Lista 2
Integrais

Victor Saliba [*]
Thales Domingues [†]
André Salles de Carvalho [‡]

Data de Entrega: 2 de Outubro de 2022

Essa lista aborda o assunto de Integração. Mais especificamente, os princípios da integração, partindo das integrais de funções-escada (as mais simples até o momento), até chegar na definição mais importante da primeira parte desse curso: o conceito de funções integráveis. Além disso, serão abordadas algumas funções especiais e as propriedades das integrais dessas funções.

[*]E-mail: victorsaliba13@usp.br; WhatsApp: (12) 99145-9087.
[†]E-mail: thalesdaviddom@usp.br.
[‡]E-mail: andre@ime.usp.br.

Instruções:

1. Em homenagem ao professor Mané, essa lista contém 17 exercícios, divididos em dois grupos numerados de I a II.

2. Não é necessário resolver todos os exercícios! Tente resolver aqueles que você achar mais interessantes. Se você não possui preferência, ou não achou nenhum aparentemente divertido, tente resolver os exercícios recomendados primeiro. Esses exercícios estão indicados na nota de rodapé de cada seção.

3. Escolha quatro exercícios de cada grupo para entregar **ou** entregue “apenas” o exercício 10. A nota dessa lista será a soma das notas obtidas em cada questão, sendo 10 pontos a nota máxima. Para cada uma das duas formas de entrega, sendo n a quantidade total de questões a serem entregues, a nota máxima de cada questão será $10/n$.

4. Envie a sua resolução para o e-mail victorsaliba13@usp.br com o assunto “Resolução da Lista 2 de Matemática I”.

5. Serão concedidos até 2 pontos extras se: (1) a resolução da lista for feita em LaTeX; ou (2) qualquer trabalho extra foi realizado: exemplos ou contraexemplos que validem o resultado demonstrado, alguma resolução elegante, uma quantidade maior de questões entregues além daquela requisitada, etc.

6. Os exercícios não estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Todavia, serão concedidos três símbolos distintos para os exercícios “interessantes”: δ para os exercícios particularmente difíceis (que geralmente precisam de algum truque não tão óbvio para serem resolvidos), π para os problemas difíceis (que requerem tanto um truque, quanto um cuidado maior na resolução) e † para aqueles…

7. Não desanime se não conseguir resolver alguns exercícios ou cometeu algum erro na resolução, erros fazem parte do processo de aprendizado e quanto mais tempo gastar tentando solucionar um exercício, mais você irá aprender com ele.

8. Se houver dúvidas, sugestões ou quiser alguma (outra) dica, basta nos contactar.

9. A colaboração é não apenas permitida, mas encorajada. Caso tenha precisado de ajuda, por favor, dê o devido crédito, mencionando nomes.

10. Por último, mas definitivamente o mais importante, divirta-se!

Exercícios:

Grupo I[1]

Exercício 1. Seja n um número natural. Calcule:

(a) $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx$.

(b) $\int_0^{n^2} \lfloor \sqrt{x} \rfloor dx$. (Dica: Considere primeiramente o caso em que $n = 3$.)

Exercício 2. Mostre que $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx + \int_a^b \lfloor -x \rfloor dx = a - b$.

Lembremos a definição de função integrável:

Definição 1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada definida num intervalo $[a, b]$. Se, para todo $\epsilon > 0$, existem funções escada s, t tais que $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ para todo $x \in [a, b]$, e

$$\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx < \varepsilon,$$

então diz-se que f é integrável em $[a, b]$ (ou, simplesmente, integrável). Em outras palavras, sendo

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)dx : s \text{ é escada e } s \leq f \right\} \quad \text{e} \quad T = \left\{ \int_a^b t(x)dx : t \text{ é escada e } f \leq t \right\},$$

tem-se f integrável se, e somente se, $\sup S = \inf T$. Nesse caso, a integral de f em $[a, b]$ é o número $\int_a^b f(x)dx = \sup S = \inf T$.

Exercício 3. Sejam $b > 0$ e $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Usando a definição acima, prove que f é integrável e $\int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2}$. (Não é tão fácil quanto parece: note que não é suficiente calcular a área do triângulo. Tente uma abordagem parecida com a de Arquimedes.)

Exercício 4 (δ)**.** Encontre $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^t (x - \lfloor x \rfloor)dx = 17.$$

Exercício 5. O que significa uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ não ser integrável? Dê um significado preciso para isso.

[1] Exercícios recomendados: 1, 3, 5, 6 e 7.

Exercício 6 (δ)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Seja qual for o intervalo $[a, b]$, prove que f não é integrável em $[a, b]$.

Exercício 7 (δ)**.** Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis com g limitada e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

(a) Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Prove que F é integrável.

(b) Seja $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Prove que G é integrável.

Exercício 8. Mostre que:

(a) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(b) Se G é a função do Exercício 7, então existe $L > 0$ tal que

$$|G(x) - G(y)| \leq L|x - y|$$

para quaisquer $x, y \in [a, b]$.

Exercício 9. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$ se $x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, e $f(0) = 0$. Prove que f é integrável e calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercício 10 ($\dagger$)**.** Sejam $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ limitadas, com f integrável e $g(x) = f(x)$ se $x \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Mostre que:

(a) Para todo natural n, g é integrável em $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ e $\int_{1/n}^1 g(x)dx = \int_{1/n}^1 f(x)dx$.

(b) g é integrável e $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Grupo II[2]

Exercício 11. Sejam $a > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-a, a]$. Prove que:

(a) Se f é par (isto é, $f(x) = f(-x)$ para todo x) então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

(b) Se f é ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$ para todo x) então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exercício 12. Calcule $\sin\frac{\pi}{3}$ usando **apenas** as propriedades fundamentais das funções $\sin$ e $\cos$.

Exercício 13. Calcule:

(a) $\int_{a}^{b} \cos^2 x dx$.

(b) $\int_{0}^{t} \cos^3 x dx$.

Exercício 14 (π)**.** Sejam $p > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período p (isto é, $f(x + p) = f(x)$ para todo x) e integrável em todo intervalo $[a, b]$. Prove que, fazendo $g(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ e $A = g\left(\frac{p}{2}\right)$, tem-se:

(a) $g(x + p) - g(x) = g(p)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g\left(\frac{np}{2}\right) = nA$ para todo natural n, se f é uma função par.

Considere a seguinte definição de função convexa:

Definição 2. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0, 1)$, tem-se

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Exercício 15. Mostre que o conjunto de todas as funções convexas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é convexo. (Dica: Relembre a definição de conjunto convexo e de função convexa. A demonstração é uma consequência direta dessas duas definições.)

Exercício 16 (δ)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa tal que $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que:

(a) Se $f(1) = 0$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

(b) $f|_{[0,+\infty)}$ é crescente.

(c) Se $f(a) > 0$ para algum $a > 0$, então $f|_{[a,+\infty)}$ é estritamente crescente.

(d) Se $0 < a < b < c$ e $f(a) > 0$, então $0 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

---

[2] Exercícios recomendados: 11, 13, 15 e 16.

Exercício 17 (δ)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de *mínimo local* de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Suponha que f é convexa e mostre que:

(a) Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ são pontos de mínimo local de f tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) = f(x_2)$.

(b) Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ são pontos de mínimo local de f tais que $x_1 < x_2$, então $f(x) = f(x_1)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$.

(c) Se $x_1 \in \mathbb{R}$ é um ponto de mínimo local de f, então $f(x) \geq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.