BRI0022 – Gabarito 01

Problema 3.16

a)

$\mu = 100$
$\sigma = 16$
Pede-se: P(X>120)

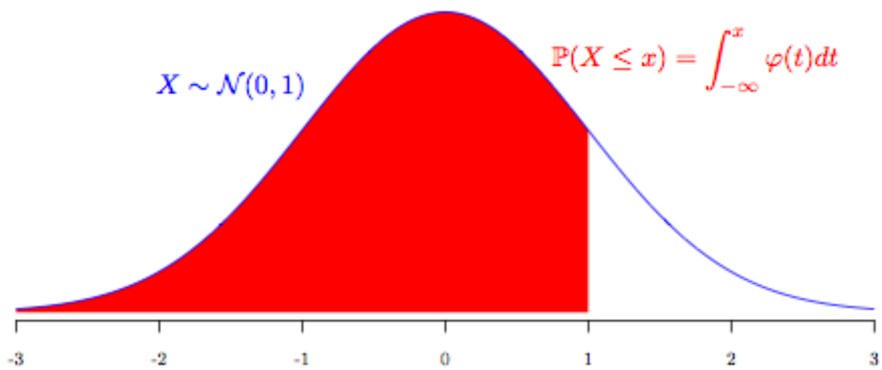
Para solucionar este problema utilizando a tabela da Normal Padrão, é necessário primeiro achar o valor Z correspondente ao valor de interesse (120). Obtemos este valor via padronização. Recordando:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Assim, temos:

$$Z = \frac{120 - 100}{16} = \frac{20}{16} = 1{,}25$$

Consultando a tabela da Normal Padrão, observamos que 1,25 corresponde a 0,8944. Este, no entanto, não é o resultado final. A tabela da Normal Padrão apresenta valores referentes à área abaixo da curva sempre da esquerda para a direita (a área em vermelho abaixo):



e o problema pede a probabilidade de X > 120. Ou seja, pede-se a área da cauda direita (em branco). Resolver isto é simples: basta subtrair de 100% a área referente ao Z encontrado:

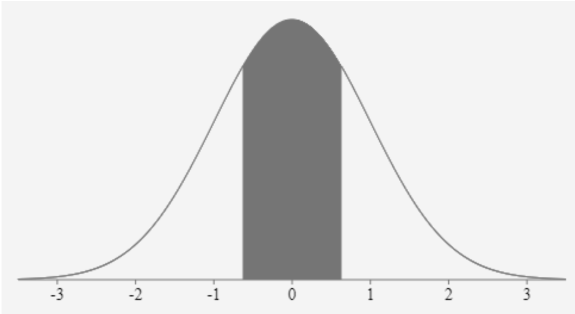
P(X > 120) = 1 – 0,8944 = 0,1056

Pr(X > 120) => 10,56%

b)

Pede-se: P(90 < X < 110).

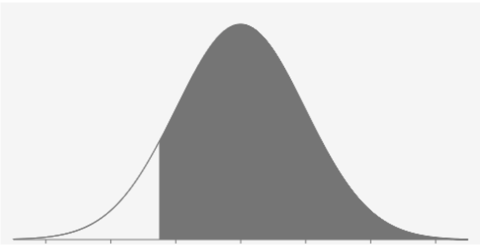
Neste exercício, treina-se novamente a percepção da área abaixo do gráfico da curva Normal Padrão. A probabilidade pedida é referente à área em cinza escuro do esquema abaixo:



B

A ideia é subtrair a área (1) pela área (2):

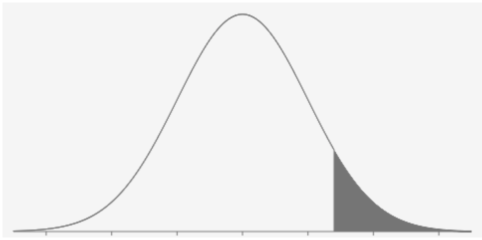
(1)



$$Z = \frac{90 - 100}{16} = -\frac{10}{16} = -0{,}625$$

P = 0,73405

(2)



$$Z = \frac{110 - 100}{16} = \frac{10}{16} = 0{,}625$$

P = 0,26595

$P(90 < X < 110) = 0{,}73405 – 0{,}26595 = 0{,}4681$

$P(90 < X < 110) = 46{,}81\%$

c)

Assumindo que os indivíduos de maior QI são os que entram nas universidades, temos:

- QI marginal do passado:

O z que representa 10% da população é calculado a partir do valor da probabilidade de Pr (z) = 1 – 0,1 => Pr(z) = 0,90.

Para essa probabilidade o valor de z = 1,28. Retomando a equação $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, tem-se:

$$1{,}28 = \frac{x - 100}{16} \Rightarrow x = 16 \,.\, 1{,}28 + 100 \Rightarrow 120{,}48$$

QI marginal do passado => 120,48

- QI marginal do presente:

O z que representa 30% da população é calculado a partir do valor da probabilidade de Pr (z) = 1 – 0,3 => Pr(z) = 0,70.

Para essa probabilidade o valor de z = 0,525. Tem-se:

$0{,}525 = \frac{x-100}{16}$ => $x = 16\,.\,0{,}525 + 100$ => 108,4

QI marginal do presente => 108,4

Problema 3.17

a)

μ = 100
σ = 16

Por se tratar de uma amostra da população, a distribuição da média amostral segue o formato:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Portanto, a distribuição de probabilidades da média amostral de 10 indivíduos será:

$$\bar{X} \sim N(100, \frac{16^2}{10})$$

b)

A partir de $\bar{X} \sim N(100, \frac{16^2}{10})$, calcula-se o z:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ => $\frac{110-100}{\sqrt{\frac{16^2}{10}}}$ => $\frac{10}{\sqrt{25{,}6}}$ => $\frac{10}{5{,}05}$ => 1,98

Z =1,98

Pr (1,98) = 0,9761

Pr ($\bar{X} > 110$) = 1 – 0,9761 => 0,0239

Pr ($\bar{X} > 110$) = 2,39%

c)

Seria esperada a mesma probabilidade do item (b), 2,39%. Porque a distribuição das amostras seguintes também seria normal (por conta da distribuição da população ser dada como normal), bem como a média (100), desvio-padrão (16) e o número de observações de cada amostra (10).

d)

Como já é conhecida a Pr ($\bar{X} > 110$), deve-se calcular a Pr ($\bar{X} < 90$).

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ => $\frac{90-100}{\sqrt{\frac{16^2}{10}}}$ => $\frac{-10}{\sqrt{25{,}6}}$ => $\frac{-10}{5{,}05}$ => -1,98

z = -1,98

Pr (1,98) = 0,9761 =

Pr ($\bar{X} < 90$) = 1 – 0,9761 => 0,0239

Pr ($\bar{X} < 90$) = 2,39%

Por causa da diferença entre 90 e a média 100 ser a mesma de 110 (b) e a média, a probabilidade de $\bar{X}$ ser menor que 90, é a mesma que a probabilidade de $\bar{X}$ ser maior que 110, ou seja, 2,39%

Para se calcular o que o exercício pede Pr (90 < $\bar{X}$ < 110), subtrai-se duas vezes o valor de 2,39% da probabilidade total.

Pr (90 < $\bar{X}$ < 110) = 1 – 2(0,0239) => 1 – 0,0478 => 0,9522

Pr (90 < $\bar{X}$ < 110) = 95.22%.

O resultado é bem maior que do item (b) do exercício anterior porque ele se trata da distribuição da população (46,81%), enquanto que a probabilidade de 95,22% se refere à distribuição da média amostral que possui dispersão muito menor do que a dispersão da distribuição da população.

e)

De acordo com o exercício anterior, o QI do estudante “marginal” atual é de 108,4. Sendo assim, a probabilidade de que uma amostra de 10 estudantes universitários tenha média maior que 110 é alta. A distribuição do QI dos estudantes não é Normal, mas sim, assimétrica à direita, se tratando da cauda superior da distribuição normal. Por conta de o número de observações ser baixo (10), não é possível utilizar-se do Teorema do Limite Central. Portanto, não se pode calcular a probabilidade em questão.

f)

Com o primeiro adulto tendo QI de 150, é possível utilizar o valor da média da população para calcular o QI médio da amostra.

Sendo assim, temos:

$$\frac{150 + 9(100)}{10} => \frac{150 + 900}{10} => \frac{1050}{10} => 105$$

O QI médio da amostra é 105.

Problema 3.18

a)

μ = 10000
σ = 2500
n = 40
Com o n = 40 é possível utilizar o Teorema do Limita Central a fim de assumir que a distribuição amostral é uma normal.

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Portanto, a distribuição de probabilidades da média amostral será

$$\bar{X} \sim N(10000, \frac{2500^2}{40})$$

b)

A partir de $\bar{X} \sim N(10000, \frac{2500^2}{40})$, calcula-se o z:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ => $\frac{10500-10000}{\sqrt{\frac{2500^2}{40}}}$ => $\frac{500}{\sqrt{156250}}$ => $\frac{500}{395,28}$ => 1,26

Z =1,26

Pr (1,26) = 0,8962

Pr ($\bar{X} > 10500$) = 1 – 0,8962 => 0,1038

Pr ($\bar{X} > 10500$) = 10,38%

c)

A partir de $\bar{X} \sim N(10000, \frac{2500^2}{40})$, calcula-se o z:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ => $\frac{8000-10000}{\sqrt{\frac{2500^2}{40}}}$ => $\frac{-2000}{\sqrt{156250}}$ => $\frac{-2000}{395,28}$ => -5,05

Z = 5,05

Pr (5,05) ≈ 1

Pr ($\bar{X} < 8000$) ≈ 1 – 1 => 0

Pr ($\bar{X} < 8000$) ≈ 0%

d)

Se o tamanho da amostra fosse 10, não seria possível utilizar o Teorema do Limite Central pois não se poderia assumir que a distribuição da amostra é uma normal, já que não se sabe a distribuição da população, e o número de observações (10) é baixo.