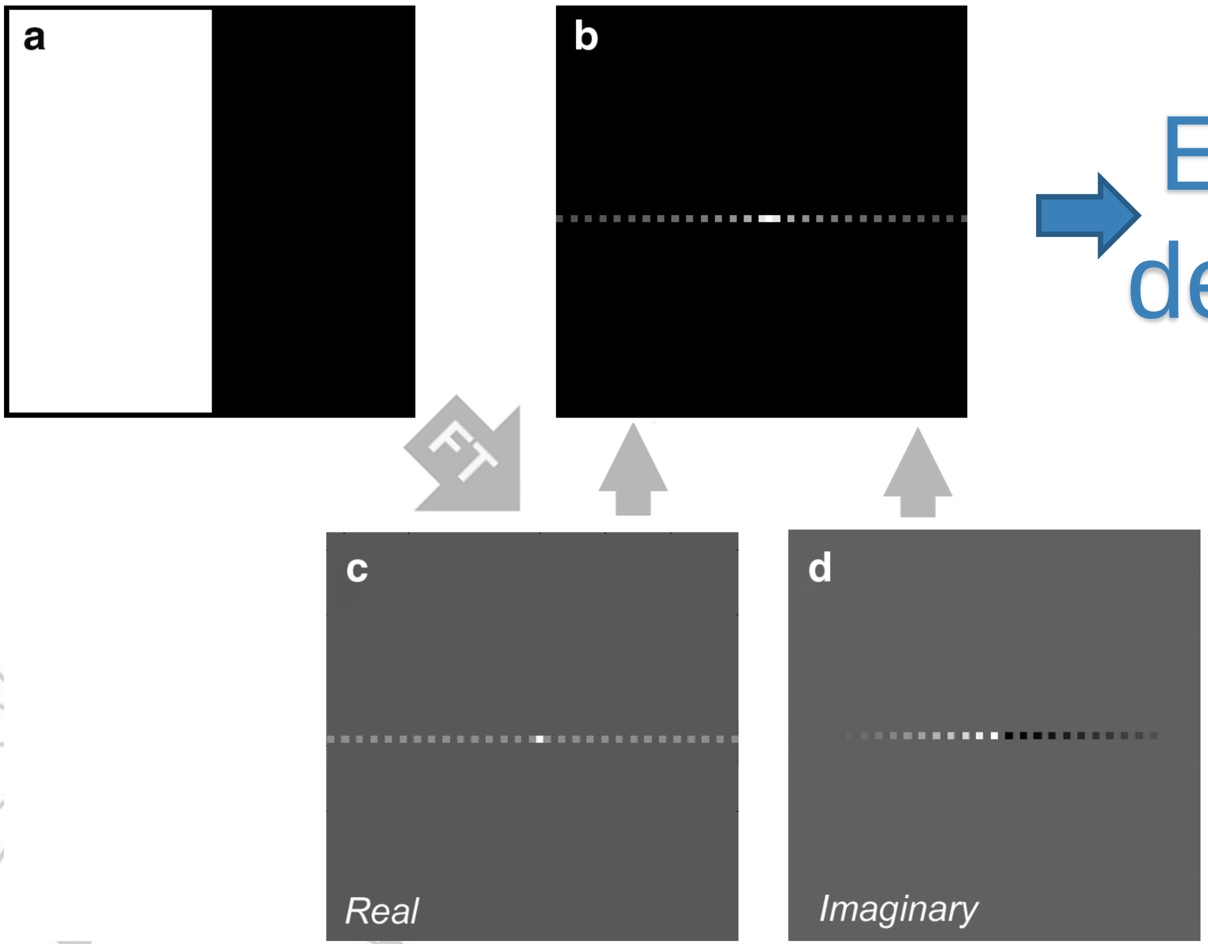


Fonte: Bourne. 2010

- **O espectro de Fourier**

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

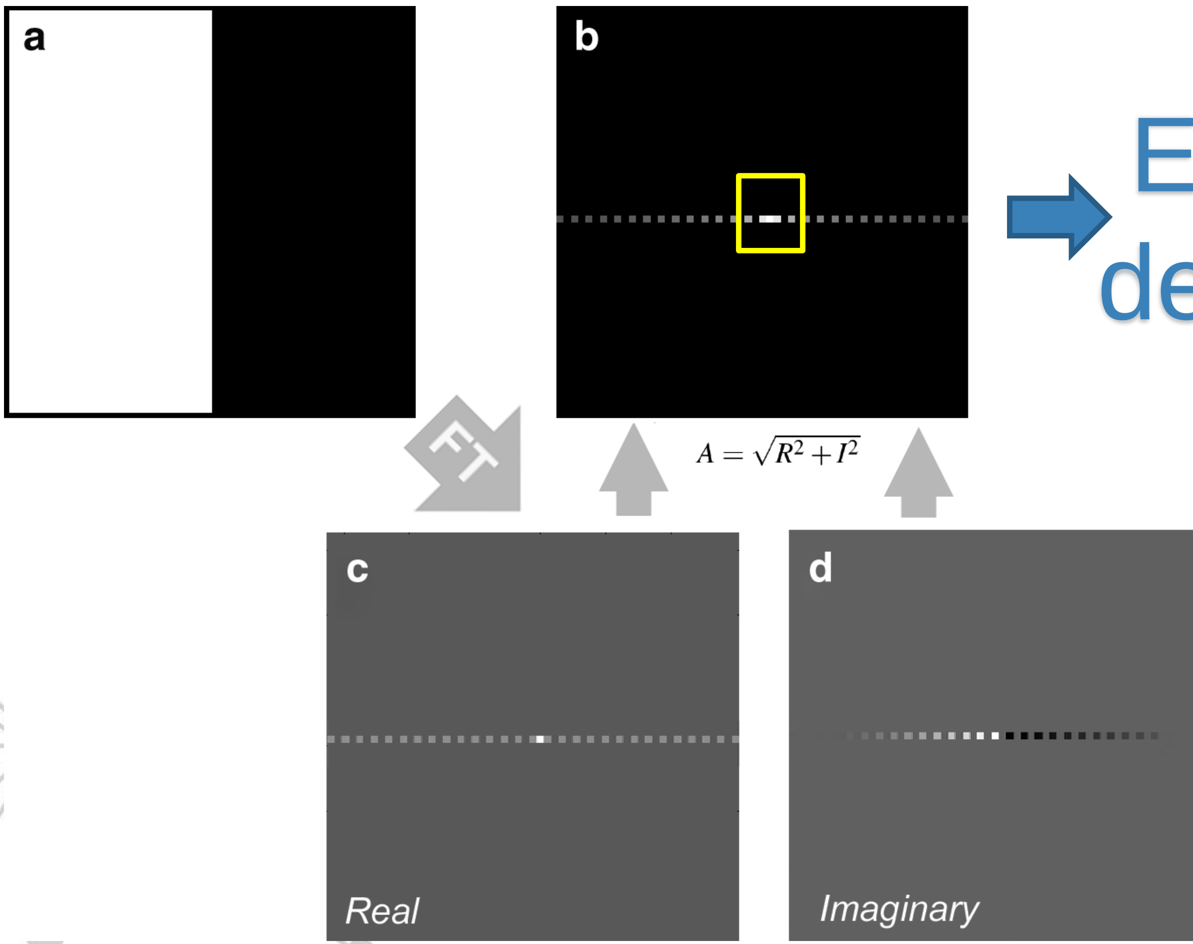
$$R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$$



Espectro de Fourier

Fonte: Bourne. 2010

- **O espectro de Fourier**



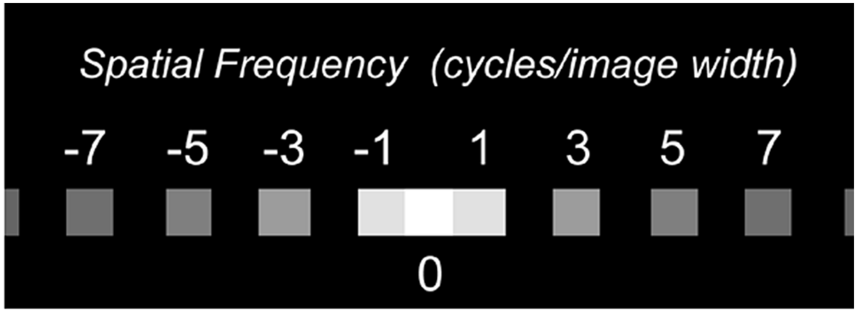
Espectro de Fourier

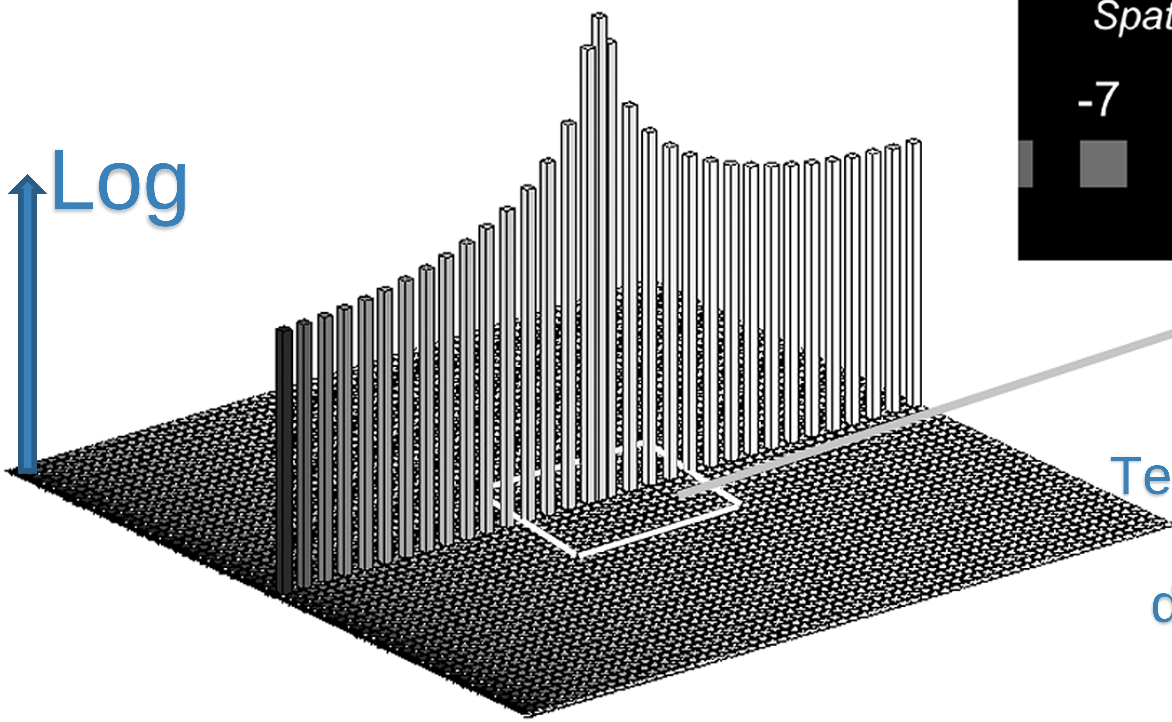
Fonte: Bourne. 2010

Imagens nos domínios espacial e de frequências

GRUPO DE DOSIMETRIA DAS RADIAÇÕES e FÍSICA MÉDICA
IFUSP - Instituto de Física da USP

$$I = sin(\omega x) + \frac{1}{3}sin(3\omega x) + \frac{1}{5}sin(5\omega x) + \frac{1}{7}sin(7\omega x)$$

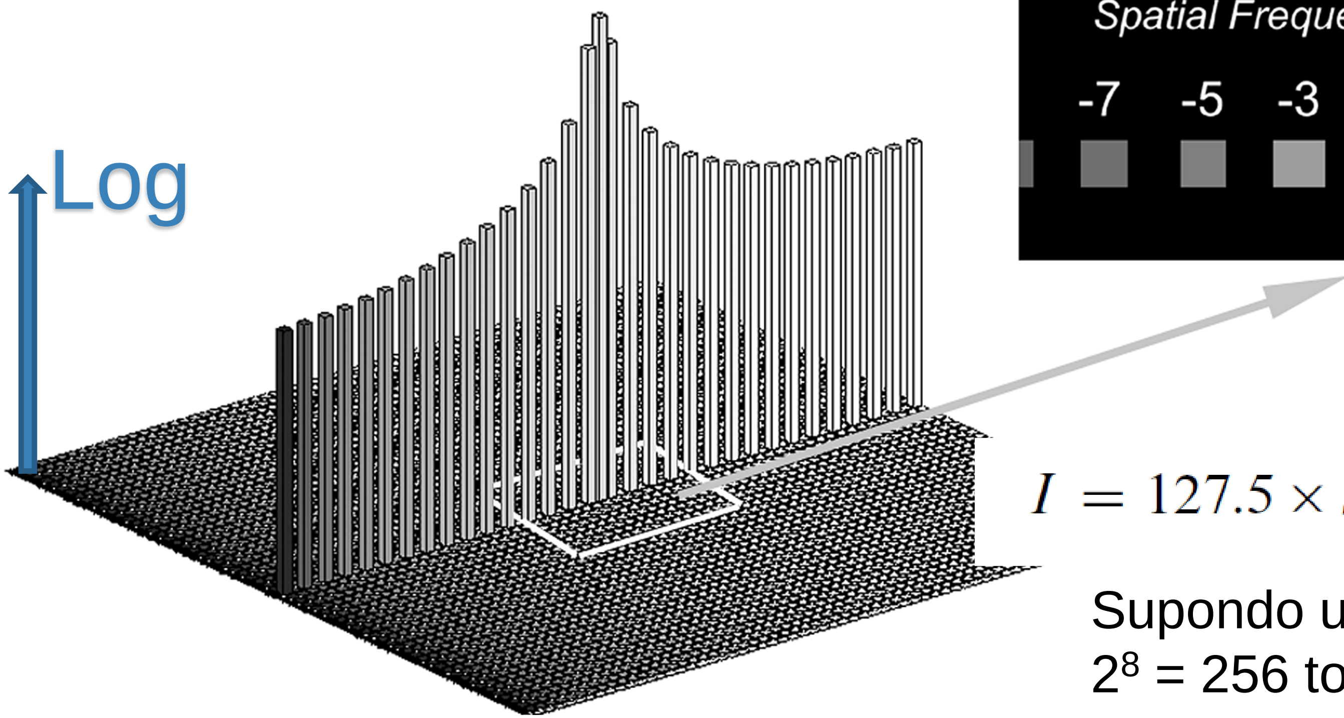


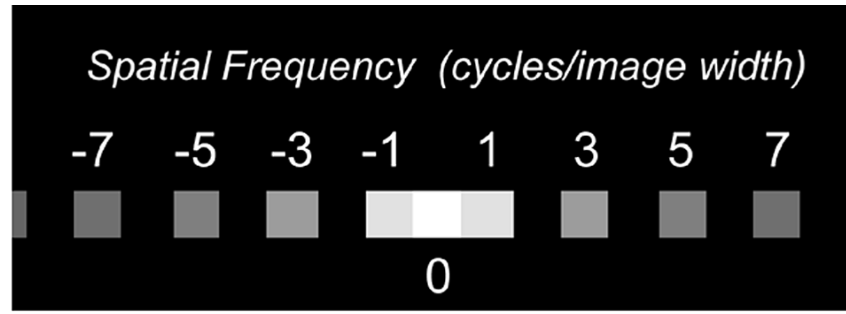


Termo DC ou de frequência 0: Representação da média das intensidades de todos os pixels da imagem original

Fonte: Bourne. 2010

Imagens nos domínios espacial e de frequências





$$I = 127.5 \times sin\left(2\pi\omega\frac{x}{m}\right) + 127.5$$

Supondo uma imagem de 8 bits:
2^8 = 256 tons de cinza
0 – preto
255 - branco

Parte do sinal que não varia espacialmente

127,5 é o valor médio da intensidade dos pixels

Fonte: Bourne. 2010

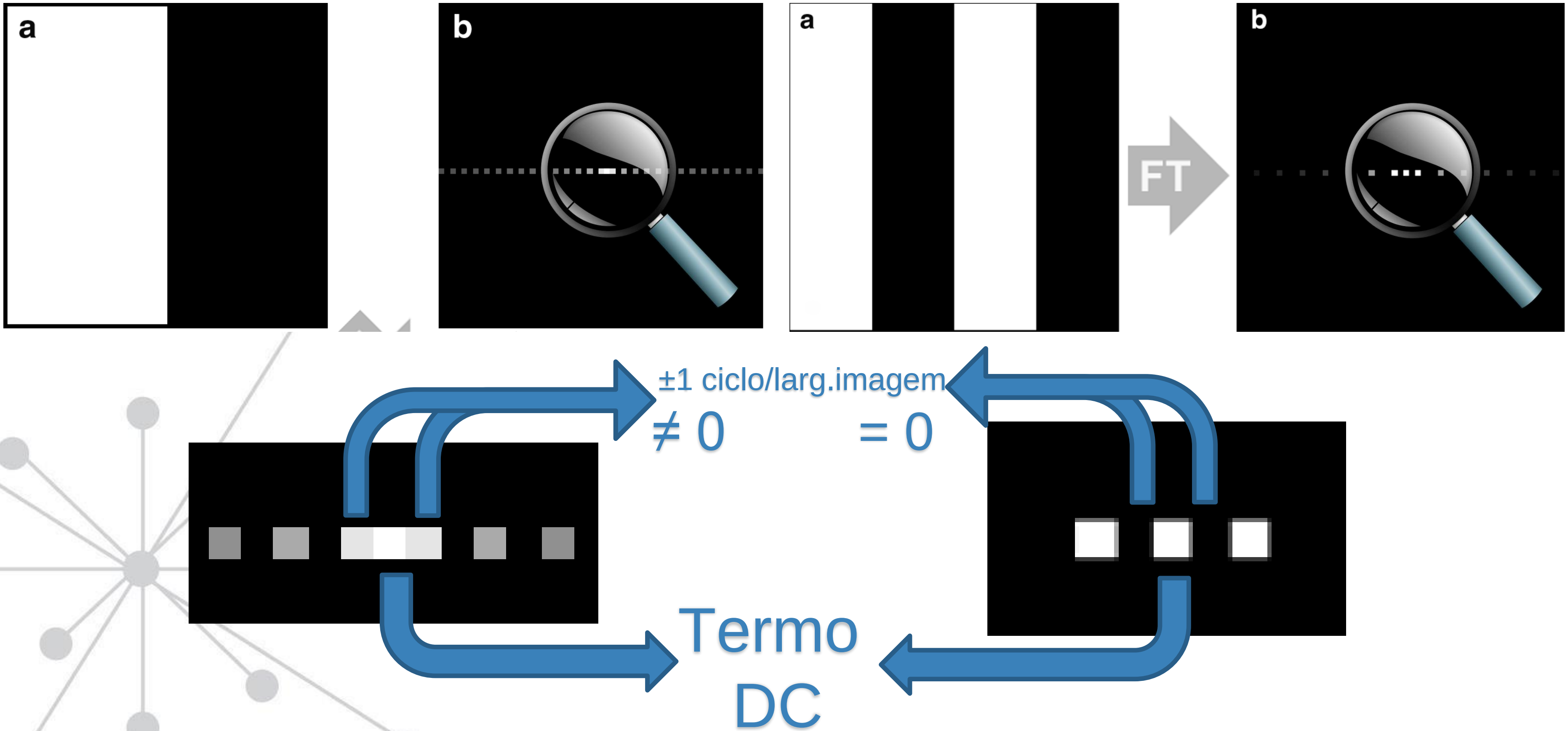
O que veremos hoje

- A TF DISCRETA (bem simplificado...)
- O ESPECTRO DE FOURIER
- APLICAÇÕES DA TF EM IMAGENS

- **Espectro de Fourier de imagens mais complexas**

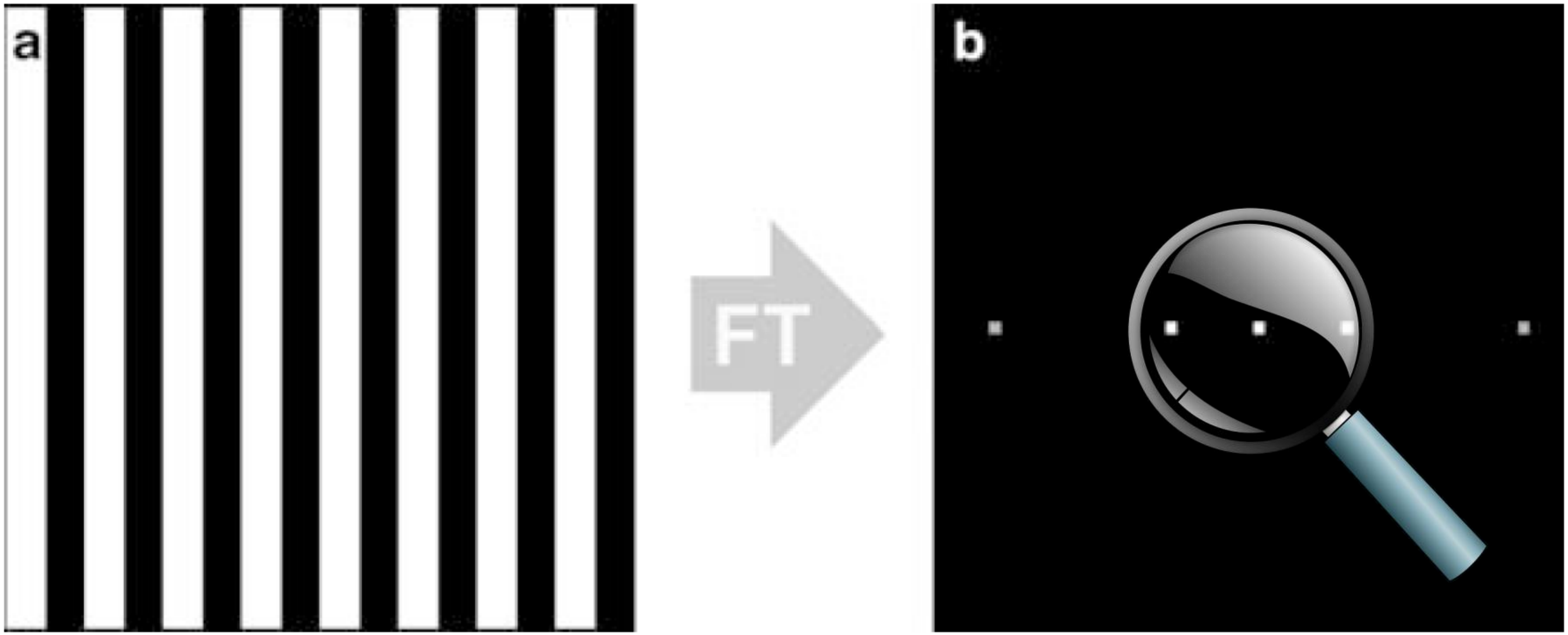
Fonte: Bourne. 2010

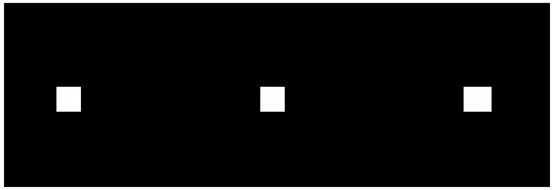
- **Espectro de Fourier de imagens mais complexas**

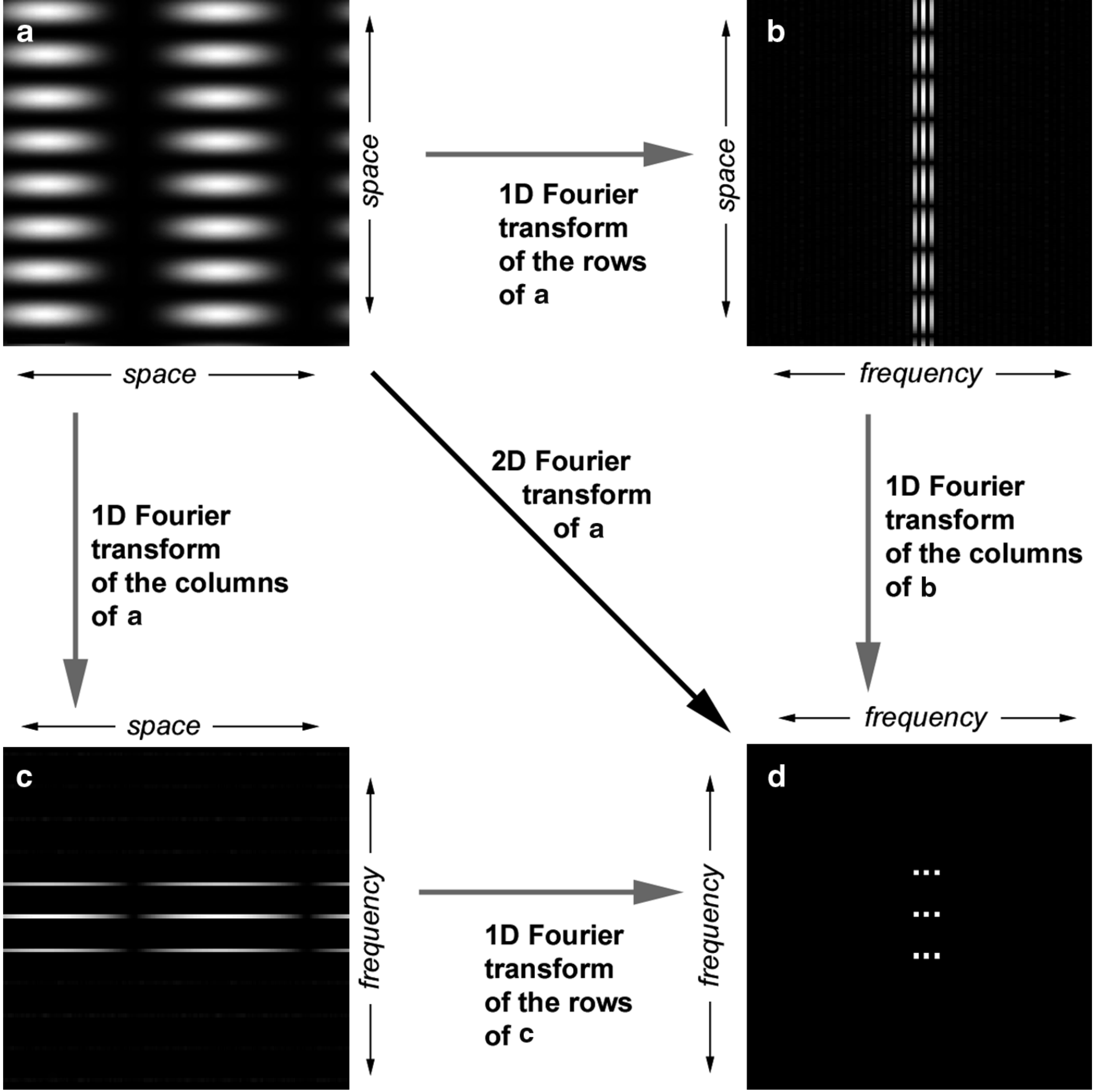


Fonte: Bourne. 2010

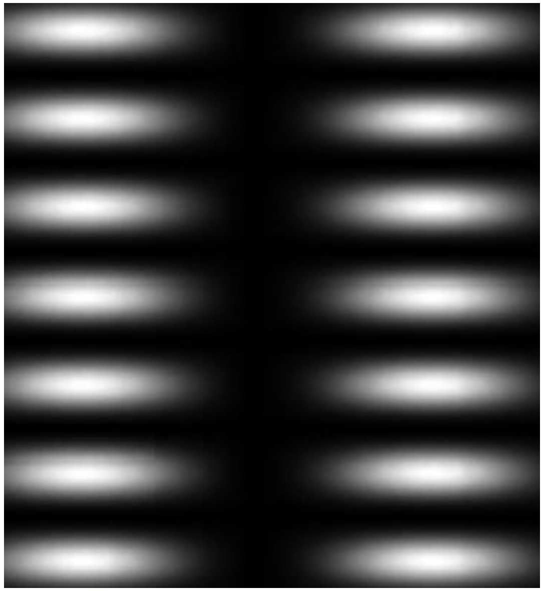
Imagens nos domínios espacial e de frequências

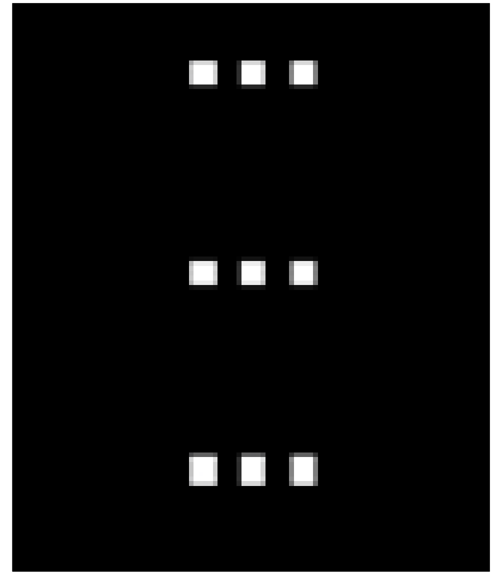





a
b
c
d
space
space
space
space
frequency
frequency
frequency
frequency
1D Fourier transform of the rows of a
1D Fourier transform of the columns of a
2D Fourier transform of a
1D Fourier transform of the columns of b
1D Fourier transform of the rows of c

O espectro de Fourier da de baixo tem que ser mais simples, certo?

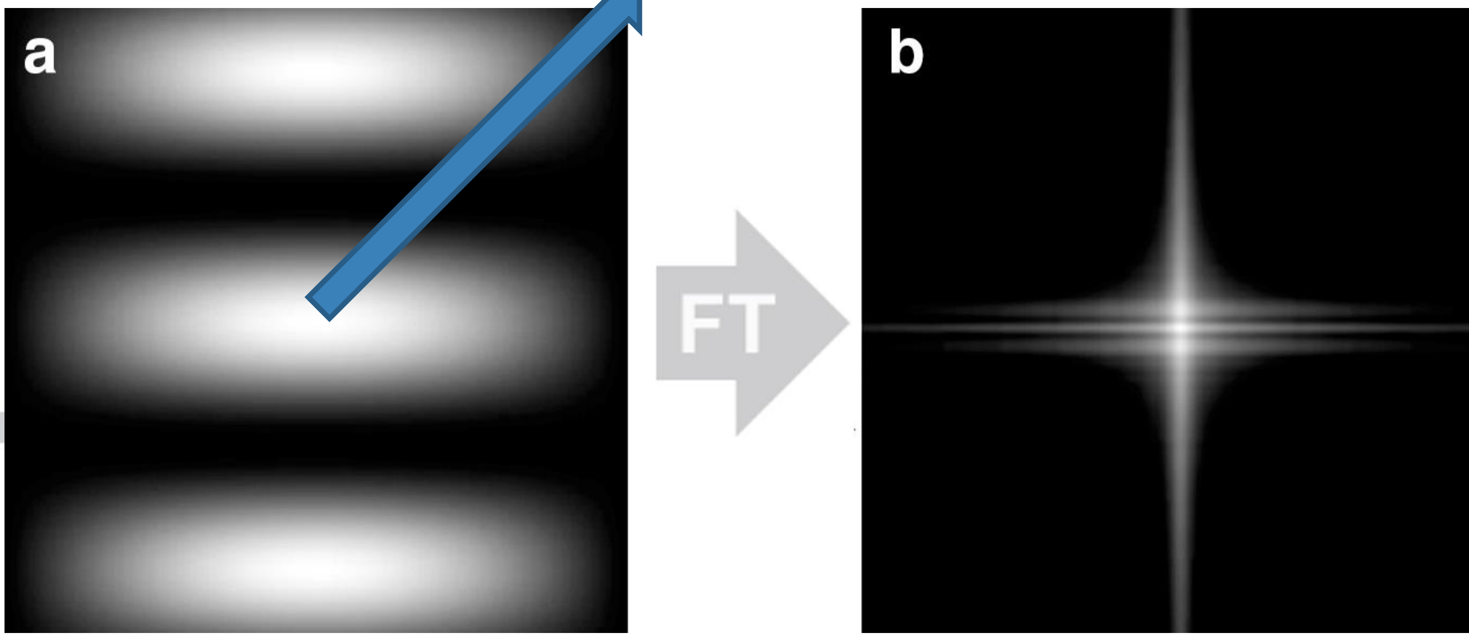




O espectro de Fourier da de baixo tem que ser mais simples, certo?

2,5 ciclos/larg. Imag.

Não tem perfis senoidais regulares.

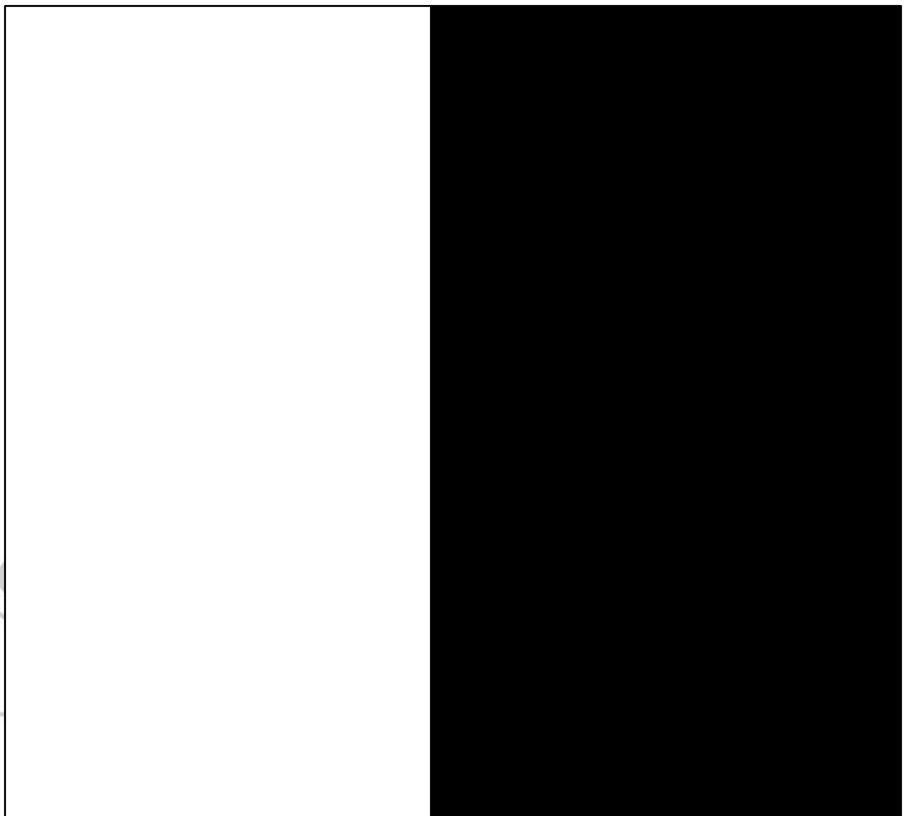


0,5 ciclos/larg. Imag.

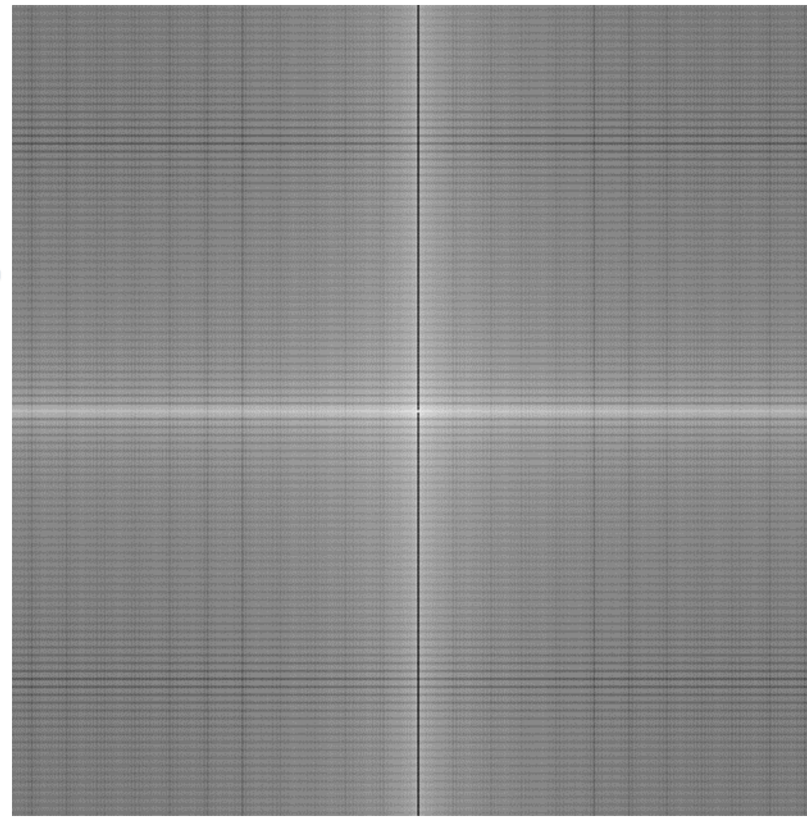
Imagens nos domínios espacial e de frequências

GRUPO DE DOSIMETRIA DAS RADIAÇÕES e FÍSICA MÉDICA
IFUSP - Instituto de Física da USP

- **????**

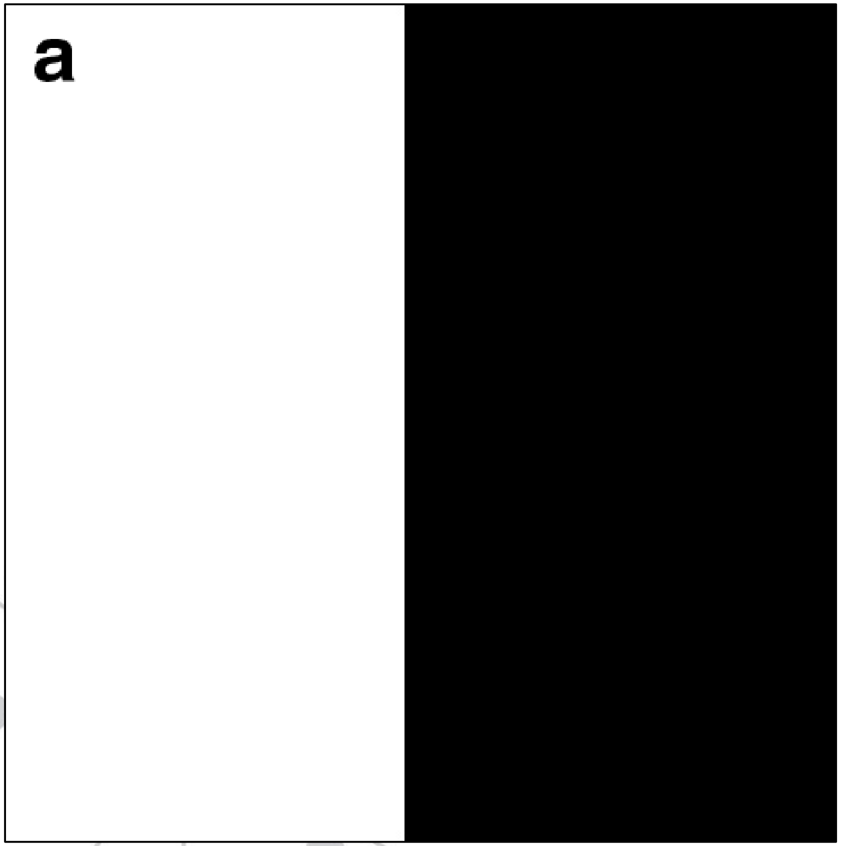


TF

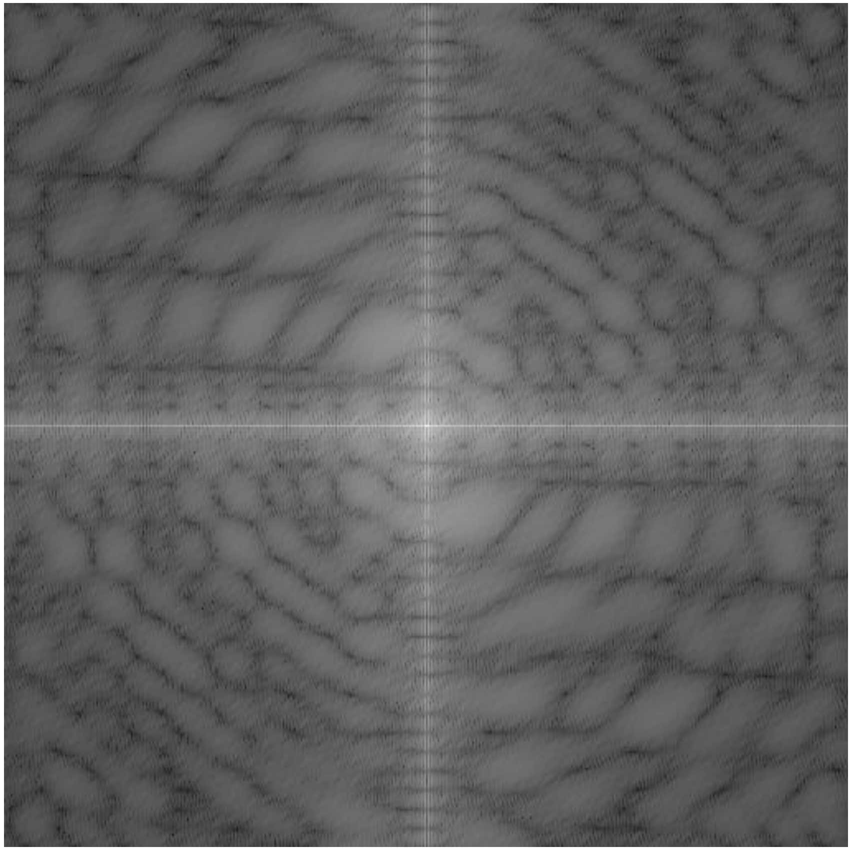


Fonte: Bourne. 2010

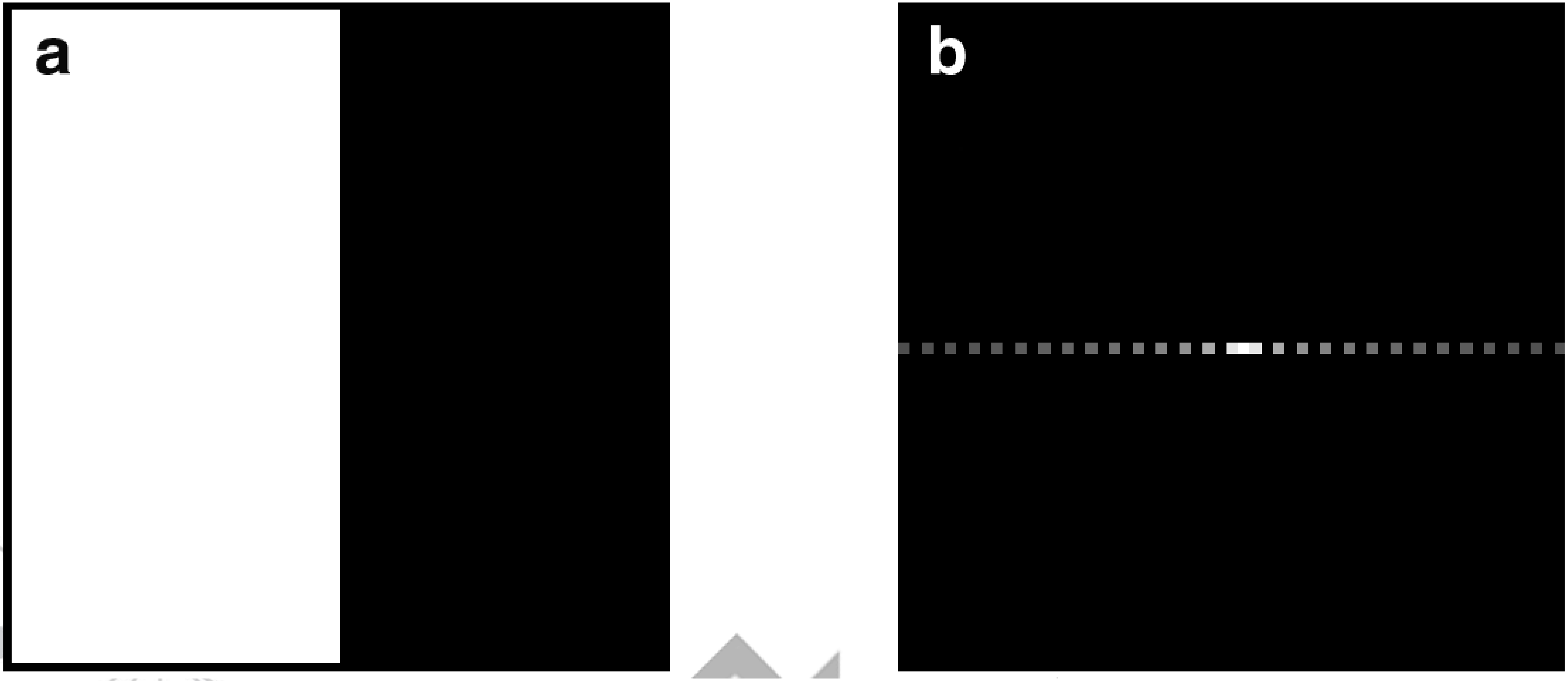
Imagens nos domínios espacial e de frequências



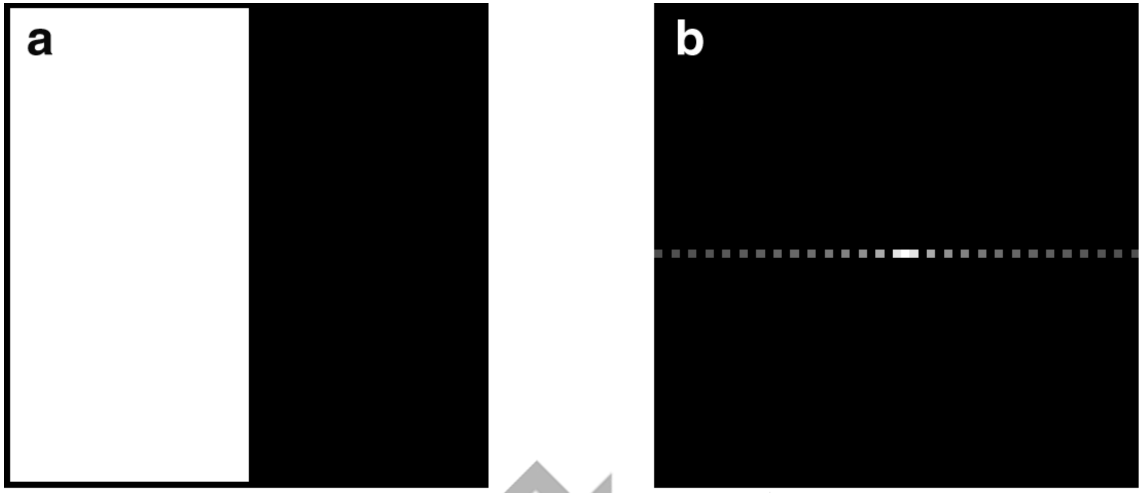
TF

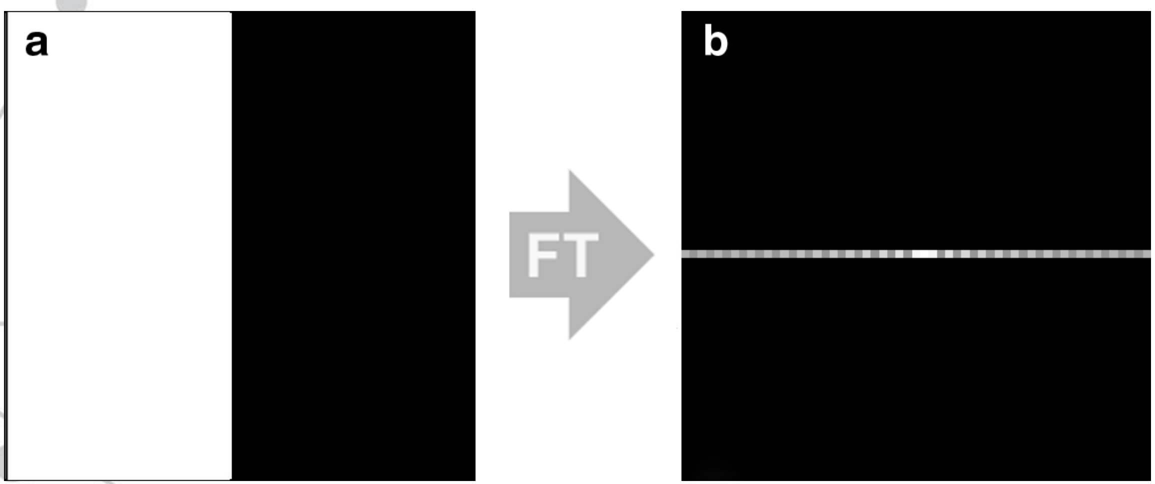


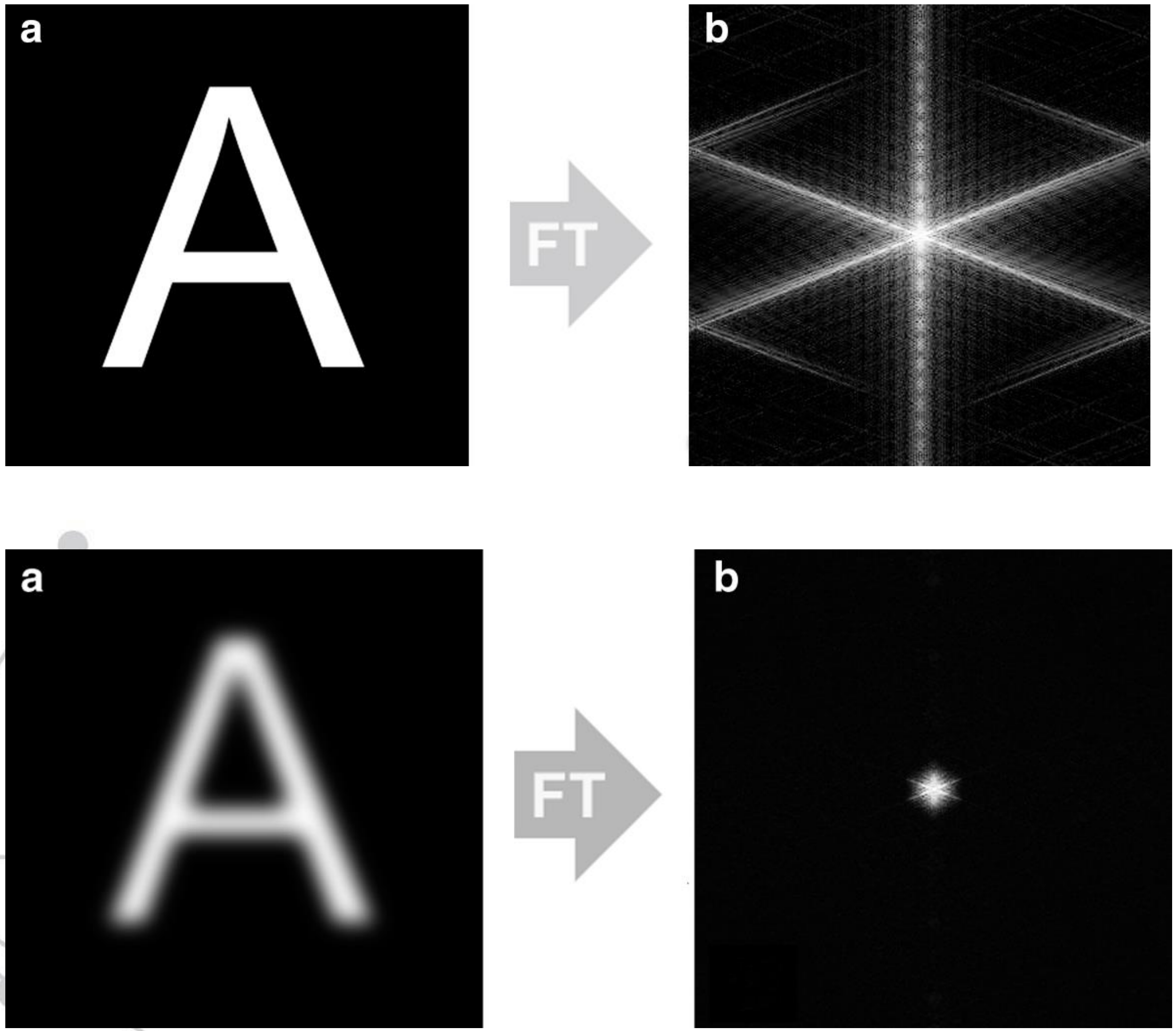
E o espectro de Fourier se parecem com estes??

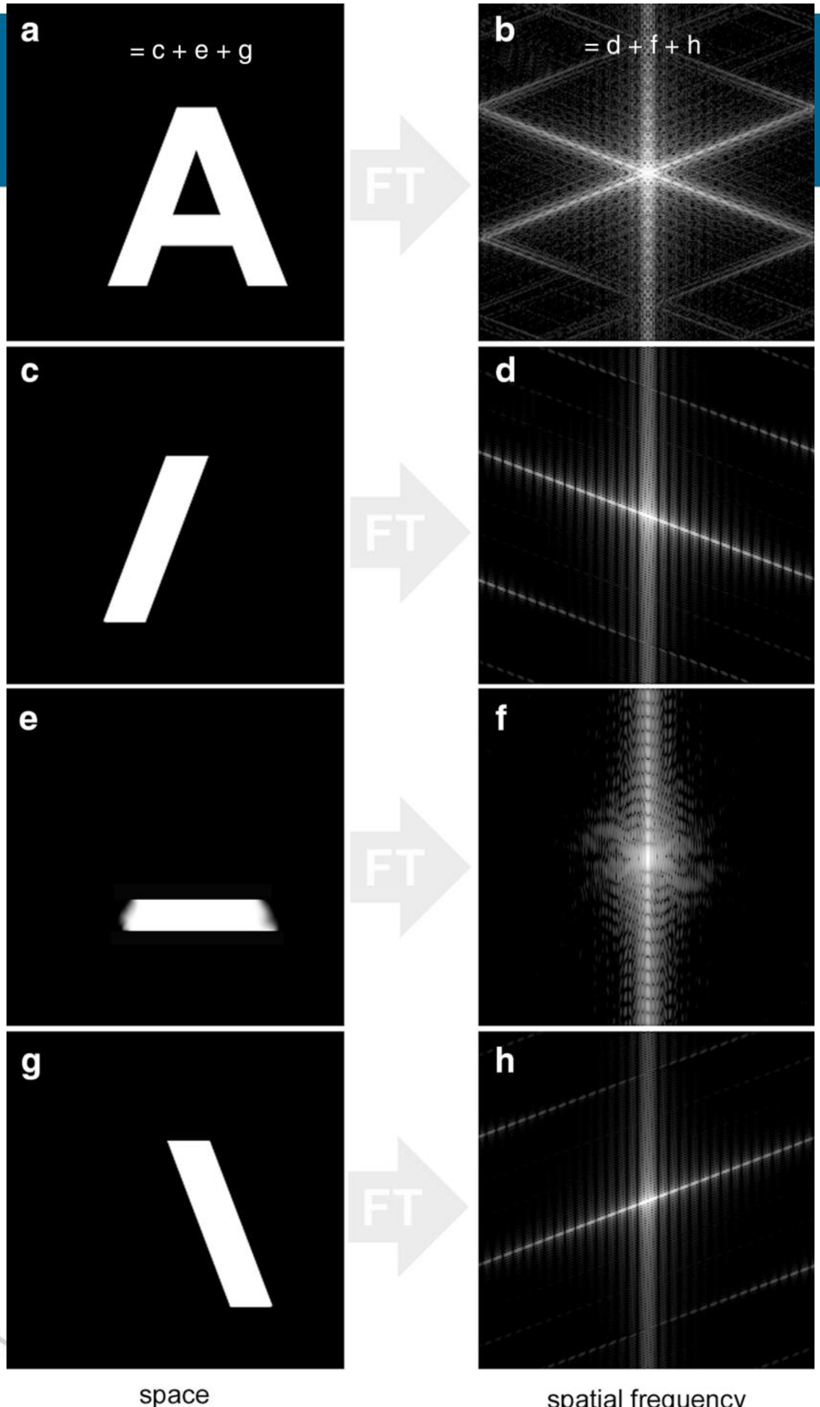


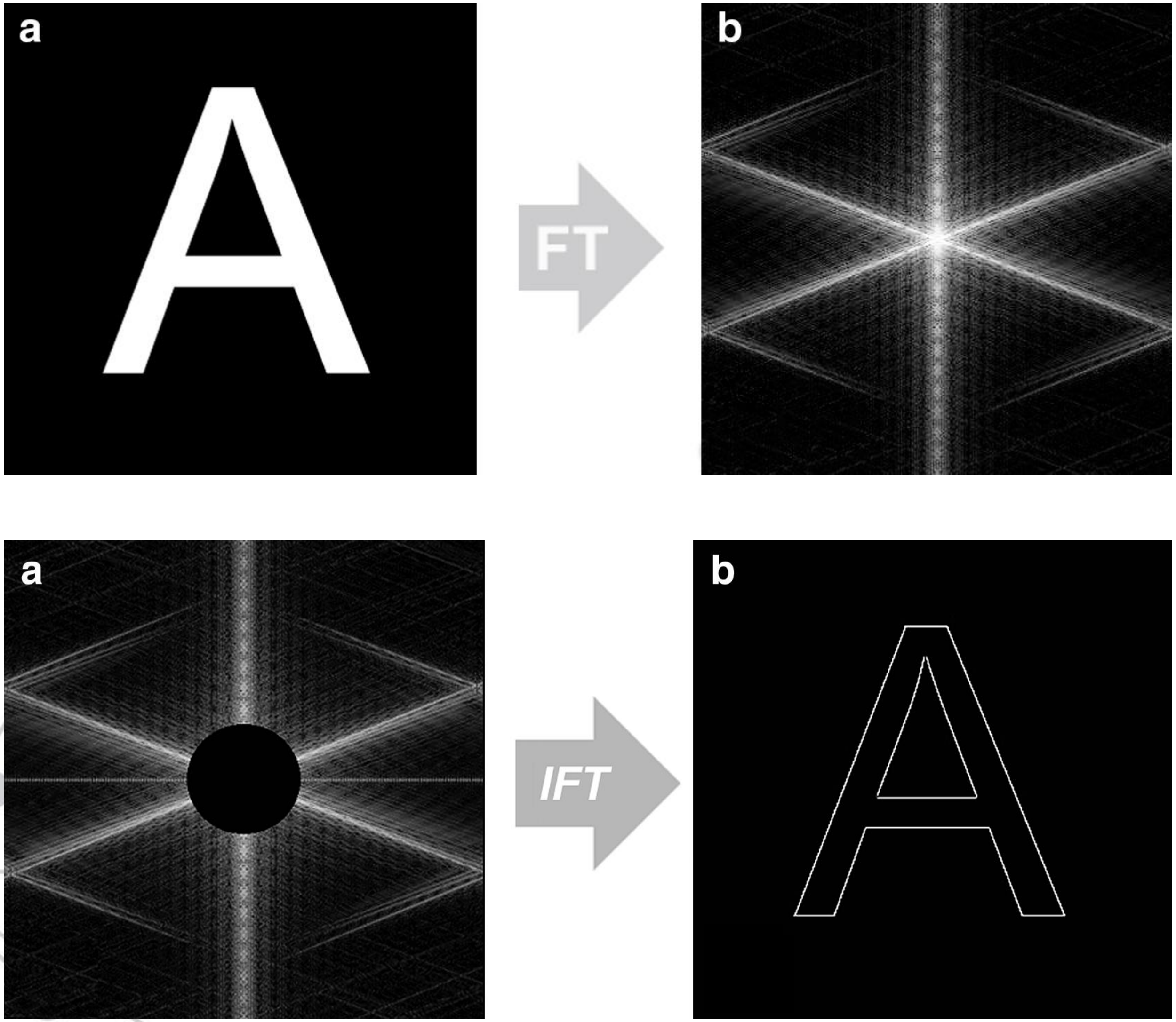
Por que os espectros são diferentes?

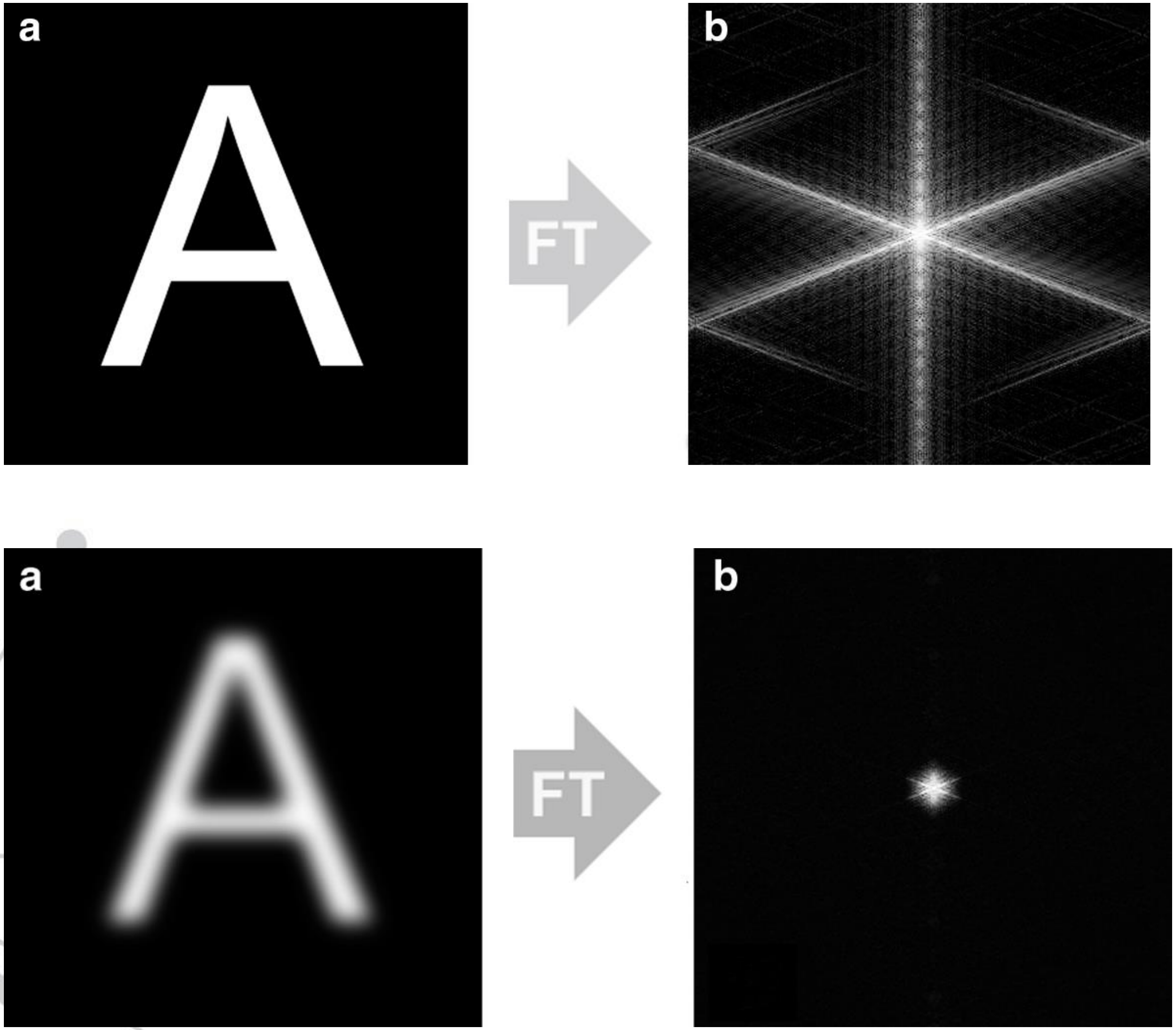




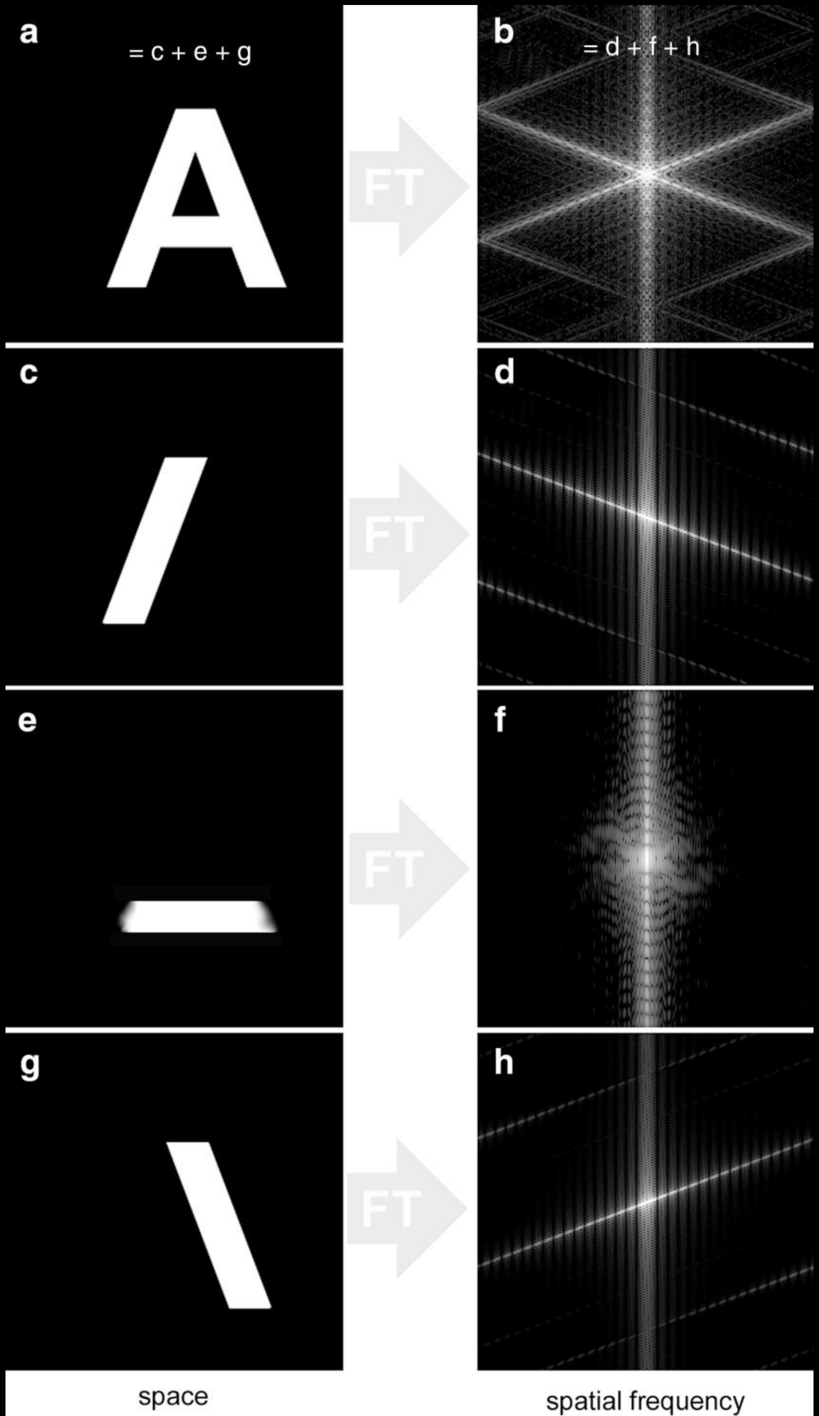

a
FT
b
a
FT
b


a
= c + e + g
b
= d + f + h
FT
c
d
FT
e
f
FT
g
h
FT
space
spatial frequency


a
FT
b
a
IFT
b



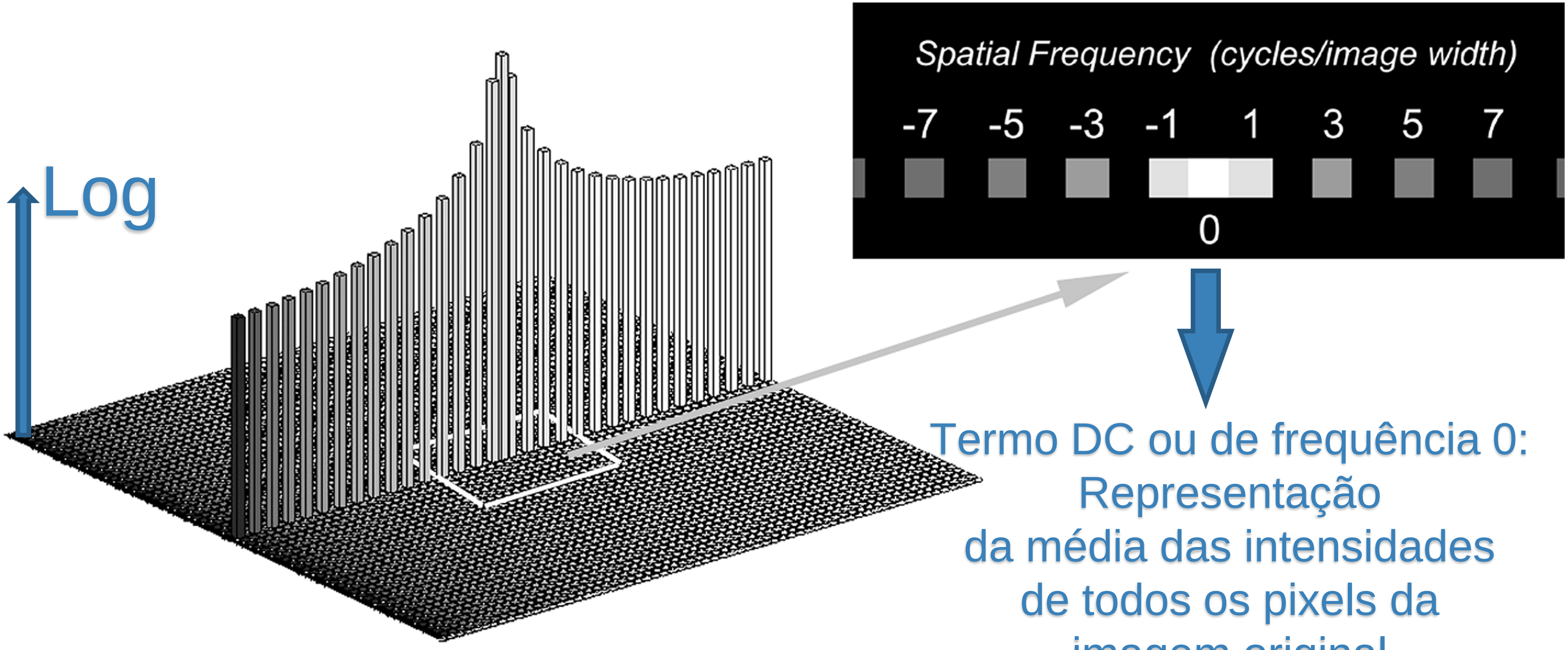
Fonte: Bourne. 2010



a
= c + e + g
b
= d + f + h
FT
c
d
FT
e
f
FT
g
h
FT
space
spatial frequency

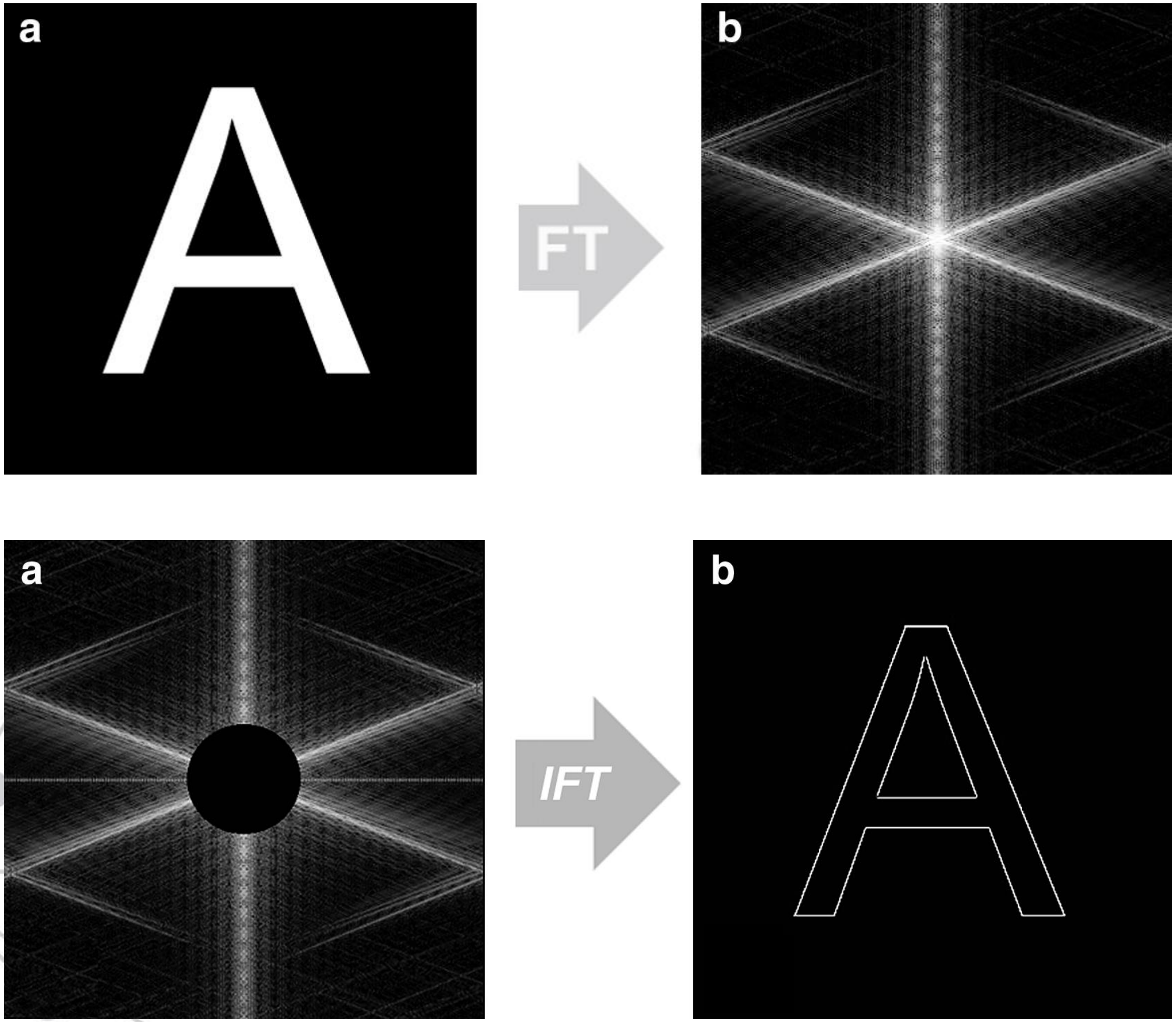
Imagens nos domínios espacial e de frequências

$$I = sin(\omega x) + \frac{1}{3}sin(3\omega x) + \frac{1}{5}sin(5\omega x) + \frac{1}{7}sin(7\omega x)$$



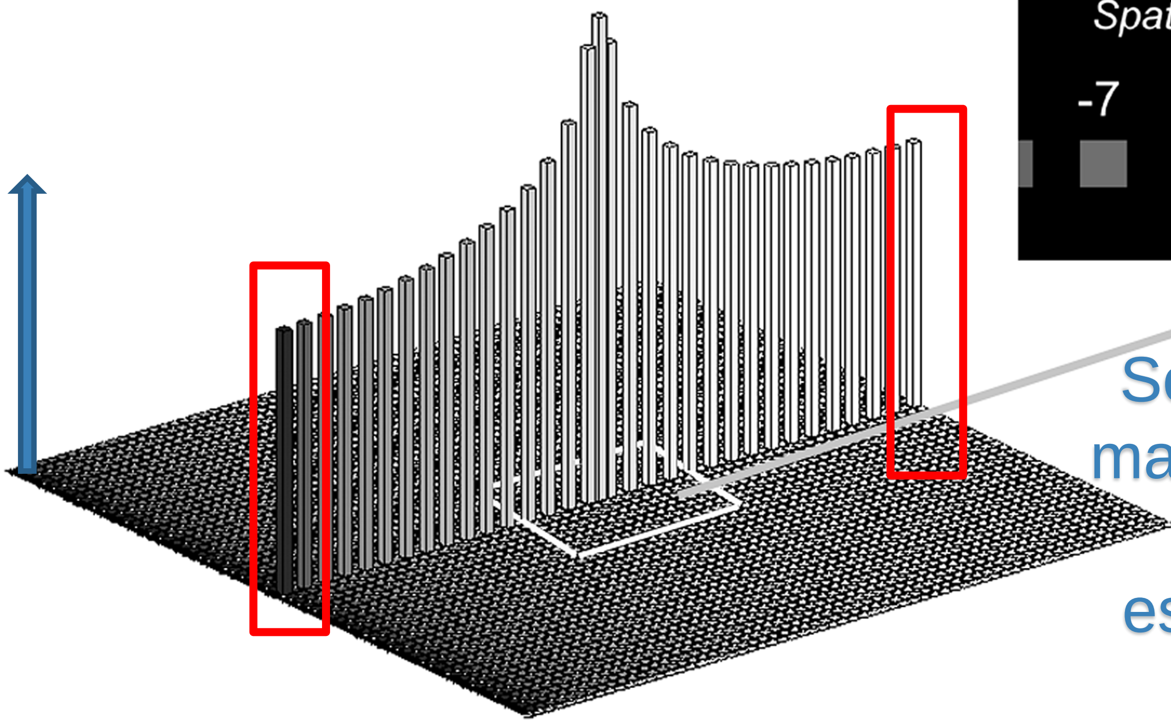
Termo DC ou de frequência 0: Representação da média das intensidades de todos os pixels da imagem original

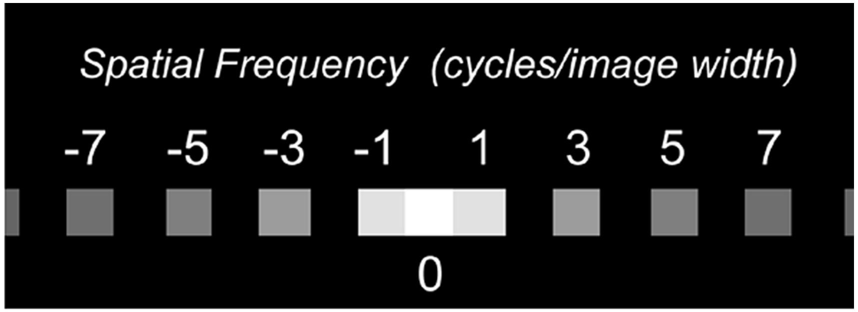
Fonte: Bourne. 2010



Fonte: Bourne. 2010

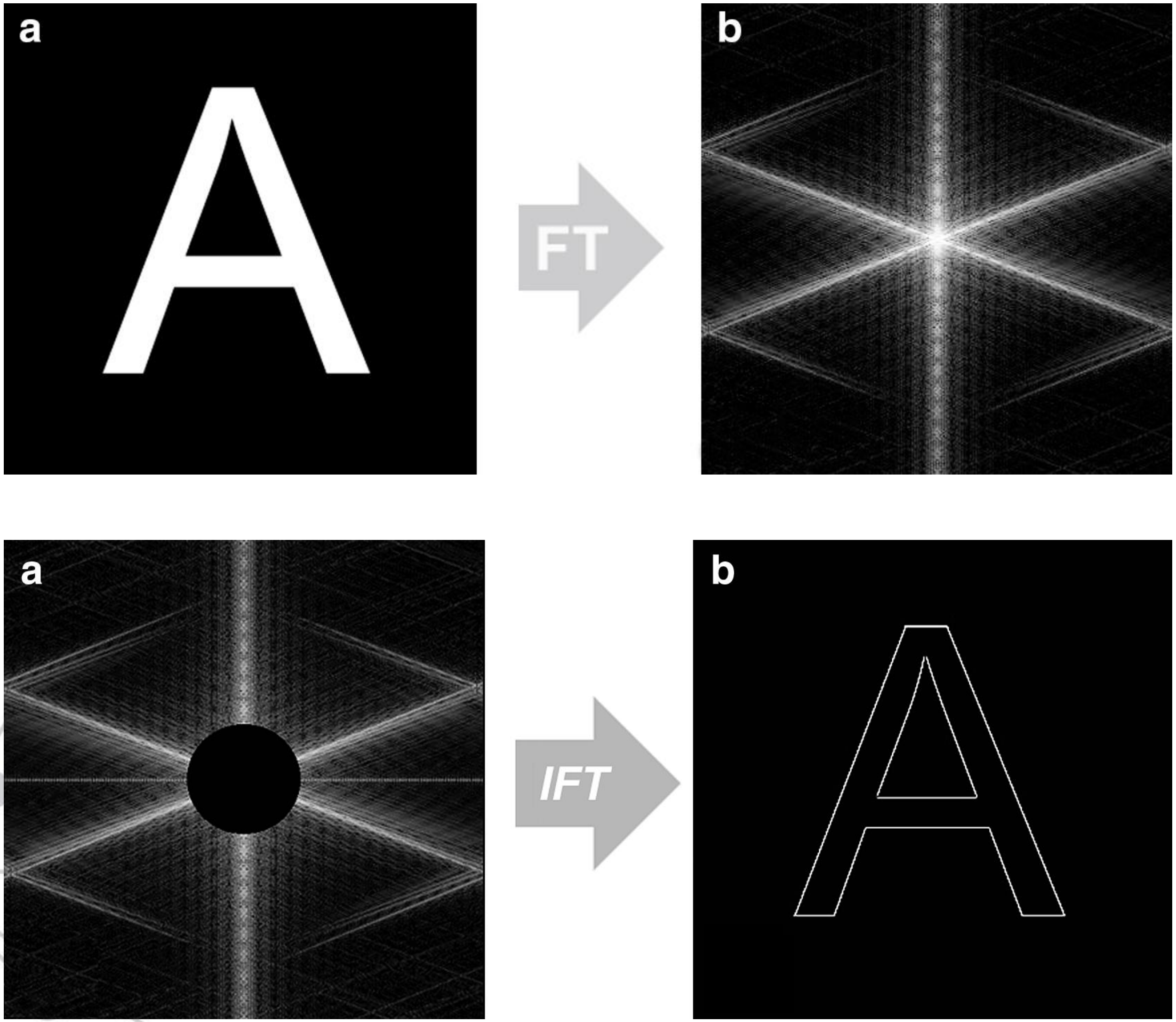
Quantas frequências espaciais são necessárias?





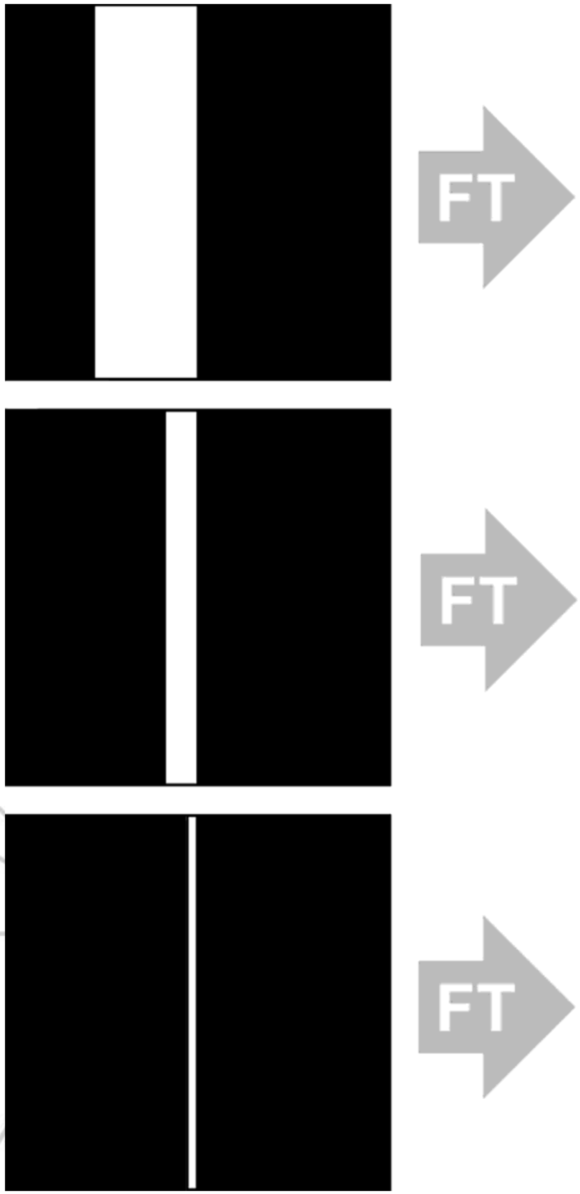
Somente as frequências mais altas são necessárias para representar as estruturas mais abruptas da imagem?

Fonte: Bourne. 2010



Fonte: Bourne. 2010

Espectro de Fourier de linhas

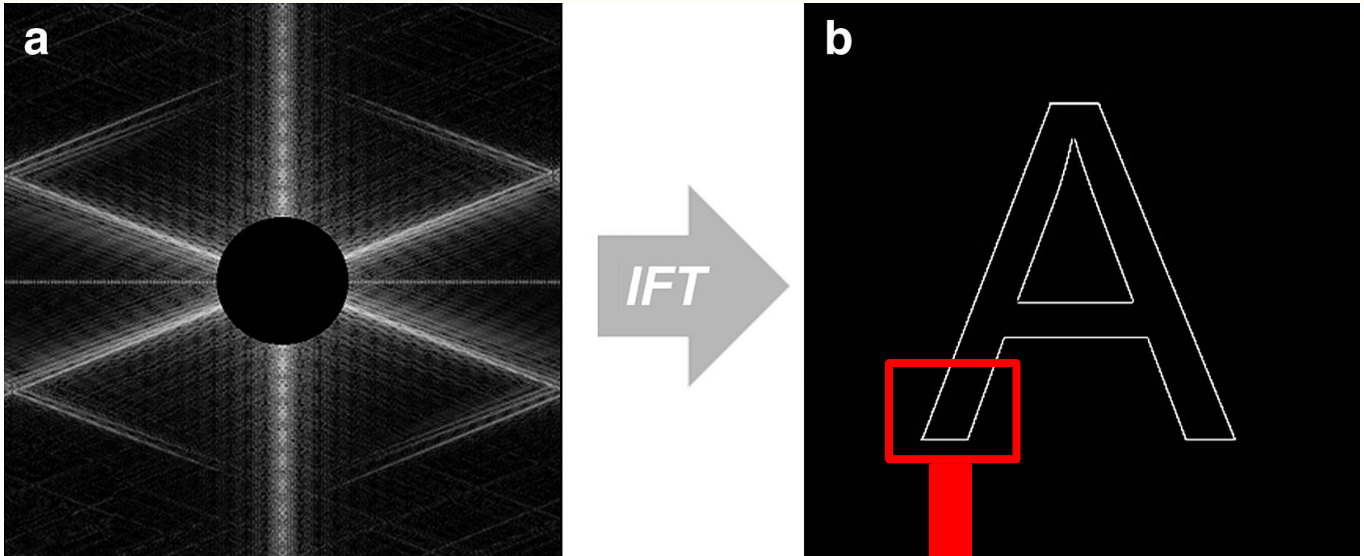


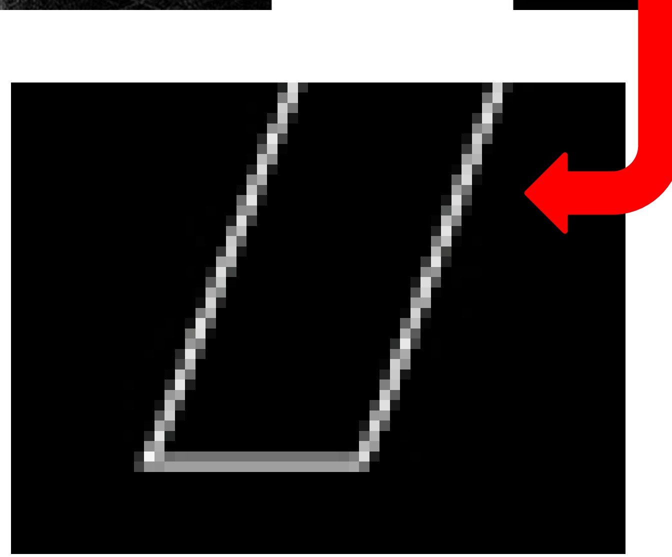
A ideia de que só são necessários os termos de alta frequência para representar bordas ou linhas não é totalmente correta

Toda a faixa de frequências é necessária para representar uma linha

Fonte: Bourne. 2010

Espectro de Fourier de linhas

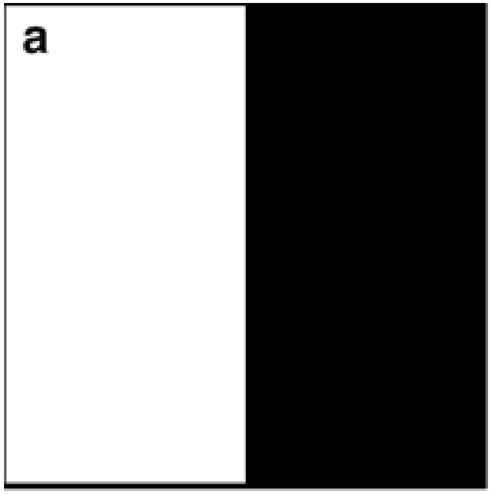




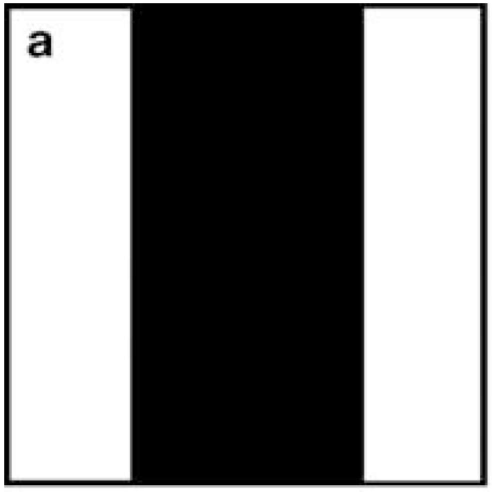
Supressão dos termos de baixa frequência

Fonte: Bourne. 2010

Dados complexos no espectro de Fourier



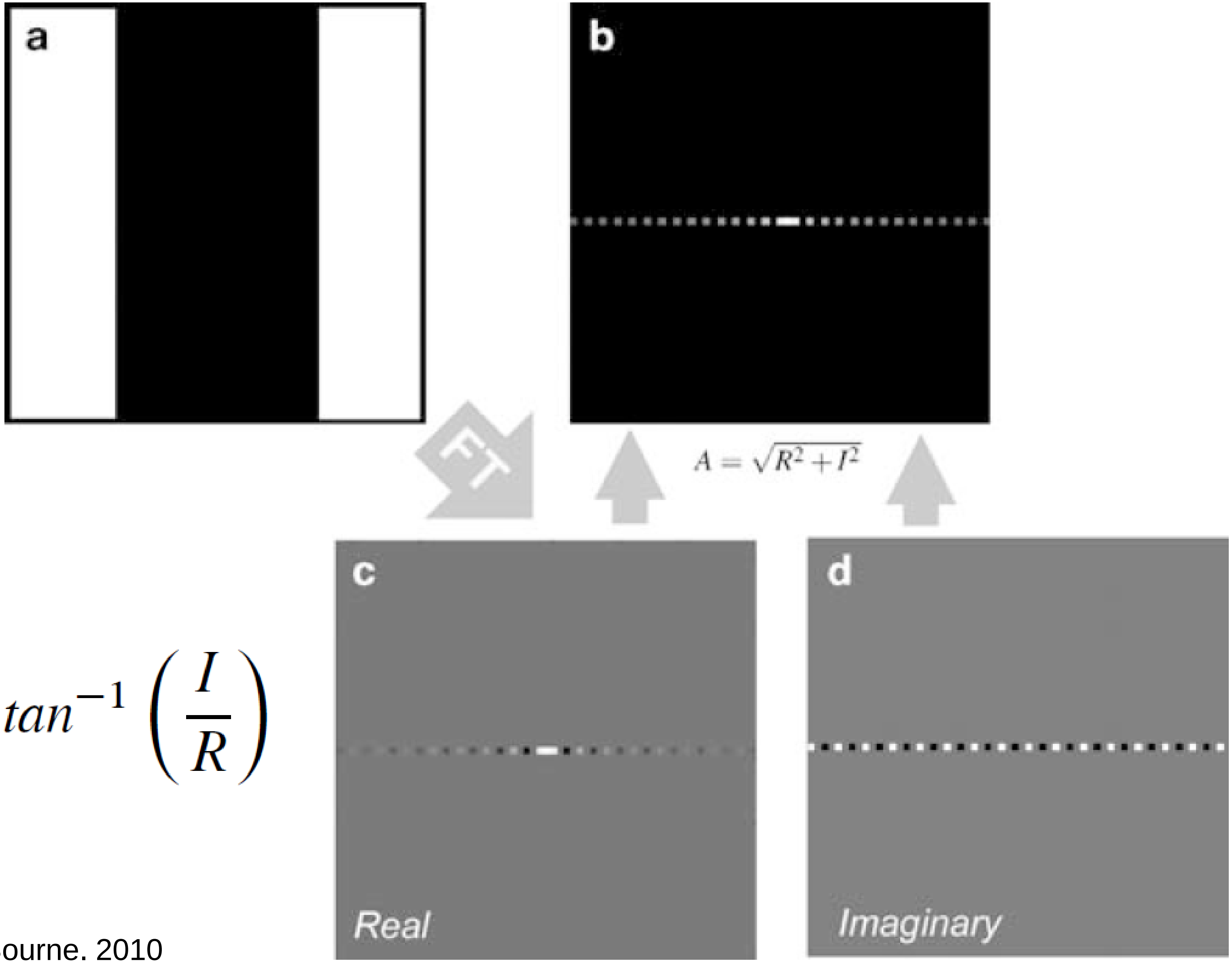
$\neq$



A informação que descreve a posição espacial nos dados da imagem está codificada na relação entre os coeficientes real e imaginário

Fonte: Bourne. 2010

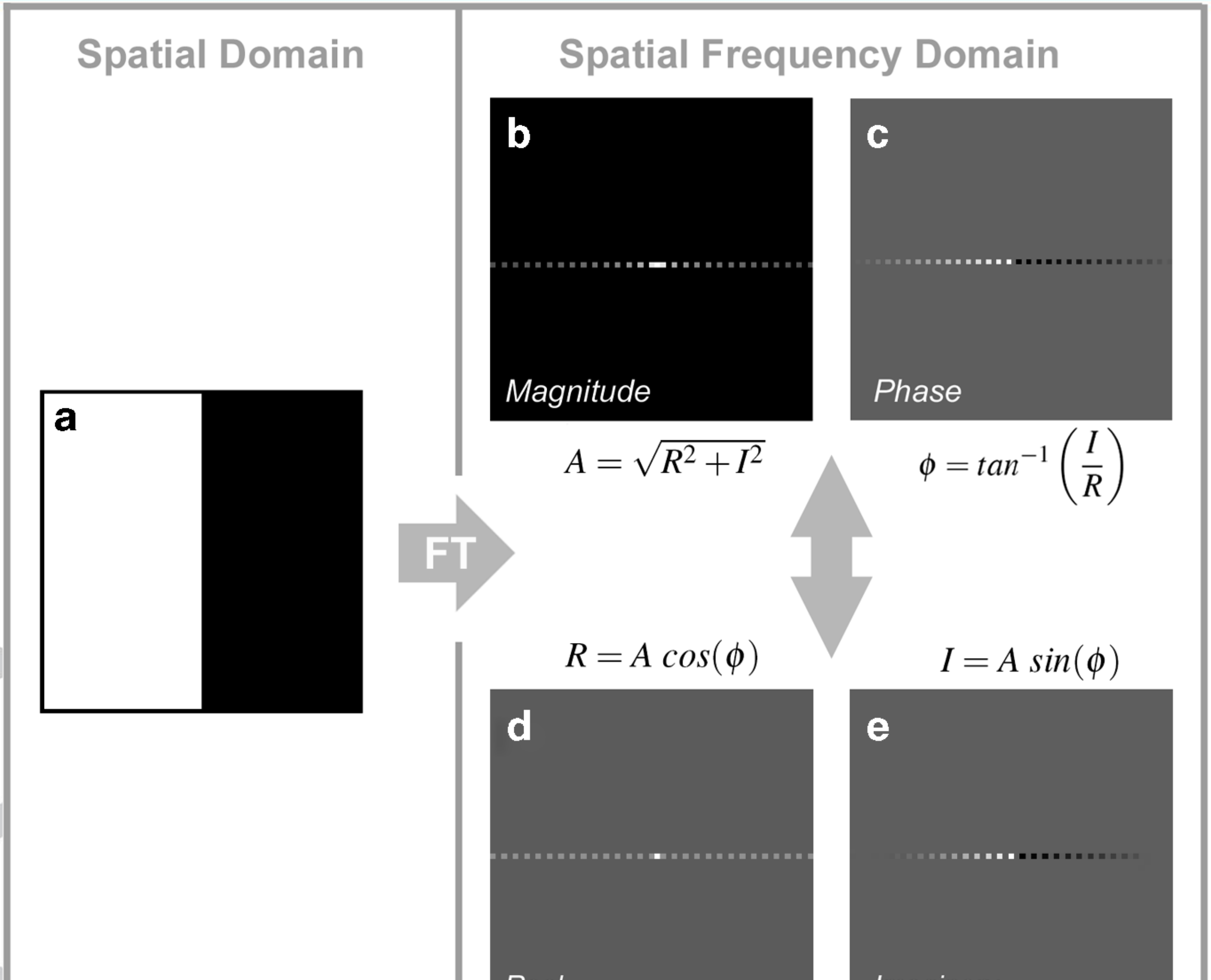
Dados complexos no espectro de Fourier



$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{I}{R}\right)$$

Fonte: Bourne. 2010

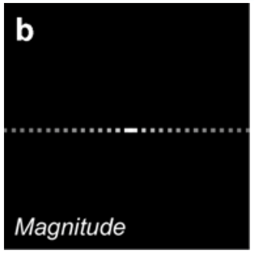
Dados complexos no espectro de Fourier



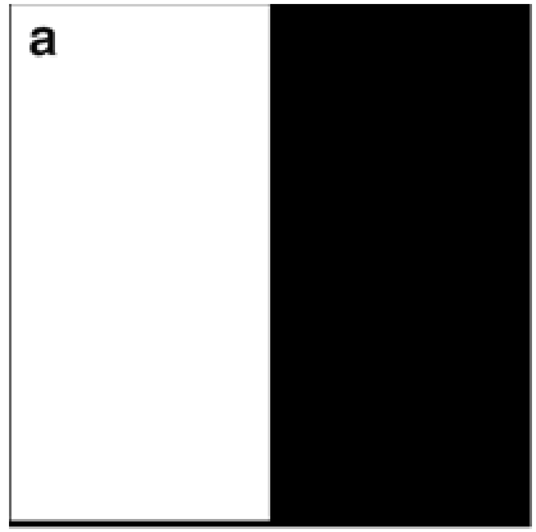
Fonte: Bourne. 2010

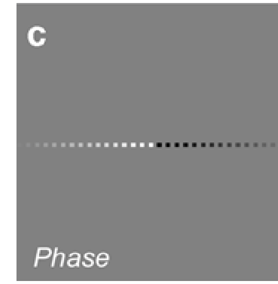
Dados complexos no espectro de Fourier

GRUPO DE DOSIMETRIA DAS RADIAÇÕES e FÍSICA MÉDICA
IFUSP - Instituto de Física da USP

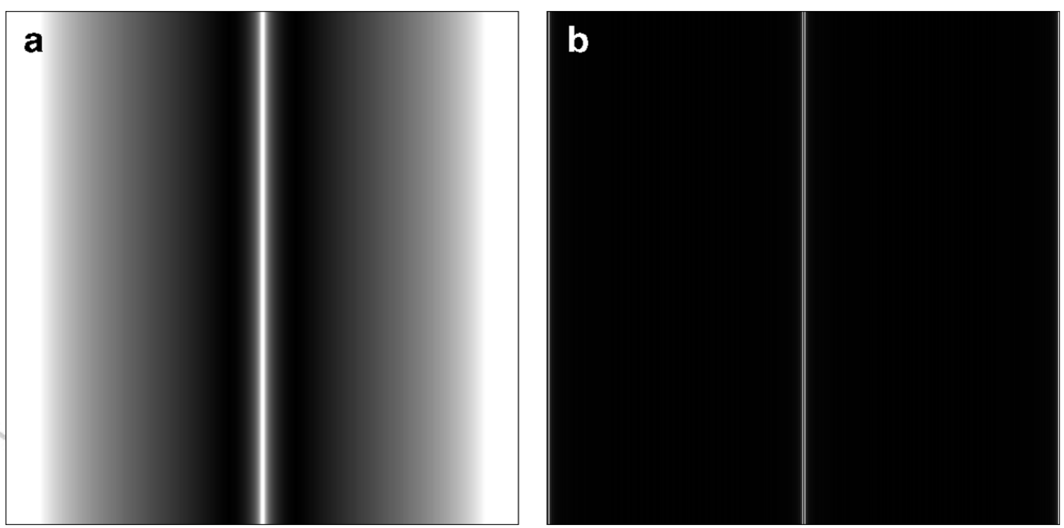


TF inversa usando somente as amplitudes





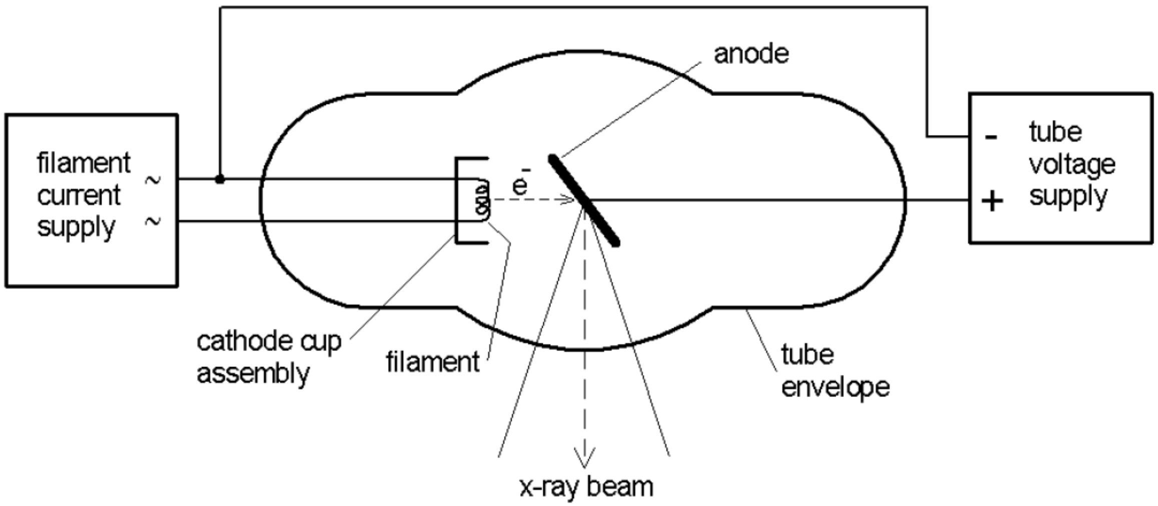
TF inversa usando somente as fases

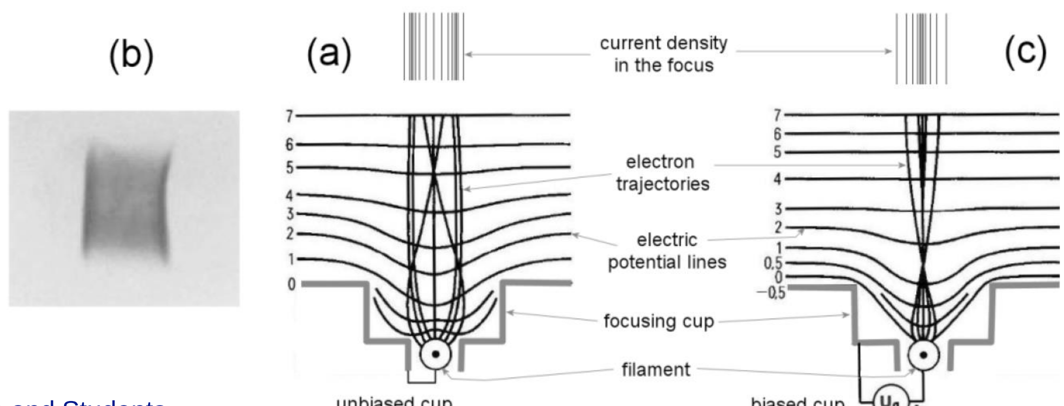


Fonte: Bourne. 2010

Aplicações práticas da TF

Como o tamanho do ponto focal afeta a qualidade de uma imagem?





Aplicações práticas da TF

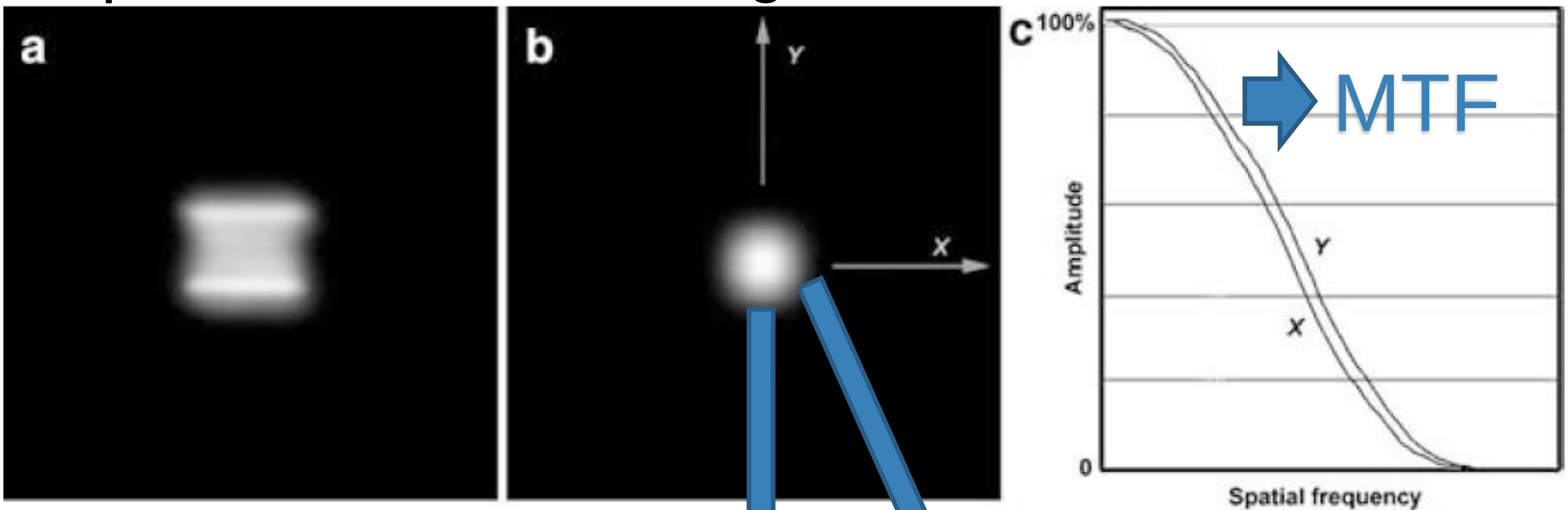
Como o tamanho do ponto focal afeta a qualidade de uma imagem?

Tese da Denise

http://pelicano.ipen.br/PosG30/TextoCompleto/Denise%20Yanikian%20Nersissian_D.pdf

Aplicações práticas da TF

Como o tamanho do ponto focal afeta a qualidade de uma imagem?



Amplitude alta em baixas frequências

Alto contraste nas imagens

Amplitude baixa em altas frequências

Baixo contraste nas imagens

Fonte: Bourne. 2010

GRUPO DE
DOSIMETRIA
DAS RADIAÇÕES
e FÍSICA MÉDICA

IFUSP - Instituto de Física da USP